知識工学と人工知能 63－2
（1989. 3. 13）

完全モデル意味論に基づく例外の極小化

董 方清　　中川 裕志
横浜国立大学工学部電子情報工学科

Przymusinskiにより提案された完全モデルは非単調論理と論理プログラムとの関連性に注目し、一般論理プログラムの宣言的意味論を作り上げた。このモデル意味論により、論理プログラムと非単調論理との関連性、更に非単調論理の主要な論理体系らの関連性が示された。ところが、論理プログラム以外の制約条件や、非単調論理では広く取り扱われた論理否定が完全モデルではまだ検討されていない。また、暗黙的知識の表現の難しさも問題点として残っている。
本報告では、このような問題点を取り上げ、完全モデルの優先順位づけと優先順位に従う極小化の概念により論理否定へ優先順位をつける方法を示し、例外極小化モデルを提案する。このモデルにより非単調論理において広く利用された概念、例えば例外の極小化や最短パスなどが明瞭かつ単純な概念により示され、非単調論理の体系らに統一な基盤を与えることができる。

least exceptional model semantics based on perfect model

fangqing DONG　　hiroshi NAKAGAWA
Department of Electrical and Computer Engineering,
Yokohama National University, Yokohama 240 Japan.

Perfect model, proposed by Przymusinski, gives some important conclusions about the semantics of first-order predicate logic programs, and establishes a relationship between logic programming, circumscription and others nonmonotonic logics. However, the formulae with negative literals in head are not considered in perfect model. Furthermore, it is difficult to reason about the defaults of commonsense assertions which must be shown clearly in perfect model. In this paper, we propose a new model, named least exceptional model based on perfect model, then show a relationship with perfect model, finally give several sufficient conditions for unique such model of logic programs.

1 はじめに

論理プログラムと非単調論理とは密接な関係をもっているが、これまでにほとんど独立な分野として研究がなされている。最近、論理プログラムと非単調論理の関連性に注目し、その共通な基盤を究明しようとする流れの一つとして、論理プログラミングの完全モデル意味論(perfect model)[11,14]が提案された。

非単調論理は、我々の日常生活に不完全な情報の下で行われる推論に関する論理体系であり、特に80年代に入ってから著しく発展し、新たな論理体系が相次いで提案された。default reasoning[15]とnonmonotonic logic I [10]とAutoepistemic logic[12]は、暗黙の知識に基づく実世界と整合する拡張世界extensionの宣言的モデル意味論と推論の手続きに関する論理体系である。その他、世界のに先優先順位をつけることによって可能な世界の競合を解消していくpreferable reasoning[16]や、常識のdefaultを推論する難しさなどの問題点を取り上げて可能世界意味論に基づくconditional logic[1,2]などの非単調論理体系もある。

ところで、これまでに論理プログラミングの宣言的意味論の研究は極小モデルの概念を用いて行われているが、これは一般論理プログラムにとっては必ずしも適当ではないと指摘された[11]。完全モデルは述語への優先順位づけと優先順位に従う述語の極小化という単純かつ明瞭な概念により論理プログラムに新たな宣言的意味論を作り上げた。さらに、論理プログラムと主な非単調論理体系との関連性を示し、非単調論理の研究に新たな方向を展示した[14]。

しかし、完全モデルでは非単調論理に広く取り上げられた論理否定についてまだ検討されていなかった。このような問題点についてこの報告では以下のような検討結果を示す。まず完全モデル意味論について説明する。次に論理否定を導入した論理式について例外極小化モデルを定義し、その意味論を論じる。そして例外極小化モデルと完全モデルの関係について述べる。最後に例外極小化モデルと非単調論理との関係について調べる。

2 完全モデル意味論[14]

これまでに論理プログラミング、特にHorn節のようなpositive databaseの宣言的意味論は極小モデル意味論(minimal model semantics)[11]により確立されているが、この意味論は負の前提条件をもつ一般論理プログラムに対し、必ずしも適切ではないと指摘されている[11]。その代わりに、C.Przymusinskiらにより提案された完全モデルは従来の極小モデル意味論の性質を保つ上で、負の前提条件をもつ層状プログラムを対象として論理プログラムの宣言的意味論を与えた。さらに完全モデル意味論は非単調論理へ適用され、その共通な基盤を作り上げられた[14]。

完全モデル意味論においてはまず命題をノード、含意関係をノードのedgeとし、全ての論理式が一つ有向グラフと見なされる。さらにこのグラフに従ってノードに優先順位(priority)が与えられ、優先順位に従って述語のextensionを極小化することによりモデル意味論が確立された(この報告においては文献[14]に準拠として記号を用いる)。本文では命題論理を対象として検討する。

