解　説

適切さの論理†

沢 村 一††

1. はじめに

非古典論理は今日，古典論理に加えて，計算機科学や人工知能の研究において，記述と推論のための有効な道具あるいは研究方法論を提供するものと認識されるようになってきた[13,14,22,36,39]．

本稿では非古典論理の一つである適切さの論理 (Relevance logic, A logic of relevance あるいは Relevant logic) を取り上げる．適切さの論理は，論理学のいかなる体系においても最も重要な論理結合子であると考えられる「ならば」や推論の論理構造を再検討した（する）論理体系である[1,2,37]．扱われる論理的概念の重要性からいって，現代の数理論理学の歴史の表舞台に登場することがあまりなかったことが不思議なくらいである．

適切さの論理は最近計算機科学においても注目されてきた[44]．本稿では，この論理の基本概念を中心に概説する．また計算機科学における応用，意義にも触れる．

以下，2. で，適切さの論理の主要な考察の対象である論理結合子「ならば」を再考し，その研究の歴史に簡単に触れる．3. では，代表的な適切さの論理である体系Rとその周辺の体系を取り上げ，公理系と意味論を紹介する．4. では，最近始まったばかりの適切さの論理の計算機科学への応用を文献から拾って簡単に触れる．最後の章で，適切さの論理と他の論理との興味ある関係をみる．

2. 適切さの論理とは―論理結合子「ならば」再考―

記号論理学を習い始めていずれかの時点で古典論理の論理結合子「ならば」の意味に日常的直観との食い違いによる違和感を経験した人は少なからずいるはずである．適切さの論理は論理結合子「ならば」の意味に関する違和を取り除くために考え出されてきた論理である．言い換えると，この論理の主題は，たとえば命題“$A \supset B$”において結論 B に対する前提 A の“適切さ”を問題にすることにある．そして「ならば」とは何かを改めて分析することによって古典論理からの逸脱を図っている（それゆえ，この論理は Non-classical logic, Nonstandard logic あるいは Deviant logic[17] の一つといわれる）．形式的には，以下に述べるような含意に関する違和 (Fallacy) を拒否をすることによって（直観主義がそうであるのと同じ意味において）古典論理の部分体系となっている．

2.1 論理結合子「ならば」の違和について

われわれが通常の古典論理学で慣れ親しんでいる論理結合子「ならば」あるいは「含意」の真理関数的な意味は，“$A \supset B$ が真であるとは A が真で B が偽であることはない，あるいは A が偽であるか B が真であるときである”であった．このような含意は実質含意 (Material implication) と呼ばれる（単純含意と呼ばれることもある[41]）．この実質含意は日常言語の「ならば」とほぼ同じ意味を有するが，いくつかの点で違和を感じるところがある．その違和を分類すると，

① 関連性の違和
② 恒真性の違和
③ 偶然性の違和

の三つに分類される[41]．このうち，偶然性の違和は様相概念に関連して生ずる違和であるが，本稿では，この違和を議論しない（詳しくは文献[2,37,41]を見られたい）．以下では，前二者について説明する．

関連性の違和

関連性の違和とは，含意の前件と後件の間に内容的な関連のないことによる違和である．その典型的な例が次の添加法則 (Positive paradox とも呼ばれる) である．

$$A \supset (B \supset A)$$

この論理式において A が真であれば，$B \supset A$ は真で

† Relevance Logic by Hajime SAWAMURA (International Institute for Advanced Study of Social Information Science, FUJITSU LIMITED).

†† 富士通(株)国際情報社会科学研究所

ある．しかし B は任意の論理式でよいから内容的に A と無関係な式でもよい．たとえば，命題

雪は白い⊃2+3=5

は古典論理的には正しいが，日常言語としては奇異な命題である．古典論理では命題を構成する部分の真理値の論理的関係を論じており，命題の内容には関係しないためにこのような関連性の違和が生じる結果となったのである．

恒真性の違和

実質含意では，後件が真であれば前件はいかなる式であってもよい．またこれは双対的に前件が偽であれば後件は任意の式であってよい．前者，後者の例はそれぞれ次の式にみられる．

$B \supset \neg A \vee A$

$\neg A \wedge A \supset B$

2.2 「含意」研究の簡単な歴史

以上のような含意に関する違和を論理体系より排除しようとする研究は，一部の論理学者によってかなり古い時期から行われてきた．たとえば，1932年，現代の様相論理学の創始者の一人である Lewis は添加法則の違和を除去するために，

$A \rightarrow B =_{df} \Box(A \supset B)$

によって定義される厳密含意 (Strict implication)[25]，"→"，を導入した．しかしながら，違和を全面的に除くには至らなかった．1956年，Ackermann は厳格含意 (Strenge Implikation, Rigorous implication)[1] を次の意図のもとに導入した：厳格含意 $A \rightarrow B$ は B の内容が A の内容の部分であり，かつそれは A と B の真理値とはなんらの関係をもたないような A と B の間の論理的な結びつきを表現するものである．これはその後の適切さの論理の研究の古典的なお手本となり，Anderson は Ackermann の厳格含意を Entailment（限定含意と訳されている[41]）と呼んでいる[2]．限定含意は含意に関する違和をすべて排除した論理学であり，これに対して実質含意はこれらの違和をことごとく許容している．この両者の中間に厳密含意がある．したがって，以上述べた三つの含意：限定含意，厳密含意，実質含意，は以下のように一つの系列をなす：

限定含意(厳格含意)⊂厳密含意⊂実質含意.

