知能と複雑系　131－2
(2003. 1. 29)

マルチフラクタル性を示すマーケットシミュレーション

山崎　和子† KennethJ. Mackin†

† 東京情報大学
E-mail: †yamasaki@rsch.tuis.ac.jp

あらまし MMARモデル (multifractal model of asset returns) [2], [3], [5] はマルチフラクタル性を持ち、投機市場における多くの重要なスタイライズドファクトを再現する。この論文では、MMARモデルを導出できるような、ミクロモデル（市場シミュレーションモデル）を作り、実験を行った。導出されたマクロモデルおよび市場シミュレーションモデルで、マルチフラクタルスペクトラムや、収益率の累積分布、自己相関関数などを求め、比較を行った。

キーワード 投機市場、マーケットシミュレーション、マルチフラクタル、マクロモデル、ミクロモデル

Market Simulation in which Multifractality appears

Kazuko YAMASAKI† and Kenneth J. MACKIN†

† Tokyo University of Information Sciences
E-mail: †yamasaki@rsch.tuis.ac.jp

Abstract The MMAR model(multifractal model of asset returns) [2], [3], [5] shows multifractality and reproduces a lot of important stylized facts. In this paper, we studied a micro model(market simulation model) that can extract the MMAR model. We calculated multifractal spectrum, cumulative distribution of return and autocorrelation function of both micro and macro model,and compared them.

Key words speculative market, market simulation, multifractal, macro model, micro model

1. 研究の背景

投機市場におけるスタイライズドファクト

近年、株式市場、為替市場、商品市場などの投機市場の多量のデータが、比較的簡単に利用できるようになった。ティックデータと呼ばれる日中の取引時間、取引値、取引量を含んだデータのみならず、オーダーブックと呼ばれる板の情報が、現在、研究の対象になっている。それらの詳細な解析より、投機市場に共通のスタイライズドファクトと呼ばれる、いくつかの性質が明らかになってきた。それらのうちいくつかを述べると、

- 収益率の分布が広い裾野を持ち、べき乗則に従う。(ファットテール)
- 収益率の自己相関関数はすぐ減衰するが (ショートメモリー)、収益率の非線形関数は長い記憶を持つ。(ロングメモリー)
- 価格や出来高の時間変化のグラフで、時間のスケールを変えても同じように見える。(フラクタル)

最近では、さらに、マルチフラクタル性を持つことを、様々なデータで実証した研究 [1], [3], [6] が多く見られる。

市場のマルチエージェントシミュレーション

これまでに、非常に多くの研究が、これらのスタイライズドファクトを市場のシミュレーションで再現しようとした。しかし、我々の知るところでは、現在のところ、これらの多くの事実を、矛盾なく再現し、投機市場のメカニズムを、多くの人が納得するように示した研究は存在しない。また、個々のシミュレーションが大変複雑になり、シミュレーションの結果とそれを生じさせる原因との対応がつきにくくなってきた。さらに、それが、実際の市場をどれだけ近く表現しているのかについての尺度が、現在のところ存在しない。また、スケールインバリアントな性質（フラクタル性）は、非常に重要な性質と思われるが、ほとんどのマルチエージェントのシミュレーションがこれを再現していない。このような状況の中で、我々は、次章で述べるような、問題意識に基づいて研究を行った。

2. 研究の目的

ミクロモデルからマクロモデルの導出

この論文では、ミクロモデルとは、エージェントの個別の量、(例えば、トレーダーの売買判断のパラメーターのようなエージェントのサフィックスを持つ量) を含むモデルを言い、マクロモデルとは、価格、出来高のような市場全体の量のみで表されたモデルを言う。

経済物理の分野において、ミクロなモデルからマクロなモデル

を導出することの重要性は、はじめ高安ら [7] によって強調された。マクロモデルの例としては、よく知られた GARCH やフラクショナルブラウン運動（FMB）などの確率微分方程式があげられる。しかし、表に見るように GARCH や FMB は、スタイライズドファクトのうち、その一部しか再現しない。

	GARCH	FBM($H \neq 0.5$)	MMAR
フラクタル性	no	yes	yes
ロングメモリー	no	yes	yes
ショートメモリー	yes	no	yes

B.Mandelbrot によって提案された、MMAR モデル [2], [3], [5] は、多くのスタイライズドファクトを再現することができる。さらに、派生証券の理論の土台となっているマルチンゲールの性質を持つこともできる。しかし、例えば、

