人　工　知　能 76－5
（１９９１．５．２２）

通信ネットワークのコスト最適設計の高速化

青木 武司　　　泉 寛幸
（株）富士通研究所

情報通信ネットワークの回線コストを最適化する設計方法を述べる．コストが階段状の不連続な関数である場合は，整数型の組み合わせ最適化問題あるいは制約充足問題として定式化できる．我々は，様々なネットワークの回線パターンに対して単体法によって可解性の判定を行い，最適なネットワークを設計する方法を提案する．計算の高速化のため，グラフの分解の方法，カットセットや半順序関係による候補の刈り込みの方法，単体法の双対性を利用した制約充足判定の方法を議論する．27の通信拠点と52の回線リンクを持つネットワークに対して実験し，木構造のネットワークよりも安価なネットワークを迂回ルートを用いて設計した．

A fast design method of communication network

Takeshi Aoki　　　Hiroyuki Izumi
Fujitsu Laboratories Ltd.
1015 Kamikodanaka Nakahara-Ku, Kawasaki 211,Japan

This paper deals with communication network design to optimize the discontinuous cost function. Designing network is formalized as a combinatorial optimization problem or constraint satisfaction problem. We propose the method to design an optimal network, judging feasibility by the simplex method. To speed up the calculation, we discuss the methods of dividing into subnetworks, pruning candidates by cut sets and partial order of the network patterns, and using the duality of the simplex method. We design a cheaper network than a tree structured network for the network topology with 27 nodes, 52 links.

1 はじめに

企業の情報通信ネットワークの構築には，低価格のネットワークを設計することが求められる．そのためには，通信ネットワークのトポロジーとルーティングを最適に設計する必要がある．従来から木構造のネットワークのトポロジーを設計することが多いが，木構造ではコストや信頼性の面で最適なネットワークを構成できないので，ループを含むトポロジーに対して最適なルーティングを決定する必要がある．通信ネットワークの回線コストを最小にするようなネットワークを勾配法で決定する方法が提案されている [1]．しかし勾配法は，コストが各リンクの通信量に関して線形で連続な関数である場合にしか適用できない．本論文では，回線のコストが階段状の不連続な関数である場合を扱う．この場合に回線コストを最小化する問題は，整数型の組み合わせ最適化問題になり，勾配法のようなコスト関数の導関数を必要とする手法では，最適解を見つけることはできない．ネットワークの候補の数は組み合わせ爆発を起こすため，最適なネットワークを設計する実用的なアルゴリズムは考えられていない．

我々は，このコスト最適化問題を制約充足問題と捉えて，様々なネットワークのパターンに対して線形計画法によって可解性の判定を行い，最適なネットワークパターンを算出する方法を提案する．2節で，通信ネットワークのコスト最適化問題を定式化し，3節で，2節のコスト最適化問題を制約充足問題として再定式化する．4,5,6節は我々の提案する方法であり，4節ではグラフの分解の方法，5節ではカットセットや半順序関係による候補の刈り込みの方法，6節では単体法の双対性を利用した制約充足判定の高速化の方法を述べる．7節で実験結果を評価する．

2 コスト最適化問題

2.1 定式化

通信ネットワークの回線コスト最適化問題を定式化する．通信ネットワークの通信拠点をノード，拠点間を結ぶ回線をリンクとするグラフを $G=(V,E)$ とする．V,E はそれぞれノード（点）の集合，リンク（枝）の集合で

$$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_N\}$$

$$E=\{e_1,e_2,\ldots,e_M\}$$

である．グラフ G 上の初等的なパス（同じノードを2度以上通らないパス）の全体を Γ とする．ノード v_i,v_j 間を結ぶパスの集合を Γ_{ij}，リンク e_k を通るパスの集合を Γ^k とする．

$$\Gamma_{ij}=\{\gamma\in\Gamma \mid \text{パス}\ \gamma\ \text{の両端が}\ v_i,v_j\in V\}$$

$$\Gamma^k=\{\gamma\in\Gamma \mid \text{パス}\ \gamma\ \text{はリンク}\ e_k\in E\ \text{を通る}\}$$