1975年，Anderson と Belnap は，限定含意およびそれの種々のバリエーションに関するその時点までの研究の成果を集大成した[2]．この本は命題論理が中心であるが，適切さの論理や Entailment に関する唯一の総合的な入門書となっている（McRobbie によると適切さの論理のその後の発展については近くボリュームIIとして出版されるとのことである）．

今日，限定含意，厳密含意を扱う論理は総称的に適切さの論理と呼ばれている（"Relevance" は "Entailment" の概念の一部であるとか，あるいは独立な概念であるというような議論もあるがここではそれには立ち入らないことにする）．適切さの論理では，前提が結論に対して適切であること，すなわち前提と結論の意味の間になんらかの結びつきが存在すべきであることを公理的および意味論的に特徴づける研究が行われている．もちろん適切さの定義によっていろいろな論理体系があり得る．たとえば，Belnap[4] は，含意命題「A ならば B」において A が B に対して適切であるための必要条件は A と B がある命題変数を共有することであるとしている（次章でこの条件をある適切さの論理が満たすことに言及する）．共通にいえることは，適切さの論理では含意の意味をもはや伝統的な真理関数的方法と同じ方法で与えることはできないということである（このことは直観主義論理の事情と似ている．すなわち，そこでは論理結合子の意味は "真" 概念に代わって "証明" 概念で説明される．適切さの論理でそれに相当するのは "適切さ" ということになろう）．

今日の適切さの論理の研究は，Lewis, Ackermann による胎動期を経て，Dunn, Meyer, Belnap, Routley, Urquhart らによって理論および哲学の両面から精力的に進められており[37]，また計算機科学への応用および計算機科学からの影響もみられるようになってきた[10),44]．

2.3 伝統的論理学における含意問題の位置づけ

適切さの論理は推論とは何かという論理学の根本問題を扱う．実際それは形式論理学が論理学の根本原理としてあげているものにもはっきり現れているものである．ちなみにそれは次の4つの原理を意味する[18]：

① 同一性の原理 (Principle of identity)
② 矛盾の原理 (Principle of contradiction)
③ 排中の原理 (Principle of excluded middle)
④ 充足理由の原理 (Principle of sufficient reason)

ここで，最初の三つは互いに相表裏して同一の事態を表現しかえしたものであり，すでにアリストテレスにおいてもみられるものである．これに対して最後の原理は Leibniz が唱えて以来形式論理学のうちにも取り入れられたものであり，その意味するところは

「すべての思考にはそれなりの十分な理由がなければならない」とする思考の根拠と帰結の依存関係に関わる原理である．一般に思考の依存関係を表すものは，含意命題(仮言判断)と推論であるので，充足理由の原理は含意命題と推論の基本法則とみることができる．したがって，本稿で扱う論理はまさにこの原理に関わる論理学の一分野であると位置づけることができる．

ついでながら，これらの原理をどのように解釈するかによって，あるいは他の原理によって置き換えることによってこれまでの論理がどのような変更を受けるかについてここで簡単に触れておこう．直観主義が③の原理を拒否していることはよく知られている．また，①—③をすべて他の原理で置き換えようとする試みは統計科学の著作にみられる[21]．

3. 適切さの論理の形式的体系と意味論

この章では，代表的な適切さの命題論理を中心としてその証明論とモデル論を簡単に述べ，違和を取り除いた形式的体系がどのようなものかを説明する．

今日の代表的な適切さの論理の論理体系として，Anderson と Belnap の体系EとRがもっともよく知られている[2),12]．Rは適切な含意の体系であり，Eは限定含意 (Entailment) の体系である．体系Eは体系Rと，前提の結論に対する適切さに加えて必然であることを負わせている点において異なっている．この点でEは適切さの論理であるのと同時に様相論理でもある[2),12]．本章では，適切さの部分にのみ焦点を当てて議論するつもりであるので適切さの論理のパラダイムとして，体系Rに主に関心を払うことにする．他の論理系と同様，Rの公理的提示の仕方にもこれまで，Hilbert 型，Gentzen 型，Tableau 型がすでに知られている．ここでは Hilbert 型の適切さの論理体系Rを取り上げる．