完全モデルは式(2.1)のような論理式を対象とする。

$$A_1 \wedge .. \wedge A_n \wedge \neg B_1 \wedge .. \wedge \neg B_m \supset C_1 \vee .. \vee C_p \quad (2.1)$$

優先順位関係が式(2.2)に与えられる。

【定義2.1:優先順位関係<と≤】

$$A_i \leq C_k \qquad 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq K \leq p \qquad (2.2)$$
$$B_j < C_k \qquad 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq K \leq p$$

すなわち、正の前提条件に帰結項と同じあるいは低い優先順位、負の前提条件に常に帰結項より低い優先順位をつけることにする。■

優先順位関係<と≤の推移性について次の定義が与えられた。

【定義2.2:<と≤の推移性】

①：$A \leq B$ かつ $B \leq C$ ならば、$A \leq C$ (2.3)
②：$A \leq B$ かつ $B < C$ ならば、$A < C$
③：$A < B$ ならば、$A \leq B$ ■

論理プログラムは一般的に複数の極小モデルをもつことが有り得る。特に命題の否定の意味論を定めなければモデルの生成には任意性がある。直観的に全ての命題記号に優先順位を与え、命題の否定$\neg p$に対し定められた優先順位まででpが証明されない限りpの否定が成り立つようなアルゴリズムで否定の意味を定めることができる。完全モデルにおいてこのような直観が優先順位づけと優先順位に従う命題の極小化という概念により抽象化されている。

【定義2.3:$M \prec N$】

MとNを式(2.1)のような論理プログラムPのモデルとする。もし、

$$A \in M-N \quad (2.4)$$

を満たす命題Aがあれば必ずAより優先順位の低い命題Bが存在し、

$$B < A \quad (2.5)$$

$$B \in N-M \quad (2.6)$$

を満たせば、$M \prec N$である。■

この定義により優先順位に従う命題の極小化という概念が厳密に確立された。すなわち、モデルMの命題Aより優先順位の低い命題BがNに属するときは$M \prec N$となる。関係$\prec$を用いると完全モデルが次のように定義できる。

【定義2.4:完全モデル】

$N \prec M$を満たすPのモデルがなければ、Mを完全モデル(2.perfect model)と呼ぶ。■

完全モデルに関して次の定理がある。

【定理2.1】

① 論理プログラムPの完全モデルは極小モデルでもある。

② 正論理プログラム(positive logic program)のあるモデルが、完全モデルである必要かつ十分条件はそのモデルが極小モデルであることである。■

一般的に与えられたプログラムの完全モデルは存在しないことが有り得る。完全モデルの存在可能性について次の定義と定理により判明された。

【定義2.5:noetherian】

プログラムPの優先順位$<$には

$$A < B < C < \cdots$$

のような無限な列がなければ、優先順位関係$<$をnoetherianと言う。

【定理:2.2】

論理プログラムPの優先順位関係$<$がnoetherianであれば、Pが必ず完全モデルをもつ。

特に優先順位関係$<$にはループがある(つまり$A < \ldots < A$)場合、完全モデルが存在しないことがわかる。このような不都合を避けるのに次の層状プログラムが導入された。

【定義2.6:層状プログラム】

Sを論理プログラムPの全ての命題記号、Sを層と呼ばれる$S_1, \ldots, S_r$に分割されるとする。式(2.1)に対し次の条件が満たされる場合、

$$\forall K \quad C_k \text{が同じ層に属する} \quad (2.7)$$

$$\forall i, K \quad \text{層}(A_i) \leq \text{層}(C_k)$$

$$\forall j, K \quad \text{層}(B_j) < \text{層}(C_k)$$

Pを層状プログラムと言う。■

層状プログラムに関して次の結論がある。

【定理2.3】

層状プログラムは完全モデルをもつ。■

特に帰結項が一つしかない場合、更に幾つかの定理が証明されている[14]。

【定理2.4】

① 唯一の完全モデルをもつ。

極小限定との関係について次の結論がある。

② 層状プログラムの完全モデルは次の極小限定

$$CIRCUM(P; S_1 > \ldots > S_n) \quad (2.8)$$

のモデルと同値である。

③ default reasoningとの関係について

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B_1 \wedge \ldots \wedge \neg B_m \supset C \quad (2.9)$$