各パス γ 上にフローを考え，f_γ とおく．f_γ はパス γ を流れる通信量（単位：ch（チャネル））を表す．互いに通信しているノード v_i,v_j 間の通信量の需要（単位：ch）を d_{ij} とおくと，ノード v_i,v_j 間のパスのフローについて次の不等式を満たす必要がある．

$$d_{ij}=\sum_{\gamma\in\Gamma_{ij}} f_\gamma,\quad i,j=1,2,\ldots,N$$

ただし，$d_{ij}=d_{ji}(i\neq j), d_{ii}=0$ とする．リンク e_k 上のフローを，そのリンクを通過するすべてのパスのフローの総和で定義し，u_k とおく．

$$u_k=\sum_{\gamma\in\Gamma^k} f_\gamma,\quad k=1,2,,\ldots,M$$

高速デジタル回線の場合，料金体系は表 1のようになっており，リンク e_k の回線速度は，e_k の通信量 u_k に応じて {1,3,6,12,24,48,96} の中から u_k よりも大きくかつ最小のチャネル数が選ばれる．リンク e_k の両端ノード v_i,v_j 間の距離（単位：km）を r_k として，回線のコストをコスト関数 $c(u_k,r_k)$ の値（単位：千円）で与える．このコスト関数は表 1を関数の形にしたもので，階段状の不連続関数である（図 2.1）．グラフ G のすべてのリンクのコストの総和を C とすると，通信ネットワークの回線コスト最適化問題は，グラフ $G=(V,E)$ と通信量の需要 $d_{ij}(i,j=1,2,\ldots,N)$ が与えられたとき，パスのフロー $f_\gamma(\gamma\in\Gamma)$ を未知数とする次の最適化問題の最適解を求める問題として定式化できる．

$$\begin{array}{ll}
\text{minimize} & C=\sum_{e_k\in E} c(u_k,r_k)\\
\text{subject to} & d_{ij}=\sum_{\gamma\in\Gamma_{ij}} f_\gamma\\
& u_k=\sum_{\gamma\in\Gamma^k} f_\gamma\\
& f_\gamma\geq 0,\gamma\in\Gamma\\
& i,j=1,2,\ldots,N\\
& k=1,2,,\ldots,M
\end{array}\tag{1}$$

表 1: 高速デジタル回線の料金表（一部）

速度 (kb/s)	64	192	384	768
チャネル (ch)	1	3	6	12
～15km	83	130	170	230
～30km	200	320	430	570
～60km	390	620	830	1100
～120km	465	680	900	1250
～240km	590	850	1150	1600
～360km	740	1100	1450	2000
～500km	915	1350	1750	2450
～750km	1100	1600	2100	2950
～1000km	1250	1900	2500	3400

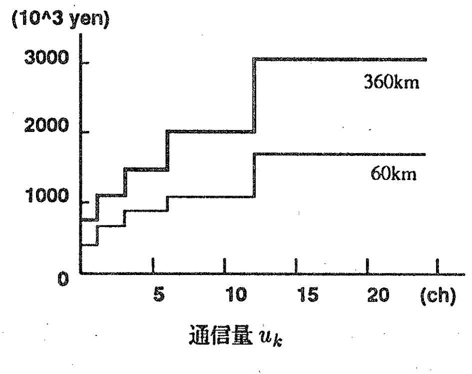

図 1: コスト関数 $c(u_k, r_k)$ （$r_k = 60km, 360km$ の場合）

2.2 例

高速デジタル回線の料金は，回線速度が上がるほど単位回線数当りの値段が安くなるように設定されている．総コスト C は，複数の互いに異なる階段状のコスト関数の総和であるから，多くの極小解を持ち，いろいろなパスの組み合わせを考えなければコストの最適解を見つけることができない．たとえば図 2のような 3 地点間の三角網の例では，次の最適化問題

minimize

$$C = c(u_{12}, r_{12}) + c(u_{23}, r_{23}) + c(u_{31}, r_{31})$$

subject to

$$d_{12} = 4 = f_{12} + f_{132}$$
$$d_{23} = 7 = f_{23} + f_{213}$$
$$d_{31} = 5 = f_{31} + f_{321}$$
$$u_{12} = f_{12} + f_{213} + f_{321}$$
$$u_{23} = f_{23} + f_{132} + f_{321}$$
$$u_{31} = f_{31} + f_{132} + f_{213}$$
$$f_{12}, f_{23}, f_{31}, f_{132}, f_{213}, f_{321} \geq 0$$

を解くことになる．ここで

$$r_{12} = 106, r_{23} = 374, r_{31} = 269(km)$$

とする．このとき

(a) 図 2(a) のように，迂回ルートを使わないで直通のリンクですべての通信需要を補うと，

$$f_{12} = 4, f_{23} = 7, f_{31} = 5$$
(他のフローはすべて 0)
$$u_{12} = 4, u_{23} = 7, u_{31} = 5$$