3.1 R の証明論

Rは前章で述べた違和のうち関連性の違和と恒真性の違和を取り除いた体系である（ちなみに，体系E[2),41]と体系 Π'[1] はすべての違和を取り除いた体系である)．言語としては命題言語を仮定する．ただし，実質含意に対しては記号“⊃”を，適切さの論理における含意に対しては記号“→”を用い区別する．体系Rは次のように段階的に定義される[12]．

適切さの論理体系R

公理図式

(1) $A \to A$ (Self-Implication)

(2) $(A \to B) \to [(C \to A) \to (C \to B)]$ (Prefixing)

(3) $[A \to (A \to B)] \to (A \to B)$ (Contraction)

(4) $[A \to (B \to C)] \to [B \to (A \to C)]$ (Permutation)

なお(2)～(4)はそれぞれ次の公理図式(2′)～(4′)で自由に置き換えることができる[12]．

(2′) $(A \to B) \to [(B \to C) \to (A \to C)]$ (Suffixing)

(3′) $[A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$ (Self-Distribution)

(4′) $A \to [(A \to B) \to B]$ (Assertion)

(5) $A \land B \to A$, $A \land B \to B$ (Conjunction Elimination)

(6) $[(A \to B) \land (A \to C)] \to (A \to B \land C)$ (Conjunction Introduction)

(7) $A \to A \lor B$, $B \to B \lor A$ (Disjunction Introduction)

(8) $[(A \to C) \land (B \to C)] \to (A \lor B \to C)$ (Disjunction Elimination)

(9) $A \land (B \lor C) \to (A \land B) \lor C$ (Distribution)

(10) $(A \to \neg A) \to \neg A$ (Reductio)

(11) $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ (Contraposition)

(12) $\neg\neg A \to A$ (Double Negation)

定義

$A \circ B =_{df} \neg(A \to \neg B)$ (Fusion)

推論図式

$\dfrac{A \quad A \to B}{B}$(Modus Ponens), $\dfrac{A \quad B}{A \land B}$(Adjunction)

(1)～(4)はRの含意断片 (implicational fragment) $R_{\to}$ の公理である．このとき，Rの他の断片 R^+, LR は次のように定義される部分クラスである．

$R^+ = R_{\to} \cup \{(5) \sim (9)\}$

$LR = R - \{(9)\}$

以上は適切さの命題論理であったが，参考のために適切さの述語論理の公理系にも触れておく．適切さの述語論理 RQ は R に次の公理，推論規則を追加することで構成される．ただし言語は自由変数，束縛変数を区別する一階言語を仮定する（これにより，以下の(14), (15)において A に対する変数条件を省略できる)，また存在限量子は通常のように $\exists x A =_{df} \neg \forall x \neg A$ として定義する．

(13) $\forall x A \to A(a/x)$ ($\forall$-Elimination)

(14) $\forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B)$ ($\forall$-Elimination)

(15) $\forall x(A \lor B) \to A \lor \forall x B$ (Confinement)

$\dfrac{A(a/x)}{\forall x A}$(Generalization)

ただし，a は自由変数，x は束縛変数である．

2. で“適切さ”の条件を非形式的に述べた．体系Rの適切さを特徴づけるメタ定理としてはいくつか知られているが，もっとも代表的と思われるものをみてみよう．次の定理はRが適切さの必要条件として前に述べた変数の共有性 (Variable Sharing Property) をもつことを形式的に表現している．

定理 (Belnap[2),4)]). $A \to B$ がRの定理ならば，A と B の両方に出現するようなある命題変数が存在する．

別の見方をすれば，この共有変数の存在は，適切な含意命題の前提と結論の間の意味のある種の共有性を表すものと解釈することができるであろう．

3.2 R のモデル論

前節では含意の違和を導出しない公理系を導入した．この節ではそのような体系から導かれる論理式を解釈するモデルについて説明する．

一般に論理系は代数系と同じような構造をもつことが多い（たとえば，直観主義命題論理と擬ブール代数，様相命題論理 S4 と位相束など）．適切さの論理Rに対応する代数系はド・モルガンモノイド (de Morgan monoid)[2),12)] と呼ばれる．ここではそれに基づく代数的意味論について簡単に述べる．ここで考える体系Rには公理 $A \leftrightarrow (t \to A)$ によって規定される命題定数 t が含まれるものとする（このようなRは元のRの保存拡大となっている[12)]）．

定義（ド・モルガン束）．

構造 $(L, \wedge, \vee, \neg)$ は次の条件を満たすとき，ド・モルガン束 (de Morgan lattice) と呼ばれる．

（1） $(L, \wedge, \vee)$ は分配束である

（2） $\neg$ はド・モルガン補元と呼ばれ，次の性質を満たす：任意の a, $b \in L$ に対して

（a） $a \leqq \neg b \Rightarrow b \leqq \neg a$,

（b） $\neg a \leqq \neg b \Rightarrow b \leqq a$（あるいは，$\neg\neg a \leqq a$）．

ただし，$\leqq$ は束における順序を表す．

定義（ド・モルガンモノイド）．

ド・モルガンモノイド (de Morgan monoid)$\mathcal{D}=(D, \wedge, \vee, \neg, \circ, e)$ は以下の条件を満たす構造である．