をdefault rule

$$\frac{A_1 \wedge \ldots \wedge A_n : M\neg B_1 \ldots M\neg B_m}{C} \quad (2.10)$$

と見なせばdefault理論が唯一のextension

Eをもち、Eの最小モデルは対応する論理プログラムPの完全モデルと一致する。■

3　例外極小化モデル

節2において一般論理プログラムの完全モデルについてその性質を述べたが、非単調論理[1,7,10,12,15]では広く取り扱われている論理否定を完全モデルの手法で分析するには負リテラルを帰結項とする論理式を考慮する必要がある。

そして、文献[1,2]に指摘されたように非単調論理により常識を記述しようとすれば明示されない暗黙的知識を明かにする必要があるが、実用的な立場で考えると暗黙的知識の推論が難しい。例えば日常会話において条件文p⊃qが語られたとき、それは"pならば、Eであるから、q"という言明に換言できる。pは最も価値のある前提だが、発話状況においてわかりきった暗黙的条件Eを明かにはしない傾向がある。このような心理学の問題点をも考慮し、この節において矛盾する可能性のある論理式の集合Pを対象とし、完全モデルの手法で例外極小化モデルを定義し、その性質を調べる。

ここで式(2.1)を対象とする論理式につい

$$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg B_1 \wedge \cdots \wedge \neg B_m \supset (\neg)C \quad (3.1)$$

て論じる。このような論理式に対し注意すべきなのは、従来は述語記号に対して優先順位付けがされていたが、論理否定が導入される場合命題pの肯定と否定とが衝突し、矛盾する可能性があるので、pと¬pに別な優先順位をつけ、競合を解消するという点である。pと¬pに優先順位をつけるのに命題記号の代わりにリテラルに優先順位をつけることにする。まず幾つかの概念を定義する。

【定義3.1:理論＜D,W＞】

Qを命題記号の集合、WとDをQからなる命題論理式の集合とする。このときDとWの対＜D,W＞を理論と呼ぶ。■

我々が理論を導入したのは、非単調論理の問題に対し論理プログラムの範囲でその性質と宣言的意味論を検討するという目的からである。故にdefault理論[15]と同じようにWは公理の集合と見なすが、default規則を表現するのに、競合する論理式を許して、Dを必ずしも真となるとは限らない論理式の集合とする。我々の定義において論理式で常識のdefaultを表現しようとする点で、これまでの非単調論理と異なる。

【定義3.2:解釈】

Qを命題記号の集合、WとDをQからなる命題論理式の集合、Mを2^Qの要素、＜D,W＞を理論とする。MにおいてWの論理式が全て真に割り当てられる、つまり

$$\forall S\{S \in W ならば、M \models S\} \quad (3.2)$$

のを満たせばMを理論＜D,W＞の解釈と言う。またMにおいて真になるDの集合をP_Mとする。すなわち

$$P_M \subseteq D、\ \forall p\{p \in P_M、\ M \models p\} \quad (3.3)$$

$$\forall p\{p \in D - P_M、\ M \not\models p\} \quad (3.4)$$

便宜上、解釈Mを＜M,P_M＞の対で表す。■

例外の極小化という概念を表すには更に解釈のうち、成り立つDの論理式を極大化し、解釈自身が極小になるものを対象として議論を進める。

【定義3.3:例外のあるモデル】

＜D,W＞の解釈＜M,P_M＞に対し、別のいかなる解釈＜N,P_N＞

$$P_M \subset P_N, N \subset M \quad (3.5)$$

を満たせなければ、Mを理論＜D,W＞の例外のあるモデルと言う。■

例えば、次の理論＜D,W＞の全ての解釈と例外のあるモデルを与える。

【例3.1】

$$W=\{a, b\} \quad (3.6)$$

$$D=\{p_1, p_2, p_3, p_4\} \quad (3.7)$$

$p_1=a \supset p$,
$p_2=a \wedge b \supset \neg p$,
$p_3=a \wedge b \wedge c \supset p$,
$p_4=a \wedge b \wedge c \wedge d \supset \neg p$

	a	b	c	d	p	P_M	
M_1	1	1	0	0	0	$\{p_2, p_3, p_4\} = P_1$	
M_2	1	1	0	0	1	$\{p_1, p_3, p_4\} = P_2$	
M_3	1	1	0	1	0	$\{p_2, p_3, p_4\} = P_3$	
M_4	1	1	0	1	1	$\{p_1, p_3, p_4\} = P_4$	
M_5	1	1	1	0	0	$\{p_2, p_4\} = P_5$	
M_6	1	1	1	0	1	$\{p_1, p_3, p_4\} = P_6$	
M_7	1	1	1	1	0	$\{p_2, p_4\} = P_7$	
M_8	1	1	1	1	1	$\{p_1, p_3\} = P_8$	(3.8)