であり，リンク 12,23,31 にはそれぞれ 6,12,6(ch) の回線速度の回線を割り当てることになる．回線コストは，

$$C = 900 + 2450 + 1450 = 4800$$

である．

(b) (a) の場合，リンク 23 の回線は 12ch の内 7ch しか使用していない．図 2(b) のようにリンク 23 の 1ch 分をパス 213 に迂回させて，回線速度を一ランク下げて 6ch にすることができる．

$$f_{12} = 4, f_{23} = 6, f_{31} = 5, f_{213} = 1$$
$$u_{12} = 5, u_{23} = 6, u_{31} = 6$$

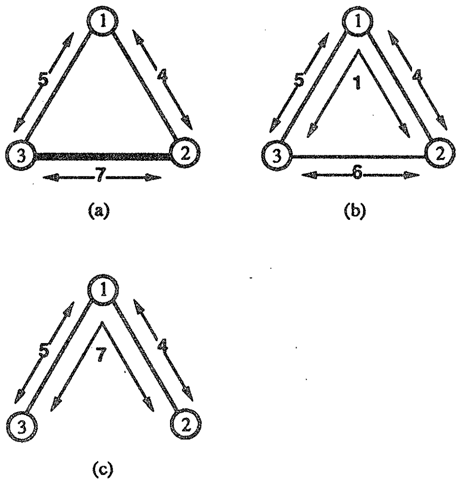

図 2: 簡単な例

であり，回線コストは，

$$C = 900 + 1750 + 1450 = 4100$$

となり，(a) の場合より安くなる．

(c) ところが，図 2(c) のようにノード 2,3 間の通信をすべてパス 213 に迂回させると，

$$f_{12} = 4, f_{31} = 5, f_{213} = 7$$
$$u_{12} = 11, u_{23} = 0, u_{31} = 12$$

であり，回線コストは，

$$C = 1250 + 2000 = 3250$$

となり，さらに安くなる．

3 制約充足問題

回線速度は飛び飛びに量子化されているので，(1) 式の最適化問題を直接扱うかわりに，グラフの各リンクに割り当てられる回線速度のすべての組み合わせについて解を求め，最もコストの低い回線の組み合わせを選択する方法が考えられる．リンク e_k に割り当てる回線速度を l_k として，前節の最適化問題を次のような制約充足問題として捉える．

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \sum_{\gamma \in \Gamma_{ij}} f_\gamma \\ l_k \geq u_k &= \sum_{\gamma \in \Gamma^k} f_\gamma \\ f_\gamma &\geq 0, \gamma \in \Gamma \\ i, j &= 1, 2, \ldots, N \\ k &= 1, 2, , \ldots, M \end{aligned} \tag{2}$$

リンク e_k の回線の空き容量を $\delta_k > 0$ とおき，(2) 式の不等式を次のように等式に変形する．

$$l_k = \sum_{\gamma \in \Gamma^k} f_\gamma + \delta_k,\ \delta_k \geq 0 \tag{3}$$

すべてのパスのフロー f_γ 及び回線の空き容量 δ_k をまとめて変数 $\mathbf{x}$ とし，2 点間の通信量の需要 d_{ij}，リンクに割り当てる回線速度 l_k をまとめて定数 $\mathbf{b}$ とする．

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} = (f_\gamma) \\ &\mathbf{b} = (d_{ij}, l_k) \\ &\gamma \in \Gamma; i, j = 1, 2, \ldots, N; k = 1, 2, \ldots, M \end{aligned}$$

(2),(3) 式は次のように行列表現される．

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

ここで，$\mathbf{A}$ は係数行列であり，変数の数（$\mathbf{x}$ の次元）を n，条件式の数（$\mathbf{b}$ の次元）を m として，

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [x_1, x_2, \cdots, x_n]^t \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ \mathbf{b} &= [b_1, b_2, \cdots, b_m]^t \end{aligned} \tag{5}$$

とおく．係数行列 $\mathbf{A}$ の各要素 a_{ij} は 0 または 1 である．

(2) 式の制約充足問題の制約充足解は単体法（シンプレックス法）によって求めることができる [2].