（1） $(D, \wedge, \vee, \neg)$ はド・モルガン束である

（2） $(D, \circ, e)$ はアーベリアンモノイド (Abelian monoid)，ただし $\circ$ は D 上の結合律，可換律を満たす2項演算，$e \in D$ は単位元である

（3） 任意の $a, b, c \in D$ に対して，
$a \circ (b \vee c) = (a \circ b) \vee (a \circ c)$

（4） 任意の $a \in D$ に対して，$a \leqq a \circ a$

（5） 任意の $a, b, c \in D$ に対して，
$a \circ b \leqq c \Rightarrow a \circ \neg c \leqq \neg b$.

定義．任意の a, $b \in D$ に対して，
$a \to b =_{df} \neg(a \circ \neg b)$.

定義（付値）．

論理式Aのド・モルガンモノイド $\mathcal{D}=(D, \wedge, \vee, \neg, \circ, e)$ 上の付値 (valuation) を次のように定義する．

（1） A が命題変数あるいは命題定数 t ならば，
$v(A) \in D$，あるいは $v(t)=e$

（2） A が形式 $\neg B$ であれば，
$v(\neg A) = \neg v(A)$

（3） A が形式 $B \wedge C$ であれば，
$v(B \wedge C) = v(B) \wedge v(C)$

（4） A が形式 $B \vee C$ であれば，
$v(B \vee C) = v(B) \vee v(C)$

（5） A が形式 $B \to C$ であれば，
$v(B \to C) = v(B) \to v(C)$

ただし，右辺に現れる演算子はド・モルガンモノイドにおける演算記号である．

定義（妥当性）．

A は，すべてのド・モルガンモノイドにおける任意の付値 v に対して，$v(A) \geqq e$ ならば妥当であるといい，$\models A$ と書く．

簡単な例として，R の公理である $A \to A$ の妥当性を以下に検証してみよう．

$v(A) \leqq v(A)$（束の順序の公理）
$e \circ v(A) \leqq v(A)$（単位元の性質）
$v(A) \circ e \leqq v(A)$（可換律）
$v(A) \circ \neg v(A) \leqq \neg e$
（ド・モルガンモノイドの条件（5））
$e \leqq \neg(v(A) \circ \neg v(A))$（ド・モルガン束の条件（a））
$e \leqq v(A) \to v(A)$（$\to$ の定義）
$e \leqq v(A \to A)$（付値の定義）．

定理（Rの健全性，完全性）[2),12)]．
$\vdash_R A \to B \Leftrightarrow \models A \to B$.

適切さの論理の形式的意味論としてはこのほかに，様相論理の意味論と類似した Kripke 型の意味論の研究も知られている[12),37)]．この中で，本稿の焦点である“$\to$”の意味づけをこれまでとは異なった視点から行っている研究に言及しておく．

（1） 作用的意味論 (Urquhart による)[12)]

K を情報の片からなる集合，$\circ$ を情報の片を結合するオペレーションとする．このとき，“$\to$”の意味は次

のように規定される.

$$x \vDash A \rightarrow B \Leftrightarrow \forall y \in K(y \vDash A \Rightarrow x \circ y \vDash B)$$

このような意味論は半束意味論 (Semi-lattice semantics)[12),45)] とも呼ばれ，並行プログラムの論理の中ですでに用いられている[10)].

(2) 関係意味論 (Routley & Meyer による)[12)]

Rを情報の片の集合 K 上の3項の可達関係 (accessibility relation) とする．このとき，“→” の意味は次のように規定される．

$$x \vDash A \rightarrow B \Leftrightarrow \forall y, z \in K$$
$$(Rxyz \text{ かつ } y \vDash A \text{ ならば } z \vDash B)$$

この意味論では，様相論理の場合と同様，Rの条件により種々の適切さの論理が特徴づけられる[12)].

以上述べた形式的意味論が含意命題における“適切さ”をどのような意味において表現しているかについての哲学的な議論にも興味がもたれるところであるが，これ以上立ち入らない（詳しくは文献[37)]を見よ).“適切さ”をよりよく説明する今後の意味論の展開に興味がもたれる.

4. 計算機科学と適切さの論理

計算機科学における重要な研究活動の一つに形式化された計算，言い方を変えると論理，の発明と応用がある．これらはアルゴリズム，プログラム，システムあるいはさらに複雑な言語的対象などを表現したり，その性質などを論証したりするのに用いられる[13),14),22),36),39)]．適切さの論理もまた最近計算機科学の問題に対してその有用性が認識されてきた論理の一つである．適切さの論理が考察の対象とする概念の重要性から，現在の論理学的方法論の補完にとどまらず，今後この論理は新しい情報処理の概念の創出にもその潜在性を期待してよいものと考える.