（1） トレーダーのどういう行動が、市場のどういう性質が、どういうお金の流れが、マルチフラクタル性を生じさせるか、時間スケールの階層を作るか。

（2） フラクタル性、ロングメモリー、ファットテールは独立の事象か、1つの事象の異なる側面を見ているのか。

などは論じられていない。それらの問いに対してなんらかの見通しを得るために、MMAR モデルを導出できるミクロモデルを作り、実際の市場と対応させることにした。

MMAR モデル

MMAR モデルは以下の式で表される。

$$\log P(t) - \log P(0) = B_H[\theta(t)] \qquad (1)$$

ここで $B_H(t)$ はパラメター H(セルフアフィン指数) を持つ、フラクショナルブラウン運動、$\theta(t)$ は、確率的取引時間であり、マルチフラクタル測度の累積分布関数である。（取引時間とは、絶対的時間間隔ではなしに、取引がおきたごとにカウントされる時間尺度のことである。）

マルチフラクタル測度の例は、

$$\mu = \prod_{k=0}^{K} M_k \qquad (2)$$

ここで $M_k = M(\eta_1, \eta_2, ...\eta_k)$ は、k 番目の時間スケールで変化する確率変数である。$B_H(t)$ と $\theta(t)$ は 独立であると仮定されている。

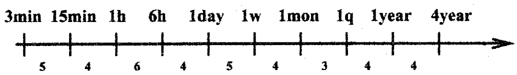
このモデルの意味は、各取引ごとに、価格はフラクショナルブラウン運動をするのだが、取引は同じ時間間隔毎に行われるのではなく、取引時間がフラクタル性を示し（極端に単位時間当りの取引回数の多い時や少ない時などが出現する）、しかも確率的である、ということを表す。

3. モ デ ル

このモデルでは、多少の現実性を犠牲にして、マクロモデルが解析的に導出できることを主眼に置く。

時間階層

我々の生活は、様々な時間の階層から成り立っている。



フラクタルに必要な時間階層を、それぞれの階層での情報がになっていると考える。トレーダはこれらの情報に基づき売買の判断を行う。このモデルでは、この情報は、外生的なもの（例えば、モデルに含まれない、GNP などのマクロ指標の値など）とする。なぜなら、先に示したように MMAR モデルでは、株価と売買時間は独立であり、このために、トレーダの売買判断が取引時間を決めるとすると、MMAR モデルを導出のためには、トレーダーの売買判断に株価を参照できないからである。

トレーダーの判断

M_k を情報 k の強さとする。トレーダの売買戦略が複数の情報の 論理積 と 論理和 による組合せ

$((M_1$ and $M_2)$ or M_3) and (M_4 or M_5) and M_6

によって決定されるとする。これらは部分的に and のみの並びを or で 結合した並びに、書き換えることができる。

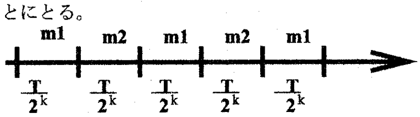
(M_1 and M_2 and M_4 and M_6) or

(M_3 and M_4 and M_6) or etc.

トレーダは、ある単位時間（絶対時間間隔）の間に、情報の強さ に比例した確率に比例した回数、1株づつ、売買注文を出すとする。ここでは、買注文と売注文を区別しない。情報の強さ M_k を確率変数とし、そのサンプル値を m_k とする。1人のトレーダが売買注文を出す確率を以下のように定める。

$$\begin{aligned}
\mu_i(t) &= \sum_{j=1}^{n_i} M_1 M_{02} M_{03} M_{04} M_5 M_{06} M_7 M_8 ....M_K \\
&= \sum_{j=1}^{n_i} \prod_{k=0}^{K} M_{0k}^{1-h_{i,k}} M_k^{h_{i,k}} \\
h_i &= (h_{i,1}, h_{i,2}, ...) = (0,0,0,1,0,0,1,0...) \\
&\sum_{k=1}^{K} h_{i,k} = Kz
\end{aligned} \qquad (3)$$

ここで、K は、時間階層の数で、トレーダが利用可能な情報をそれぞれ 1 個含む。n_i は、トレーダの論理和 に よって結合された、論理積 のみの並びの数である。以後、簡単のため $n_i = 1$ と置く。また、トレーダは、K 個の情報をすべて利用するのではなく、h の成分が 1 の情報のみ利用する。h は z 個の 1 を含む。従って、それぞれのトレーダは、Kz 個の情報を参照する。M_{0k} は ダミーの確率変数で、常に値 $m_0 = 0.5$ をとる。M_k は $m_1 = 0.9$ と $m_2 = 0.1$ をランダムな順序で、時間間隔 $\frac{T}{2K}$ ごとにとる。