回線速度の集合 S を

$$S = \{0, 1, 3, 6, 12, 24, 48, 96\}$$

とし，各リンク e_k に割り当てる回線速度 l_k をまとめて

$$\pi = (l_1, l_2, \cdots, l_M), l_k \in S$$

とする．リンクに割り当てる回線速度の組み合わせ π を回線候補と呼ぶ．様々な回線候補に対して (2) 式の制約充足問題の可解性を調べることにより，最もコストの低い回線候補を探索することができる．このとき問題になるのは，非常に多数の回線候補が考えられるため，組み合わせ爆発を起こすことと，一般にパスの数が大きくなるため (4) 式の変数 $\mathbf{x}$ の次元が大きくなり，可解性の判定をするための計算時間が大きくなることである．以下の 4,5,6節で部分問題に分解して変数の数を削減する方法，可解であるための必要条件を用いて回線候補を刈り込む方法及び制約充足判定を高速化する方法を述べる．

4 部分問題への分割

グラフ $G=(V,E)$ の任意の相異なる二つの枝を通る初等的な閉路[1]が存在するとき，G は2連結であるという [3]．（孤立点のみからなるグラフ，一本の枝とその両端点だけからなるグラフは2連結である．）

グラフ $G=(V,E)$ を2連結である部分グラフ $G_i=(V_i,E_i)$ $(i=1,\ldots)$ に一意的に分割することができる．このとき，部分グラフ G_i を G の2連結成分という．$|V_i \cap V_j| \le 1 (i \ne j)$ が成立し，$V_i \cap V_j = v$ のとき，v を G の関節点という．

このとき点 v_i, v_j 間を結ぶ任意のパス γ に対して，ある関節点の集合 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ が存在して，

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k$$

$$\gamma_0 \in \Gamma_{ia_1}, \gamma_1 \in \Gamma_{a_1a_2}, \cdots, \gamma_k \in \Gamma_{a_kj}$$

と書ける．ただし，パス γ を中間の点で2つに分割して，その点より前のパスを γ_1，その点より後のパスを γ_2 とするとき $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$ と書くことにする．このように関節点でパスを分割すれば，(1) 式のコスト最適化問題を2連結成分毎に独立な問題に分割できる．逆に2連結成分内でパスのフローが決定すれば，関節点でパスを結合して分割前のグラフのパスのフローを決定できる．パスの数は分割前は

$$|\Gamma_{ij}| = |\Gamma_{ia_1}| \times |\Gamma_{a_1a_2}| \times \cdots \times |\Gamma_{a_kj}|$$

であるが，分割後は

$$|\Gamma_{ij}| = |\Gamma_{ia_1}| + |\Gamma_{a_1a_2}| + \cdots + |\Gamma_{a_kj}|$$

に減少するため，(2) 式の制約充足問題の変数の数を削減することができる．

[1]始点と終点を除くすべての点が異なる閉路を初等的な閉路という．

5 候補の刈り込み

5.1 カットセットによる候補の刈り込み

ある回線候補が可能解であるための必要条件をグラフのカットセットに関して導くことができる．この必要条件によって事前に無効の候補を刈り込むことができる．グラフ $G=(V,E)$（4節で述べたように，グラフを分割した場合はその部分グラフ）の点集合 V の2分割 $\{V^+,V^-\}$ に対して，一方の端点が V^+ に含まれ，他方の端点が V^- に含まれるようなリンクの集合（カットセット）を K とする．K に含まれるリンク e_k の回線速度 l_k の和が，V^+ の点と V^- の点の間の通信需要の総和以上であることは，回線候補が可能解であるための必要条件である．

$$\sum_{i\in V^+, j\in V^-} d_{ij} \le \sum_{e_k \in K} l_k$$

特に，一つのノードを他のすべてのノードと分けるカットセットを考えると，ノード v_i に隣接するすべてのリンク e_k の回線速度 l_k の和が，ノード v_i と他のノードとの間の通信需要の総和以上であるという条件になる．ノード v_i に隣接するすべてのリンク e_k の集合を A^i とすると，この条件は

$$\sum_{j=1}^{N} d_{ij} \le \sum_{e_k \in A^i} l_k$$

とかける．

5.2 半順序関係による候補の刈り込み

回線候補を探索するとき，明らかにこれまでに得た最適解（暫定最適解と呼ぶ）のコストよりもコストが高い候補については可解性を調べる必要はない．また次に述べるように，可解ではない回線候補と半順序関係にある回線候補は可解ではない．したがって探索の過程で暫定最適解と半順序関係を用いて候補を刈り込むことができる．