ここでは，適切さの論理が計算機科学において果たす役割と利用などを文献をとおして拾ってみよう.

(1) 質問応答システムの論理としての適切さの論理

Belnap[5)] は，データベース中の小さな矛盾が（恒真性の違和によって）不適切な結論を導かないよう，質問応答システム（広義には計算機あるいは情報処理）の論理として興味深い4値論理を提案している．この4値論理の4値，{T, F, Both, None}，は計算機がある原子文に関して取る認知的状態（Tは文が真であると告げられた状態，Fは文が偽であると告げられた状態，Both は真偽の両方であると告げられた状態，None はそのいずれでもないと告げられた状態）を表す．これはド・モルガン束を形成し，適切さの論理Rの部分体系である R_{fde} (first-degree implicational fragment と呼ばれ，$A \rightarrow B$ という形式のRの論理式からなる部分クラス，ただし，A および B には “→” は含まれない）のモデルになっている[12)].

(2) 演繹的論証の論理的基礎としての適切さの論理

計算機科学において扱われる対象はわれわれの実世界の本性に密接に関連した情報や知識である．したがって，計算機科学において用いられる論理はわれわれの日常の論理的思考に合ったものであるべきであると考えるのは自然である．Cheng はこのような観点より，計算機科学のための演繹的論理としては Entailment logic[26)] あるいは適切さの論理をその基礎におくべきであることを提案している[7)]（少し脱線するが，このような立場と異なり，より自由な対象認識に立った研究もある．すなわち，これらの論理以外にも，考察の対象とされる議論領域に適した論理系を定義し，定義された論理系の下での論証を可能にする研究である[31),38)]).

(3) 適切さの論理のための決定手続き，自動証明法/証明コンストラクタ

適切さの論理のための決定手続きは一般に悲観的である．たとえば，次のような事実が知られている.

「適切さの命題論理RおよびEは決定不能である」
(Urquhart, A., 1982)[46)].

「RQ の単項の述語論理は決定不能である」
(Meyer 1968)[12)].

したがって，決定可能なクラスの抽出あるいは対話型の証明コンストラクタの研究が重要になってくる．代表的な決定可能なクラスとして LR[42),44)] が知られており，モデル刈り取り法[28)]など，効率的な証明手続きの研究が盛んに行われている[42)~44)]．また，非古典論理は多値論理であるという立場から，適切さの論理を含めた非古典論理のための一般的な証明手続きの研究も進められている[28),44)].

適切さの論理のための証明コンストラクタの研究はまだないようであるが，論理の定義をすることが可能な汎用の論証支援システムでそれを扱おうとする研究がある[31),38)].

(4) 述語論理ハッカ

文献 34)では，騎士と悪漢のパズルを題材に，一階論理の弱点の一つである，含意の前提が偽ならば常に

真である現象（2. であげた恒真性の違和）を克服する述語論理ハッカトリックが議論されている．そこでは，適切さの論理が問題にする前提と結論の意味論的関連性を意図した問題の形式化によってパズルが解かれている．

（5） 並行プログラムの論理と適切さの論理

一般に，通信し合う並行プログラム（システム）の性質を証明するための証明体系を形式化するさいに問題になるのは，並行システムをその部分から全体へと論証していくことが可能な証明体系（この性質を合成可能性 (compositionality) という）をつくるのが難しいということである．たとえば，$p \vdash A$ を“A が p に関して証明可能”ということを表すものとするとき，ただし，p は Milner の CCS や SCCS[40] におけるプロセス，A は論理式を表す．次の形式の推論を可能にする2項関係＊を見出すことはほとんど期待できない[12),40)]．

$$\frac{p \vdash A \quad q \vdash B}{p \| q \vdash A * B}$$

ここで，$\|$ は並行オペレータを表す．この問題に対して，Stirling[40] は様相論理を，Dam[10] は適切さの論理を基礎とした並行プログラムの論理を提案している．

Cheng[7] は演繹的推論に基づいた並行プログラムのデバッギングに Entailment logic[26] が有用であることを示唆している．

（6） 非単調推論の基礎となる論理としての適切さの論理

適切さの論理の Gentzen の LK 型の体系では，次のような Thinning あるいは Weakening といわれる推論規則は許容されない（これを認めると含意の違和が容易に導出されてしまう）[12),44)]．

$$\frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A, B \vdash C}$$

すなわち，適切さの論理では，上式 $\Gamma, A \vdash C$ が成り立つとき，結論 C に不適切な前提 B を加えると，下式 $\Gamma, A, B \vdash C$ の成立は保証されない．このように適切さの論理は非単調性をすでに内在している論理であるといえよう．

このほかに，適切さの論理を基に Prolog を拡張した Relevant Prolog[6]，部分対象の意味や論理の構築に適切さの論理を考慮した研究[23]，信念の論理と適切さの論理の密接な関係を明らかにした研究[24] などがある．