M_1に対し、$M_1 \subset M_i$ かつ $P_i \subseteq P_1$ $i=3,5,7$
M_2に対し、$M_2 \subset M_i$ かつ $P_i \subseteq P_2$ $i=4,6,8$

M_1〜M_8は解釈であるが、M_1とM_2は例外のあるモデルである。

この例のように理論が複数の例外のあるモデルをもつ可能性があるので、リテラルに優先順位をつけることにより好ましい例外のあるモデルを選ぶことにする。まずリテラルに対する優先順位≤を次のように示す。

【定義3.4:優先順位関係≤】

論理式(3.9)を

$$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg B_1 \wedge \cdots \wedge \neg B_m \supset (\neg)C \quad (3.9)$$

に対し優先順位関係を次のように与える。

$$A_i \leq (\neg)C \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.10)$$
$$\neg B_j \leq (\neg)C \quad 1 \leq j \leq m$$

ただし、A_iとB_jをそれぞれCの正の前提条件と負の前提条件である。

優先順位関係≤が推移性をもつとする。すなわち、

$$A \leq B, B \leq C ならば、A \leq B \blacksquare \quad (3.11)$$

これまでにモデル間の競合を解消するのにいろいろな考え方が示されている。例えば、最も特殊[17]や最短パス[13]などがある。ここで抽象的定義を与える前に、幾つかの例を調べ、優先順位づけの方針を説明する。

【例3.2】

$$D=\{a \supset p, a \wedge b \supset \neg p, a \wedge b \wedge c \supset p\} \quad (3.12)$$

を与えると、次のことがわかる。

$$a \leq p, b \leq p, c \leq p \quad (3.13)$$
$$a \leq \neg p, b \leq \neg p$$

$$W=\{a, b, c\} \quad (3.14)$$

とすれば、二つの例外のあるモデルが得られる。

$$M=\{a, b, c, p\}, \ N=\{a, b, c\} \quad (3.15)$$

我々にとっては選びたいのはMであるが、従来の方法ではその優先順位が示されていない。もし"≤"を前提から帰結への到達関係と見なせば、$a \wedge b \supset \neg p$の方が$a \wedge b \wedge c \supset p$の優先順位関係の部分集合であることを注意してほしい。そこでより多い前提条件をもつ帰結の順位が高いことにすれば、Mが選ばれることになる。

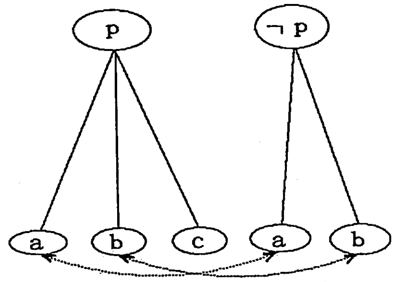

図1 ≤の部分集合による優先順位づけ

【例3.3】:

D={adult ⊃ employed, univ_st ⊃ adult, univ_st ⊃ ¬employed}
W={adult, univ_st} (3.16)

adult ≤ employed, (3.17)
univ_st ≤ adult,
univ_st ≤ ¬employed
M={adult, univ_st, employed}
N={adult, univ_st}

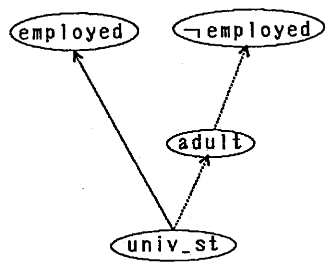

図2 ≤を推論パスと見なす優先順位づけ

これらの例外のあるモデルについて注意されたいのは、employedと¬employedはそれ

ぞれadultとuniv_stを前提条件とするが、優先順位関係$\leq$を推論パスと考えれば、univ_stから$\neg$employedへのパスがemployedへのパスより短いことがわかる。そこで最短パスという意味でNが選ばれる。

例において説明した方針をまとめて説明すれば、命題pと否定$\neg p$に対し、”より多くのより低い優先順位の前提条件をもつ方が優先順位が高い”という一般的なルールに従って優先順位をつけるということになる。