二つの回線候補

$$\pi_i = (l_{i1}, l_{i2}, \cdots, l_{iM})$$

$$\pi_j = (l_{j1}, l_{j2}, \cdots, l_{jM})$$

に対して半順序 $\prec$ を

$$\pi_i \prec \pi_j \Leftrightarrow l_{ik} \le l_{jk}, \quad k=1,2,\ldots,M$$

と定義する．π_j に対して可解ではないとき，$\pi_i \prec \pi_j$ となる π_i に対しても可解ではないという性質を利用して，ある回線候補が過去に探索した可解ではない候補と半順序関係にある場合は，その回線候補は可解ではないことが判定できる．（π_i に対して可解であるとき，$\pi_i \prec \pi_j$ となる π_j に対しても可解であると判定できるが，この場合 π_j は π_i よりコストが高くなるので暫定最適解で刈り込むことができる．）探索の過程で探索済みのすべての回線候補 π を記憶して半順序関係を調べる必要はなく，可解ではない回線候補の極大元を記憶するだけでよい．

可解ではない回線候補の極大元の集合を NG とする．ある回線候補 π に対して

$$NG_\pi^- = \{p \mid p \prec \pi,\ p \in NG\}$$

$$NG_\pi^+ = \{p \mid \pi \prec p,\ p \in NG\}$$

を定義する．最初 NG を空集合 $\emptyset$ にしておき，回線候補 π を次々に与えて可解性を調べる過程で次のようにして集合 NG を逐次求め，回線候補 π に対する可解性の判定を行う．

(i) $NG_\pi^+ = \emptyset$ のとき
π に対する可解性は不明である．単体法により可解ではないと判定されたとき，

$$NG \leftarrow NG - NG_\pi^-, \quad NG \leftarrow NG \cup \{\pi\}$$

(ii) $NG_\pi^+ \neq \emptyset$ のとき
π は可解ではない．

6 制約充足判定の高速化

単体法の双対定理により双対問題を解くことによっても，制約充足問題の可解性が判定できる．双対問題では過去に求めた実行可能解をそのまま利用できる性質を持つため，制約充足問題をそのまま解くよりも計算時間の点で有利である．

(4) 式の制約充足問題にダミーの目的関数を付加した次の最適化問題（<u>主問題</u>と呼ぶ）を考える．

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z = -\mathbf{c}^t\mathbf{x} \\ \text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \qquad (6)$$

ここで，

$$\mathbf{c} = [1/n, 2/n, \cdots, i/n, \cdots, 1]^t$$

とする．ダミーの目的関数の係数 $\mathbf{c}$ はどんな値でもよいが，双対問題に変形したときに退化[2]が起きないように選ぶ．

主問題 (6) 式に対する<u>双対問題</u>は

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_m]^t$$

とおいて，次式で与えられる．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & w = \mathbf{b}^t\mathbf{y} \\ \text{subject to} & -\mathbf{A}^t\mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{array} \qquad (7)$$

この双対問題は単体法で直ちに実行可能であり，単体法の双対定理により次のことが成り立つ [2]．

1. 双対問題 (7) に（有限の）最適解が存在するなら，主問題 (6) に実行可能解が存在する．すなわち制約充足解が存在する．

2. 双対問題 (7) が無限解を持つなら，主問題 (6) に実行可能解が存在しない．つまり制約充足解は存在しない．

ある回線候補に対して (7) 式の双対問題を解き，最適解を持つか無限解であるかによって，(6) 式の主問題の可解性を調べることができる．主問題 (6) を解く代わりに，その双対問題 (7) を解くことの利点は，新たな回線候補が与えられたとき，過去に求めた実行可能解をそのまま利用して再計算できる点にある．回線候補が変わると，主問題では (6) 式の条件式の定数項 $\mathbf{b}$ の値が変わるため，制約充足解の存在する領域が変化してしまう．しかし双対問題では $\mathbf{b}$ の値が変わっても，(7) 式の目的関数が変わるだけで条件式は全く変化しない．そのため回線候補が変わっても，過去の回線候補に対する双対問題の実行可能解から出発して単体法を適用することができ，回線速度の変更がわずかであるときは，双対問題を解くときの単体法の反復回数は少なくなる．

この方法は，制約条件を変更したときに以前の解を利用してわずかな反復回数で新たな解を求める「双対単体法」[2] の方法と類似している．双対単体法は，いくつかの条件式の全体が変更されたときの方法であり，ここでの方法は，定数項 $\mathbf{b}$ の変化しか起きないという特殊な場合に適用できる方法である．

---

[2]退化とは，実行可能解の 1 つ以上の基底変数が 0 になることである

7　実験と評価

図4のような27ノード，52リンクのネットワークを例題として用いた．図5に示した51のノード対が互いに通信し合う．このネットワークは図6のようにA,B,C,Dの4つの2連結成分に分けられる．パスは2連結成分内で中継ノードが2以下（リンクの数が3以下）になるものだけを与える．パスの総数は全体で204である．