5. 他の論理との関係

適切さの論理が，無数にある現代の論理体系の中で他の論理とどのような関係，位置にあるかをみておくことは適切さの論理の理解にもつながる．この章では表層的であるがいくつかの興味あるポイントに触れる．

◇構成的論理における「含意」の解釈

構成主義における“⊃”の一つの解釈は次のように定義される：含意命題 $p \supset q$ を証明（推論）できるのは，p の任意の証明を q の証明へと変換する方法を示すことができるときに，そしてそのときに限る．この定義の下で，たとえば，適切さの論理で拒否される典型的な論理式 $p \supset (q \supset p)$ の構成的な解釈を考えてみよう．まず，p の証明 P_p が与えられたと仮定する．このとき，q の任意の証明 P_q を p の証明へと変換するには P_q に P_p を単に繋げればそれは p の証明となる．このようにして，もし p の証明が与えられたとするならば，それを $(q \supset p)$ の証明へと変換することができる．以上の説明は $p \supset (q \supset p)$ が証明可能であることとの十分な根拠となっているので，$p \supset (q \supset p)$ は証明可能であると主張できる．Martin-Löf[26] ふうに表現すると，

$$\lambda P_p \lambda P_q . P_q \circ P_p \in p \supset (q \supset p)$$

と書ける，ただし記号“∘”は証明の結合を表す*．

◇各種論理の含意断片間の包含関係

論理結合子として含意のみを含み，推論規則はモーダスポネンスおよび代入規則，公理は次のものからなる直観主義の体系 (IL) を考える[8]．

（I） $A \to A$

（C） $[A \to (B \to C)] \to [B \to (A \to C)]$

（B） $(A \to B) \to [(C \to A) \to (C \to B)]$

（K） $A \to (B \to A)$

（S） $[A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$

ここで，I，C，B，K，S は組合せ論理の結合子の名前であり，それらは対応する論理式とそれを型とする組合せ論理の項あるいはラムダ計算の項との間の密接な対応に由来している[9]．たとえば，公理 $A \to (B \to A)$ は結合子K，あるいはそれと同等なラムダ式

* この議論に関連して，査読者は次のようにコメントしている：“q の証明を 0 個 p の証明に繋ぐことは構成的論理における含意の解釈では許されているが，これを許さないことにすると，Weakening の規則をもたない論理における含意の解釈が得られる”．適切さの論理が Weakening の規則をもたないことは前章(6)で指摘した．これらのことから，証明の結合と仮定の結論に対する適切さは密接な関係にあることが分かる．

$(\lambda x^{A} \lambda y^{B} x^{A})^{A \to (B \to A)}$ に対応する．

このとき，この体系と適切さの論理 $R_{\to}$，直観主義的線形論理 ILL[16]，BCK 論理[34]の間には次の包含関係が成り立つ[20]．

$$\mathrm{ILL} \begin{array}{c} \subset R_{\to} \subset \\ \\ \subset \mathrm{BCK} \subset \end{array} \mathrm{IL}$$

ここで各論理の公理は次のようになっている．

$R_{\to}$ = {(B), (C), (I), (S)}

ILL = {(B), (C), (I)}

BCK = {(B), (C), (K)}

IL = {(S), (K)} あるいは {(B), (C), (I), (K), (S)}（組合せ論理では結合子 B, C, I はSとKから定義されることに注意されたい）．

また，適切さの体系 LR と並列性の研究の論理的基礎として Girard によって提案された古典線形論理 LL[15] との間には次の関係があることが知られている[3),28]．

LR − W = LL

ここで，W は先にあげた Contraction の公理を表す（Contraction のない論理についての研究は文献[34]を見られたい）．

◇結合子と適切な推論の関係[29]

ここでは別の観点から，適切さの論理と結合子の関係をみる．自然演繹型の論理体系では，一時的な仮定の導入あるいは仮定の使用（除去）に関する情報，言い換えると，論理式が依存する仮定 (dependency) を推論の進行とともに保持，管理していく機構が必要になる．ここでは，論理式の仮定依存性の計算方法を結合子によって規定していくような自然演繹型の適切さの体系の興味ある形式化の一端をみる．推論の対象となる式は次のような Tag と称する仮定をともなった論理式である．

Tag ⇒ Formula

このとき，Rの自然演繹型の形式化における含意の導入 (→I)，除去規則 (→E) は次のようになる．

$$(\to \mathrm{I})\,\frac{\begin{array}{c}\alpha \Rightarrow A \\ \vdots \\ \beta\alpha \Rightarrow B\end{array}}{\beta \Rightarrow A \to B} \qquad (\to \mathrm{E})\,\frac{\begin{array}{c}\alpha \Rightarrow A \to B \\ \beta \Rightarrow A\end{array}}{\alpha\beta \Rightarrow B}$$

（規則 (→I) の Tag には，B が依存する仮定に必ず A の仮定が含まれていることが要求されている，すなわち，それによって A からの B の導出が適切であることが表現されている）．