次にこの規則を正確に表現する。

【定義3.5:優先順位関係の集合】

$P_1, P_2, \ldots, P_n$を理論$\langle D, W \rangle$の論理式とする。論理式$P_1, P_2, \ldots, P_n$により定義された全ての順位関係の集合を、

$$R(P_1, P_2, \ldots, P_n) \qquad (3.18)$$

で表す。特にCを根とする$P_1, P_2, \ldots, P_n$からなるグラフにより定義された優先順位関係の集合を

$$R(C \mid P_1, P_2, \ldots, P_n) \qquad (3.19)$$

で表す。■

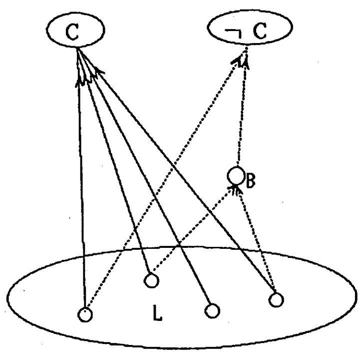

図3　定義3.6の図示($\neg C < C$)

【定義3.6:Cと$\neg$Cの順位】

Qを理論$\langle D, W \rangle$の全ての命題記号、P^+、$P^-, P_1, \ldots, P_n$を理論$\langle D, W \rangle$の論理式、P^+とP^-はそれぞれCと$\neg$Cを帰結項とする。もし、いかなるリテラルBに対し

$$(B \leq \neg C) \in R(\neg C \mid P^-, P_1, \ldots, P_n) \qquad (3.20)$$

かつ

$$(B \leq C) \notin R(C \mid P^+)\} \qquad (3.21)$$

ならば、リテラルLが存在し、

$$(L \leq B) \in R(\neg C \mid P^-, P_1, \ldots, P_n) \qquad (3.22)$$

かつ

$$(L \leq C) \in R(C \mid P^+) \qquad (3.23)$$

を満たす場合、

$$P^- < P^+ \qquad (3.24)$$

とする(Cと$\neg$Cは入れ換えてもよい)。■

【定義3.7:優先順位<】

①あらゆる解釈Mにおいて

$$\neg B \leq C ならば、B < C \qquad (3.25)$$

ただし、BとCが命題記号である。

②P^-とP^+が各々$\neg$CとCを帰結項とする論理式であり、かつ例外のあるモデルNとMを満たすとする。もし任意のP^-に対し、あるP^+が存在し、

$$P^- < P^+ \qquad (3.26)$$

を満たせば、

$$\neg C < C \qquad (3.27)$$

とする。■

①の定義は従来通りであるが、②は、例3.2と例3.3により説明した方針を抽象化したものである。pとその否定$\neg p$の比較は場合により異なるので特定な例外のあるモデルMとNに対し、定義を与えた。

【定義3.9:$M \prec N$】

MとNを$\langle D, W \rangle$の例外のあるモデルとする。次の条件を満たす場合、$M \prec N$で表す。

任意の命題記号Aに対し、

$$A \in M - N \qquad (3.28)$$

ならば、ある命題Bが存在し、$B < A$を満たし、かつBが$\neg$Aでない場合、

$$B \in N - M \qquad (3.29)$$

となる。■

特に$N \prec M$を満たす例外のあるモデルNが存在しない場合、Mを例外極小化モデルと言う。例外極小化モデルがただ一つの場合、例外最小モデルと言う。

関係$\prec$について次のことがわかる。

【命題3.1】

$\langle M, P_M \rangle$と$\langle N, P_N \rangle$に対し、

$$M \subset N \qquad (3.30)$$

かつ

$$\neg p < p \qquad (3.31)$$

を満たす優先順位関係がなければ、$M \prec N$が成り立つ。■

【命題3.2】

優先順位くに対し、$A_0 < A_1 < \cdots$が無限でない限り、$\prec$関係が推移性をもつ。即ち、

$M \prec N, N \prec K$ならば、$M \prec K$ (3.32)

が成り立つ。■

【例3.4】

例3.1に対し、次のことがわかる。

$M_1 \subset M_2, M_1 \prec M_2$ (3.33)

すると、M_1が例外極小化モデルである。

【例3.5】

$W=\{a, b, c\}$

$D=\{a \supset p, a \wedge b \supset \neg p, a \wedge b \wedge c \supset p\}$

$a \leq p, b \leq p, c \leq p$

$a \leq \neg p, b \leq \neg p$

$M_1=\{a, b, c\}$

$M_2=\{a, b, c, p\}$

M_1とM_2の優先順位関係を調べてみる。

$R(\neg p \mid \cdot)=R(\neg p \mid a \wedge b \supset \neg p)$ (3.34)