初期設計解として手作業で設計した，木構造の（ただし2連結成分Bは木構造では解が存在しないのでループを許した）ネットワーク（図7）を与える．初期設計解よりもコストが低い回線候補を，図6に示すカットセットで刈り込みをしながら多数作成した．これらの回線候補を次々に与えて，可解性の判定をして最適な回線候補を選択した．表2は，探索の対象とした（初期設計解よりもコストが低く，カットセットの条件を満たす）回線候補の総数，探索の実行中に暫定最適解によって刈り込んだ候補の数と半順序関係によって刈り込んだ候補の数，単体法によって可解性を検査した候補の数，初期設計解のコスト及び最終的な設計解のコストを示す．カットセットや暫定最適解による刈り込みがかなり有効に働いた．一方半順序による刈り込みは2連結成分C,Dでは全く行われなかった．

最終的な設計解は図8に示すようなループを含む（迂回パスを用いた）ネットワークになっている．たとえば，福岡，大阪間では49chの通信需要に対して，福岡 - 大阪の直通パスに46ch，福岡 - 広島 - 大阪の迂回パスに3chを割り当てた設計を行っている．迂回パスを用いることにより，福岡，大阪間のリンクに48chの回線を使用し，一つ上の96chの回線の使用を避けていることがわかる．2連結成分A,Dについては別の実験ですべての回線候補を探索した結果，この設計解が大域的最適解になっていることを確認している（2連結成分B,Cについては規模が大きくなるので設計解が大域的最適解であるかどうかは確認できていない）．ネットワーク全体としては設計解のコストは初期設計解のコストより8.24%減少している．

次に，(6)式の主問題の制約充足解を求める場合と(7)式の双対問題を解く場合の単体法の計算時間を比較した．表3は2連結成分Bに対する計算時間の比較である．双対問題に変換すると行列のサイズが大きくなるため，初期解の作成には双対問題の方が時間を要するが，2回目以降は双対問題を解く方が平均計算時間は短く，約2倍高速であることがわかる．図3は100個の回線候補に対して主問題と双対問題の計算時間をプロットしたものである．ある回線候補については双対問題の方が主問題よりも計算時間がかかっているが，平均では，双対問題の計算時間が主問題よりも短くなっていることがわかる．尚，計算にはSun Sparc Station 1+を用いた．

8　あとがき

2連結成分を用いてグラフを分割する方法は問題を厳密に（近似ではなく）分割できるが，グラフが2連結成分になる条件が厳しいので，分割できる場合は限られている．近似的に部分問題に分解する他の手法が必要である．また，制約充足問題を双対問題に変換して解く手法は，変数の数が増えるという欠点はあるものの，計算時間の短縮が大きいので，繰り返し計算には威力を発揮した．実験に用いた例題よりも大きな問題に対しても同様の効果があるかどうか検討が必要である．本論文で述べた可解性の判定の高速化は，回線コストの最適化に限らず，設計条件を変更したときに設計解を即座に求めたいときにも応用できる．ネットワーク設計においては設計条件を修正しながら設計解をいくつも作って比較することが行われるから，この方法はネットワーク設計において有効に利用できるであろう．

参考文献

[1] D. Bertsekas, R. Gallager, *Data Networks*, Prentice-Hall,1987.（八星 監訳，「データネットワーク」，オーム社，1990）

[2] 今野 浩，「線形計画法」，日科技連,1987.

[3] 伊理，藤重，大山，「グラフ・ネットワーク・マトロイド」，産業図書,1986

表 2: 探索過程で刈り込んだ候補の数と設計解のコスト

2連結成分		A	B	C	D	全体
探索した候補の総数		5,131	8,616	7,361	91	21,199
刈り込み数	暫定解による	2,575	7,854	7,338	79	17,846
	半順序による	1,087	102	0	0	1,189
検査した数	可能解	9	13	11	3	36
	不能解	1,460	647	12	9	2,128
初期解のコスト		17,700	32,650	22,250	8,150	80,750
設計解のコスト		15,530	30,365	20,550	7,650	74,095
コストの減少率		12.3%	7.00%	7.64%	6.13%	8.24%

表 3: 行列のサイズと計算時間 (単位は 10msec)