たとえば，入れ換えの公理の導出は次のように進行する．

1.	$\alpha \Rightarrow [A \to (B \to C)]$	仮定
2.	$\beta \Rightarrow [B]$	仮定
3.	$\gamma \Rightarrow [A]$	仮定
4.	$\alpha\gamma \Rightarrow B \to C$	→E 1, 3
5.	$(\alpha\gamma)\beta \Rightarrow C$	→E 2, 4
6.	$(\alpha\beta)\gamma \Rightarrow C$	Tag 規則 C5
7.	$\alpha\beta \Rightarrow A \to C$	→I 3, 6
8.	$\alpha \Rightarrow B \to (A \to C)$	→I 2, 7
9.	$\Rightarrow [A \to (B \to C)] \to [B \to (A \to C)]$	→I 8

ここで，Tag 規則 C とは組合せ論理における結合子 C の定義，$C\alpha\beta\gamma = \alpha\gamma\beta$，に対応する次の変形規則である．

$$\frac{(\alpha\beta)\gamma \Rightarrow A}{(\alpha\gamma)\beta \Rightarrow A}$$

このような Tag 規則によって，自然演繹型の種々の適切さの論理が特徴づけられることが知られている[30]．

6. むすび

適切さの論理の一端について概説した．筆者の力不足と紙面の都合上から触れられなかった重要な話題が多い（特に，Ackermann の規則 γ (disjunctive syllogism) の許容可能性，適切さの論理の演繹定理，適切さの論理の自然演繹型，Sequent 型および Tableau 型の公理体系，限定含意の論理体系 Π'[1]，E（含意に適切さだけでなく必然性を負わせた体系）[2]，決定手続き，さまざまな意味論，反事実条件文の論理[11]との関係など）．これらと適切さの論理の応用に関するより突っ込んだ議論については別の機会に譲りたい．

適切さの論理はその統語論，意味論の両面において，現在もなお活発に研究されている分野である．同時に，その計算機科学への応用も開始され，適切さの論理は今後の新しい情報処理の論理として期待がかけられるようになってきた．今後の展開が楽しみな論理の一つである．

他方，適切さの論理を，個々の論理を一般的な枠組みの中で捉えることを目的とする論理の一般理論の研究[19),31),38]の立場でみるならば，それがもつ論理構造の多様性により，それは多くの考慮すべき話題を提供してくれる大変面白い論理であるといえる．

この拙文をきっかけに，適切さの論理が考察の対象とする問題の重要性を認識し，さらにその潜在性に期待しつつ，この論理とその応用に興味をもっていただければ，望外の喜びである．

謝辞 本解説をまとめるに当たり，いろいろな方方からのご協力をいただいた．特に，Dr. McRobbie と Dr. Meyer（オーストラリヤ国立大学）には Relevance logic 一般についてご教示いただき，また貴重なコメントをいただいた．小野寛晰教授（広島大学），前田隆講師（北海道大学），Cheng 氏（清華大学）からは関連する論文をご提供していただいた．ここに記して感謝の意を表したい．また共同研究者である南俊朗氏（富士通国際研）には日頃の絶えまない議論に対し感謝したい．最後に，いくつかの不正確な点を指摘し，貴重なコメントをくださった査読者に感謝する．