$=\{a \leq \neg p, b \leq \neg p\},$

$R(p \mid \cdot)=R(p \mid a \supset p, a \wedge b \wedge c \supset p)$

$=\{a \leq p, b \leq p, c \leq p\}$

$a \leq \neg p \in R(\neg p \mid \cdot)$

$a \leq p \notin R(p \mid \cdot)$

$b \leq \neg p \in R(\neg p \mid \cdot)$

$b \leq p \notin R(p \mid \cdot)$

が満たされるので、

$\neg p < p$ (3.35)

ということがわかり、

$M_2 \prec M_1$ (3.36)

が得られる。

例外極小化モデルの存在可能性について次の定理がわかる。

【定理3.1】

理論$<D, W>$に対し、優先順位関係くにはA$< \cdots <$Aのようなループがなければ、例外極小化モデルが必ず存在する。■

この定理の証明は定理2.2を参照すれば容易にわかる。

4 例外極小化モデルと完全モデル

完全モデルには例外がないので例外極小化モデルの特例であることが容易にわかるが、例外があっても完全モデルのように働くクラスが存在する。例えば、例3.1に示したプログラムDが次のD'と同じ例外極小化モデルをもつことが容易に検証できるであろう。

$D'=\{a \wedge \neg b \supset p, a \wedge b \wedge c \wedge \neg d \supset p\}$ (4.1)

便宜上、例外極小化モデルの論理式を条件式と呼ぶことにする。例外極小化モデルが同値であるという意味で論理式と条件式の対応関係がわかれば、論理式の対応関係も容易にわかる。

論理式と条件式との相異点はおよそ次のように考えることにする。

条件式＋暗黙的知識＝論理式

すなわち、論理式を非単調論理の立場で言えば、暗黙的知識を一つも漏らさずに論理式の前提条件に示す必要があるが、条件式は反対の立場を立って、暗黙的知識が省略されている。故に、省略された暗黙的知識を推論し、条件式に示すことにより論理式へ変換できる。

まず暗黙的知識のうちここで重要になる明示されない例外を次のように定義する。

【定義4.1:暗黙の例外】

Dを条件式の集合、QをDにある全ての命題記号の集合、Wを2^Qの要素、Mを$<D, W>$の例外極小化モデル、PをDの任意の条件式とする。次の条件が満たされるときdをPの暗黙の例外と呼ぶ。

$\forall M \quad M \models d$ならば、$M \not\models P$ (4.2)

$M \not\models d$ならば、$M \models P$ ■

条件式pの暗黙の例外dがわかればその否定$\neg d$をPに加えることによりあらゆる例外極小化モデルにおいてPが成り立つことになる。すなわち、

①：$\forall M$に対し、

$M \models A_1 \wedge \cdots \wedge \neg B_1 \wedge \cdots \supset C,$ (4.3)

$M \models C$

ならば、

$M \models A_1 \wedge \cdots \wedge \neg B_1 \wedge \cdots \wedge \neg d \supset C,$

$M \models C$

②：$\forall M$に対し、

$M \nvDash A_1 \wedge \cdots \wedge \neg B_1 \wedge \cdots \supset C,$ (4.4)

$M \vDash \neg C,$

ならば

$M \vDash A_1 \wedge \cdots \wedge \neg B_1 \wedge \cdots \wedge \neg d \supset C,$

$M \vDash \neg C$

ただし、$\neg d = L_1 \vee L_2 \vee \cdots$である場合、その条件式を幾つかの条件式に分割し、$\vee$を

$A_1 \wedge \cdots \wedge \neg B_1 \wedge \cdots \wedge L_1 \supset C,$ (4.5)

$A_1 \wedge \cdots \wedge \neg B_1 \wedge \cdots \wedge L_2 \supset C,$

・・・・・・

消去すればよい。

条件式Dと変換された条件式D'について次の結論が成り立つ。

【命題4.1】

条件式Dと変換された論理式D'との例外極小化モデルが同値である。■

例えば、例3.1に対し

【例4.1】

$D = \{a \supset p,$
$a \wedge b \supset \neg p,$
$a \wedge b \wedge c \supset p,$
$a \wedge b \wedge c \wedge d \supset \neg p\}$

$D' = \{a \wedge \neg b \supset p,$ (4.6)
$a \wedge b \wedge \neg c \supset \neg p,$
$a \wedge b \wedge c \wedge \neg d \supset p,$
$a \wedge b \wedge c \wedge d \supset \neg p\}$