	行列のサイズ (m × n)	平均計算時間	
		1回目	2回目以降
主問題	38 × 110	36	35
双対問題	132 × 171	492	16

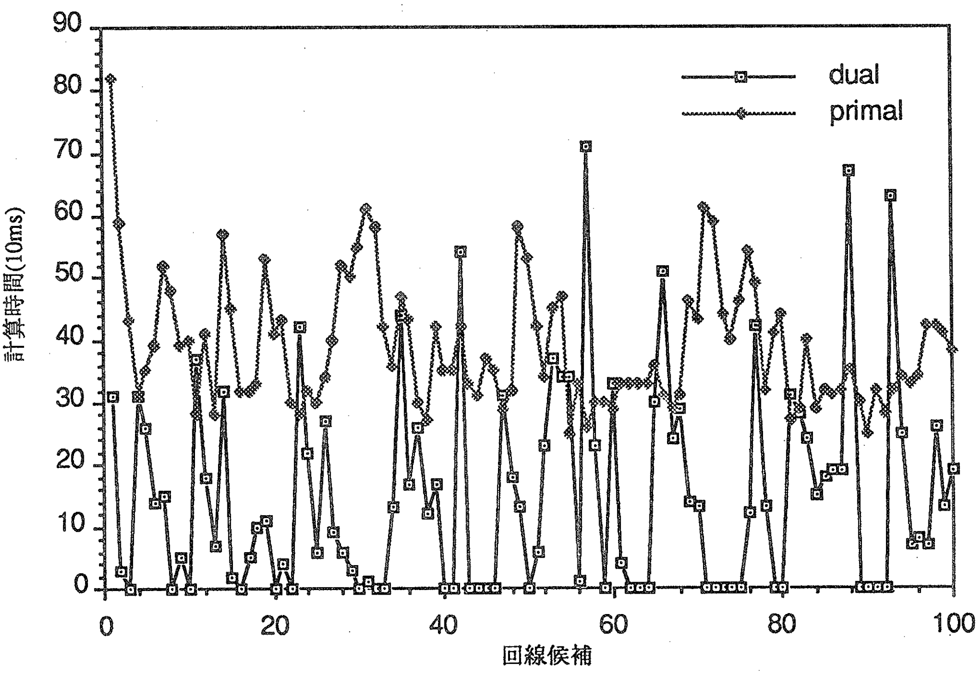

図 3: 主問題と双対問題の計算時間

点線は主問題，実線は双対問題の，一つの回線候補に対する計算時間 (単位は 10msec) である．

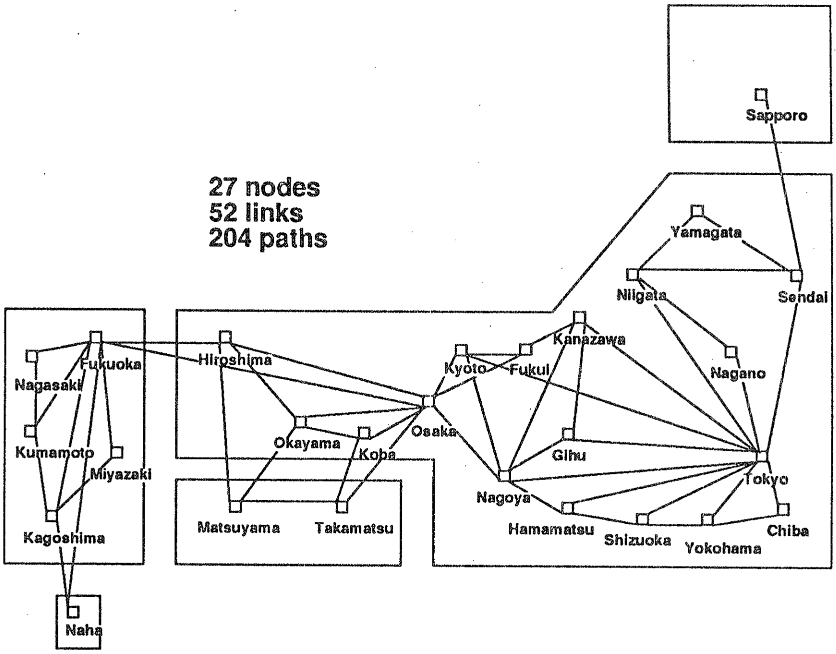

図 4: ネットワークのトポロジー