このような、ダミーの確率変数を用いたモデルもマルチフラクタルを示すということを、Appendix に示す。

市場価格

トレーダは 、(3) 式に従って売買注文を出し、それがすべて取引されるとする。したがって、市場全体で、単位時間中の取引回数、および出来高は、以下の式に比例する。

$$\mu(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mu_i(t) \tag{4}$$

ここで、N はトレーダの数である。MMAR モデルと同様に、取引時間の目盛りを取引が起きた時にとり、従って、取引時間は取引回数に比例する。価格は、単位時間中に、この取引回数だけ、フラクショナルブラウン運動をするものとする。ここでは、$H=0.5$ のブラウン運動とした。つまり、トレーダが売買注文を出す時、値を現在値の近辺に、集団として見れば、確率的にだしているとする。

4. ミクロモデルの導出

単位時間での取引回数（出来高）$\mu(t)$ より、ホールダー指数、スケーリング関数およびマルチフラクタルスペクトラムが以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}\mu(t) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\prod_{k=0}^{K} M_{0k}^{1-h_{i,k}} M_k^{h_{i,k}} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\prod_{k=0}^{K}\sum_{h_k=0}^{1}\delta(h_{i,k}-h_k) M_{0k}^{1-h_k} M_k^{h_k} \\ &= \sum_{h_1=0}^{1}\sum_{h_2=0}^{1}\sum_{h_3=0}^{1}\rho(h_1,h_2,h_3,...)\prod_{k=0}^{K} M_{0k}^{1-h_k} M_k^{h_k}\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\rho(h_1,h_2,h_3,...) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\prod_{k=0}^{K}\delta(h_{i,k}-h_k) \\ &\underset{N\to\infty}{\sim} \prod_{k=0}^{K}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(h_{i,k}-h_k) = \prod_{k=0}^{K}\rho(h_k)\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\rho(1) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(h_{i,k}-1) = z \\ \rho(0) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(h_{i,k}) = 1-z\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\mu(t) &= \prod_{k=0}^{K}\sum_{h_k=0}\rho(h_k) M_{0k}^{1-h_k} M_k^{h_k} \\ &= \prod_{k=0}^{K}(M_{0k}(1-z)+M_k z)\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\mu_n &= (m_0(1-z)+m_1 z)^n (m_0(1-z)+m_2 z)^{(K-n)} \\ N_n &= {}_K C_n\end{aligned} \tag{9}$$

ホルダー指数

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\log(\mu_n)}{\log 2^{-K}} = -\frac{n}{K}\alpha_1 - (1-\frac{n}{K})\alpha_2 \\ \alpha_1 &= \log_2(m_0(1-z)+m_1 z) \\ \alpha_2 &= \log_2(m_0(1-z)+m_2 z)\end{aligned} \tag{10}$$

スケーリング関数($K >> 1$ の時)

$$\begin{aligned}\tau_\theta(q) &= -\log_2[(m_0(1-z)+m_1 z)^q + (m_0(1-z)+m_2 z)^q] \quad \text{(取引回数)} \\ \tau(q) &= H(\tau_\theta(q)+1)-1 \quad \text{(収益率)}\end{aligned} \tag{11}$$

マルチフラクタルスペクトラム($K >> 1$ の時)

$$\begin{aligned}f_\theta(\alpha) &= \frac{\log(N_n)}{\log(2^K)} \quad \text{(取引回数)} \\ &= -\frac{\alpha-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}\log_2(\frac{\alpha-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}) - \frac{\alpha_1-\alpha}{\alpha_1-\alpha_2}\log_2(\frac{\alpha_1-\alpha}{\alpha_1-\alpha_2}) \\ f(\alpha) &= f_\theta(\alpha/H) \quad \text{(収益率)}\end{aligned} \tag{12}$$

5. 実　　験

ミクロモデルとマクロモデルの実験の結果を示す。マルチフラクタルの解析で、通常のモーメント推定は、誤差が多いという研究もあるのでので、ここでは、MF_DFA（multiftactal detrended method）[4] を用いた。

実験で用いたパラメータは $N=1000, K=50, T=10000, m_1=0.9, m_2=0.1, z=0.1$ である。

図 1 は、市場シミュレーションのスタイライズドファクトを示す。図 2 上は、取引回数 (左) および収益率 (右) の絶対値の q 乗モーメントを $log-log$ スケールで表したものである。よく直線にのり、フラクタル性を示している。図 2 中は取引回数 (左) および収益率 (右) のスケーリング関数を示している。ランダムウオーク、マクロモデル、市場シミュレーションとだんだんマルチフラクタル性が強くなっているのが解る。図 2 下は、マルチフラクタルスペクトラムを表す。グラフの左右では、q の絶対値の大きいところがきいてくるので、マクロモデルとランダムウオークの違いは小さく見える。市場シミュレーションは、はっきりマルチフラクタル性を保っている。(ランダムウオークがモノフラクタルになっていないのは、乱数および MF_DFA の精度を程度を表す。)