D'に関してさらに次の結論がある。

【命題4.2】

D'の例外極小化モデルと、負リテラルの帰結項をもつ論理式を消去した論理式集合D"の完全モデルと同値である。■

次に完全モデルへ変換できる条件式の構造を調べる。まず、条件式の暗黙の例外になり得るリテラルについて考える。

負リテラルをもつ論理式がある場合、命題pとその否定$\neg p$とも成立する可能性がある。競合を解消するのに優先順位<の定義3.7によりpと$\neg p$に優先順位がつけられる。$\neg p$には高い優先順位がつけられたら、その根拠となるものがpの暗黙の例外と考えられ、逆にも成り立つ。これに関して条件式の暗黙の例外を次のように定義する。

【定義4.2:可能な暗黙の例外】

Dを条件式の集合、Wを命題記号、P^-とP^+をそれぞれ$\neg C$とCが帰結項である論理式とする。もし、

$$P^+ < P^- \quad (4.7)$$

が成り立てば、

$d = \{L_1 \wedge L_2 \wedge \cdots \mid$ (4.8)
L_kが$\neg C$の前提条件であるが、
Cの前提条件ではない}

とする(+と-を入れ換えれよい)。■

例えば、

【例4.2】

$D = \{a \supset p, b \supset p, a \wedge b \wedge c \supset \neg p\}$ (4.9)

に対し、それぞれの暗黙の例外をd_1、d_2、d_3とする。

$d_1 = b \wedge c$ (4.10)

$d_2 = a \wedge c$

$d_3 = \{\}$

が得られる。

【条件式が論理式への変換手続き】

可能な暗黙の例外がわかれば、その暗黙の例外の否定を条件式に追加する。そしてその条件式を幾つかの式に分割して$\vee$を消去する。さらに冗長な論理式と負帰結項をもつ論理式を消去する。■

例えば例4.2に対し、次の論理式の集合が得られる。

step1: $a \wedge \neg (b \wedge c) \supset p$ (4.11)
$b \wedge \neg (a \wedge c) \supset p$

step2: $a \wedge \neg b \supset p$ (4.12)
$a \wedge \neg c \supset p$
$b \wedge \neg a \supset p$
$b \wedge \neg c \supset p$

$D'' = \{a \wedge \neg b \supset p, a \wedge \neg c \supset p,$ (4.13)
$b \wedge \neg a \supset p, b \wedge \neg c \supset p\}$

我々の関心はこのようしてに変換できる条件式の構造である。これに関して次の定理が成立する。

【定理4.2】

条件式Dにおいて任意の命題記号Aに対し、P^+とP^-はそれぞれAと$\neg A$を帰結項とする論理式とする。もし

$$P^{+} < P^{-} \qquad (4.14)$$
或は
$$P^{-} < P^{+} \qquad (4.15)$$
のいずれかが成り立てば、Dを以上の手続きで唯一のD"へ変換できる。■

そうでない場合、一般的には変換できない。例えば、次の例の場合、
$$D=\{a \land b \supset p, a \land c \supset \neg p\} \qquad (4.16)$$
二つの論理式を両立させる暗黙の例外はみつからないのでD'への変換が不可能である。

以上の結論をまとめて次の結果が得られる。

【定理4.3】

Qを命題記号の集合、DをQからなる論理式の集合、Wを2^Qの要素とする。Dにおいて任意の命題論理式Aに対し、P^{+}とP^{-}はそれぞれAと¬Aを帰結項とする論理式とする。もし
$$P^{+} < P^{-} \qquad (4.17)$$
或は
$$P^{-} < P^{+} \qquad (4.18)$$
のいずれかが成り立てば、D"が存在し、<D,W>の例外極小化モデルとW∪D"の完全モデルは同値である。■

この場合条件式の集合Dと論理式の集合D"とが同値であると言う。さらに

【定理4.4】:

Qを命題記号の集合、DをQからなる論理式の集合、Wを2^Qの要素とする。Dと同値である論理式D"が存在すれば、Dのあらゆる理論<D,W>が唯一の例外最小化モデルをもつ。

5 非単調論理との関係

これまでに数多くの非単調論理体系が提案されているが、ここで我々は、P.Delgrandeの提案[1,2]と極小限定とを比較してみる。

P.Delgrandeに提案された条件論理に基づくdefault推論は、推論の対象が従来の拡張世界の代わりに整合する最大の論理式の世界(maximal contingent extionsion)を求めることになる。