参 考 文 献

1) Ackermann, W.: Begründung einer strenger Implikation, JSL 21, pp. 113-128 (1956).
2) Anderson, A. R. and Belnap, N. D. Jr.: Entailment: The Logic of Relevance and Necessity, Vol. 1, Princeton Univ. Press (1975).
3) Avron, A.: The Semantics and Proof Theory of Linear Logic, TCS 57, pp. 161-184 (1988).
4) Belnap, N. D. Jr.: Entailment and Relevance, JSL 25, pp. 144-146 (1960).
5) Belnap, N. D. Jr.: A Useful Four-Valued Logic, in Dunn, J. M. and Epstein, G. (eds.), Modern Uses of Multiple-Valued Logic, pp. 5-37, D. Reidel Pub. Company (1977).
6) Bollen, A. W.: A Relevant Extension to PROLOG, TR-ARP-15/87, Australian National Univ. (1987).
7) Cheng, J. (程京徳): Entailment as a Logical Basis for Deductive Reasoning, Symp. on Mathematical Methods in Software Science and Engineering, RIMS, Kyoto Univ. (1988).
8) Church, A.: Introduction to Mathematical Logic, Vol. 1, Princeton Univ. Press (1956).
9) Curry, H. B. and Feys, R.: Combinatory Logic, Vol. 1, North Holland (1958).
10) Dam, M.: Relevance Logic and Concurrent Composition, 4th LICS, IEEE, pp. 178-185 (1987).
11) Delgrande, J. P.: An Approach to Default Reasoning Based on a First-Order Conditional Logic: Revised Report, Artificial Intelligence 36, pp. 63-90 (1988).
12) Dunn, J. M.: Relevance Logic and Entailment, in Gabbay, D. and Guenthner, F. (eds.), Handbook of Philosophical Logic, Vol. Ⅲ, pp. 117-224, D. Reidel Pub. Company (1986).
13) Galton, A. (ed.): Temporal Logics, Academic Press (1987).
14) Genesereth, M. R. and Nilsson, N. J.: Logical Foundation of Artificial Intelligence, Morgan Kaufmann Publishers, Inc. (1987).
15) Girard, J. Y.: Linear Logic, TCS 57, pp. 1-102 (1987).
16) Girard, J. Y.: Linear Logic and Lazy Computation, LNCS 250, pp. 52-66 (1987).
17) Haack, S.: Deviant Logic, Cambridge Univ. Press (1974).
18) 原　佑：論理学，東大出版会 (1974).
19) Harper, R., Honsell, F. and Plotkin, G.: A Framework for Defining Logics, 3rd LICS, IEEE, pp. 194-204 (1987).
20) Hindley, J. R.: Principal Type-Scheme and Condensed Detachment, submitted to JSL (1987).
21) 北川敏男：統計情報論Ⅰ，共立出版 (1987).
22) Kröger, F.: Temporal Logic of Programs, Springer-Verlag (1988).
23) Landman, F.: Towards a Theory of Information, Foris Publications (1986).
24) Levesque, H. J.: A Logic of Implicit and Explicit Belief, AAAI-84, pp. 198-202 (1984).
25) Lewis, C. I. and Langford, C. M.: Symbolic Logic, The Century Co. (1932).
26) Lin, B.: Entailment System—Propositional Calculus System Cm and Notational Calculus System Cm (an appendix in Lin, B.: Entailment Logic—The Combination of Traditional Logic and Modern Logic, Guizhon, 1985 (in Chinese)).
27) Martin-Löf, P.: Intuitionistic Type Theory, Bibliopolis, Naples (1984).
28) McRobbie, M. A., Meyer, R. K. and Thistlewaite, P. B.: Towards Efficient Knowledge-Based Automated Theorem Proving for Non-Standard Logics, Technical Report TR-ARP-5/87, Australian National University (1987).
29) McRobbie, M. A.: An Elementary Introduction to Non-Standard Logics, CADE-9 Tutorial (1988).
30) Meyer, R. K.: Private communication (1988).
31) Minami, T., Sawamura, H., Satoh, K. and Tsuchiya, K.: EUODHILOS: A General-Purpose Reasoning Assistant System—Concept and Implementation—, to appear in LNCS, Springer (1988).
32) Morgan, C. G.: Methods for Automated Theorem Proving in Nonclassical Logics, IEEE Transactions on Computers, Vol. C-25, No. 8, pp. 852-862 (1976).
33) Morgan, C. G.: Semantic Discovery for Relevance Logics, Technical Report, Univ. of Victoria.
34) Olhbach, M. J.: Predicate Logic Hacker Tri-

cks, J. of Automated Reasoning, Vol. 1, pp. 435-440 (1985).

35) Ono, M. and Komori, Y.: Logics without the Contraction Rule, JSL 50, pp. 169-201 (1985).

36) Ramsay, A.: Formal Methods in Artificial Intelligence, Cambridge Univ. Press (1988).

37) Routley, R., Meyer, R. K., Plumwood, V. and Brady, R.: Relevant Logics and Their Rivals, Part I: The Basic Philosophical and Semantical Theory, Ridgeview, Atascadero, California (1987).

38) Sawamura, H., Minami, T., Satoh, K. and Tsuchiya, K.: Potentials of General-Purpose Reasoning Assistant System EUODHILOS, Symp. on Mathematical Methods in Software Science and Engineering, RIMS, Kyoto Univ. (1988).

39) Smets, P., Mamdani, A., Dubois, D. and Prade, H. (eds.): Non-Standard Logics for Automated Reasoning, Academic Press (1988).

40) Stirling, C.: Modal Logics for Communicating Systems, TCS 49, pp. 311-347 (1987).

41) 杉原丈夫：非古典論理学，槇書店 (1975).

42) Thistlewaite, P. B., Meyer, R. K. and McRobbie, M. A.: Automated Theorem-Proving Techniques for Relevant Logic, Logique et Analyse 28, pp. 233-256 (1985).

43) Thistlewaite, P. B., McRobbie, M. A. and Meyer, R. K.: The KRIPKE Automated Theorem Proving System, LNCS 230, pp. 705-706 (1986).

44) Thistlewaite, P. B., Meyer, R. K., McRobbie, M. A.: Automated Theorem-Proving in Non-Classical Logics, Pitman (1988).

45) Urquhart., A.: Semantics for Relevant Logics, JSL 37, pp. 159-169 (1972).

46) Urquhart, A.: The Undecidability of Entailment and Relevant Implication, JSL 49, pp. 1059-1073 (1984).

(平成元年2月27日受付)