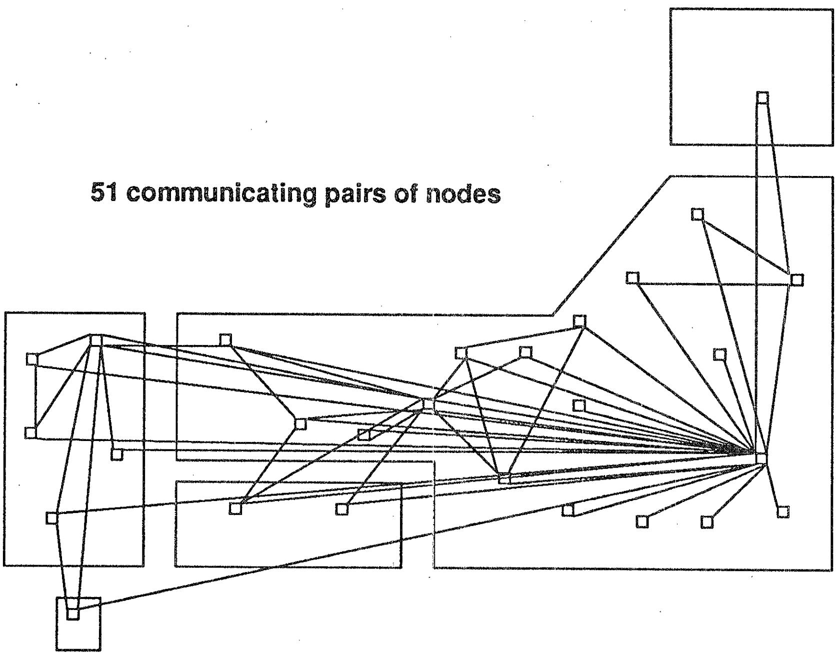

図 5: 互いに通信し合うノード対

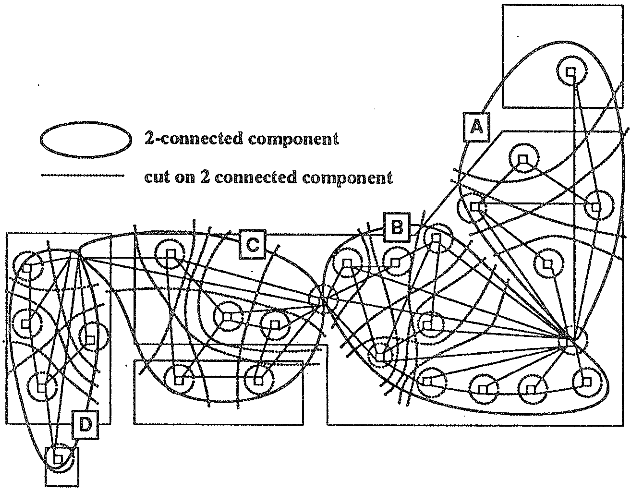

図 6: 2連結成分とカットセット

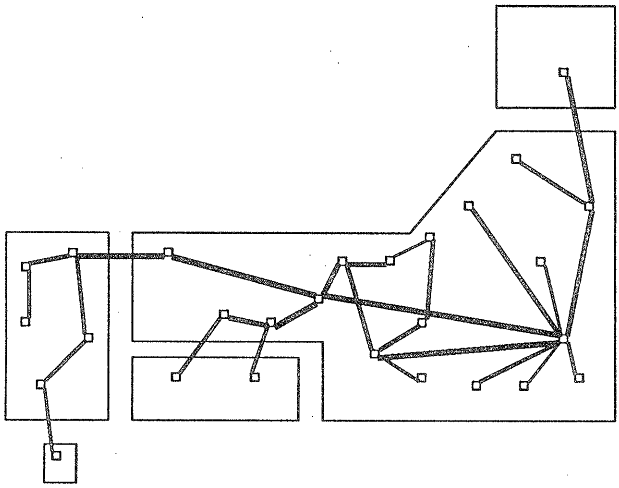

図 7: 初期設計解のネットワーク

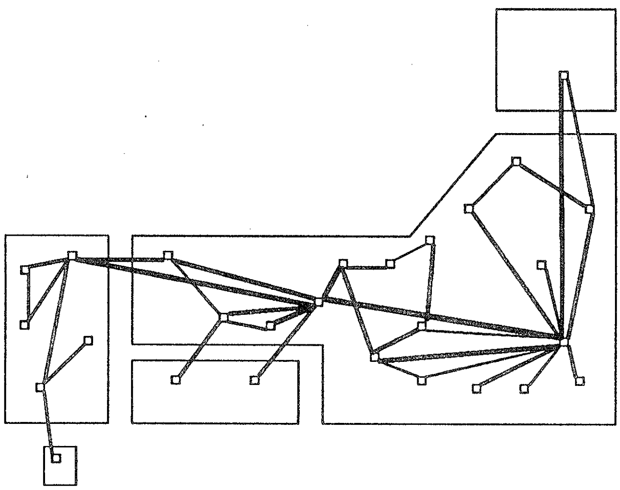

図 8: 設計解のネットワーク