一般的にdefault理論<D,W>が例外最小化モデルをもてば、そのモデルを<M,P>とする。よってmaximal contingent extionsion Sが存在し、
$$S \subseteq P \qquad (5.1)$$
が成立し、Sの例外最小モデルはMと同値である。

極小限定との関係も容易にわかるが、論理<D,W>における条件式
$$A_1 \land \cdots \land \neg B_1 \land \cdots \supset (\neg) C \qquad (5.2)$$
を論理式
$$A_1 \land \cdots \land \neg B_1 \land \cdots \land \neg ab_i \supset (\neg) C \qquad (5.3)$$
と見なし、このような論理式の集合をD'とする。論理式P^{+}とP^{-}に対し、
$$P^{+} = \cdots \supset C \qquad (5.4)$$
$$P^{-} = \cdots \supset \neg C$$

$$P^{+} < P^{-} \qquad (5.5)$$
を満たす場合、
$$\cdots \land \neg ab_1 \supset C \qquad (5.6)$$
$$\cdots \land \neg ab_2 \supset \neg C$$
に対し、優先順位関係
$$ab_1 < ab_2 \qquad (5.7)$$
を付け加える(+と-を入れ換えれば$ab_2 < ab_1$)。

Dが論理式へ変換できれば、<D,W>の例外極小モデルが対応する論理式W∪D'の極小限定のモデルと同値である。

6 おわりに

この報告においてまず完全モデルについて簡単に説明した。そして、完全モデルではり扱わなかった論理否定を導入し、競合する命題と自分の否定に優先順位をつけることにより、例外極小化モデルを定義し、このモデルにより完全モデルを非単調論理のクラスへ拡張した。このモデルは従来に議論した非単調論理の基本的性質、例えば例外の極小化、最短パス、モデルの優先順位関係などを保有するので非単調論理の宣言的意味論に共通の基盤を作り上げることが期待できる。このモデルは様相演算子を導入したnonmonotonic logicやAutoepistemic logic、可能世界に基づくconditional logicと同等な機能をもつ。

非単調論理においては論理否定が導入されるので論理肯定との競合が避けられない。競合がある場合矛盾を解消するのに妥当な優先順位づけが必要である特に複数のモデルに優先順位づけができない場合、あらゆるモデルで成立する定理が関心の事である。この点について完全モデルの手法で調べる必要がある。これは今後の研究課題として残っている。

【参考文献】：

1. Delgrande, P.:"An Approach to Default Reasoning Based on a First-Order Conditional Logic:Revised Report",AI36(1988),pp63-90.
2. Delgrande, P.:"A First-Order Conditi oal Logic for Protypical Properties",AI33(1987),pp105-130.
3. Etherington, W.:"Formalizing Nonmontonic Reasoning Systems",AI31,p41-85
4. Geffner, H.:"On the Logic of Defaults",AAAI-88,pp449-454.
5. Gelfond, M.:"Compiling Circumscriptive Theories into Logic Programs: Preliminary Report",AAAI-88, pp455-459
6. Ginsberg, L.:"A Circumscriptive Theorem Prover:Preliminary Report", AAAI-88,pp470-474
7. McCarthy, J.:"Applications of Circumscription to Formalizing Common-Sense Knowledge",Readings in Nonmonotonic Reasoning, MORGAN KAUFMANN PUBLISHERS,INC.
8. Lifschitz, V.:"Computing Circumscription",Readings in Nonmon otonic Reasoning,MORGAN KAUFMANN PUBLISHER S,INC.
9. Lloyd, J.W.:"Foundations of Logic Programming", 邦訳：佐藤、森下：”論理プログラミングの基礎”、産業図書
10. McDermott, D. and Doyle, J.:"Non-Monotonic Logic I",AI13,pp41-71(1980)
11. Przymusinski, C.:"On the Declarative Semantics of Deductive Databases and Logic Programs", Minker, J.:"Foundations of Defuctive Databases and Logic Programming", chapter 5,pp193-216.
12. Moore, C.:"Semantic Consideration on Nonmonotonic Logic",AI25,p75-94
13. Przymusinski, C.:"An Algorithm to Compute Circumscrption",AI38,pp49-73
14. Przymusinski, C.:"On the Relationship Between Logic Programming and Non-monotonic Reasoning",AAAI-88, pp444-448.
15. Reiter, R.:"A Logic for Default Reasoning",AI 13(1980),pp81-131
16. Shoham, Y:"Reasoning about Change", The MIT Press
17. 国藤　進：”仮説推論”，人工知能学会誌，Vol.2 No.1