6. 結　　論

市場シミュレーション（トレーダの個別のパラメータを含むモデル）から、マクロモデル（価格など市場全体の量のみを含むモデル）を、トレーダの数 N と時間の階層の数 K が充分大きい場合に、導いた。導出したマクロモデルは、$N >> 1, K >> 1$ の場合でも、マルチフラクタル性を示す。また、以下の問いに対して、このモデルでの解答を得た。

（1）　トレーダーのどういう行動が、市場のどういう性質が、どういうお金の流れが、マルチフラクタル性を生じさせるか、時間スケールの階層を作るか。

（2）フラクタル性、ロングメモリー、ファットテールは独立の事象か、1 つの事象の異なる側面を見ているのか。

（1）　我々の生活には、多くの時間階層がある。それらの階層からの情報のいくつかをトレーダが売買判断に用いれば (論理積の形で)、集団として多くの時間階層の情報を用いるこ

とになり、これにより、マルチフラクタル性が生ずる。また、市場価格は、1 回 1 回の取引においては、現在値のまわりでランダムに決まる。

（2） このモデルでは、フラクタル性の起源は、外部情報の階層性にある。ロングメモリーの起源は、長い時間階層の情報を参照していることにあり、生の収益率がショートメモリーを示すのは、価格が取引時間に対してブラウン運動をしているからである。

MMAR モデルは、マルチンゲールとロングメモリーが両立する（$H = 0.5$ の場合）という興味深い特徴がある。また、市場価格は取引時間で見るとフラクショナルブラウン運動をし、取引時間がマルチフラクタル性を持つという、非常に魅力的なモデルである。解析的なモデルが表現できることには、やはり限界があり、それですべてが表現できるとは思わないが、何らかの本質が含まれていると期待される。しかし、MMAR モデルは、なぜ取引時間がマルチフラクタル性を持つかなど、ミクロモデルからの説明はされていないので、この論文ではそれを試みた。このモデルは MMAR モデルを導出できる市場シミュレーションモデルの 1 例に過ぎないが、市場の本質を探る上で 1 つの参考になると思う。

また、ただ現実にあわせようと複雑なシミュレーションをやるのではなしに、解析的なモデル、見通しのよい簡単なモデルを基にして、市場シミュレーションによって、現実に近づくというのは有効な研究の方法だと思う。

付　録

1 部の時間階層のみの確率変数からなるマルチフラクタルカスケード

マルチフラクタル測度はダミー確率変数 M_{0k} を用いて次のように書ける。

$$\mu(t) = \prod_{k=0}^{K} M_{0k}^{1-h_k} M_k^{h_k} \qquad \text{(A·1)}$$
$$\mu_n = m_0^{K-Kz} m_1^n m_2^{Kz-n}$$

これから、ホルダー指数、スケーリング関数、マルチフラクタルスペクトラムは以下のように計算できる。

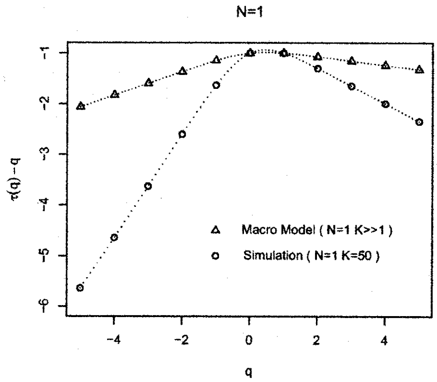
$$\alpha = \frac{\log(\mu_n)}{\log 2^{-K}} = \alpha_0 + \frac{n}{Kz}\alpha_1 + (1 - \frac{n}{Kz})\alpha_2$$
$$\alpha_0 = -(1-z)\log_2(m_0) \qquad \text{(A·2)}$$
$$\alpha_1 = -z\log_2(m_1) \qquad \alpha_2 = -z\log_2(m_2)$$

$K >> 1$ の時

$$\tau(q) = -q(1-z)\log_2(m_0) - z\log_2(m_1^q + m_2^q) + z - 1 \qquad \text{(A·3)}$$

$$f(\alpha) = \frac{\log(N_n)}{\log(2^K)}$$
$$= 1 - z - \frac{\alpha - \alpha_2 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_2}\log_2(\frac{\alpha - \alpha_2 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_2}) \qquad \text{(A·4)}$$
$$- \frac{\alpha_1 - \alpha - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_2}\log_2(\frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_0})$$

これらの計算の結果 ($K >> 1$) と、シミュレーションの結果 ($K = 50$) を図 A·1 に示す。



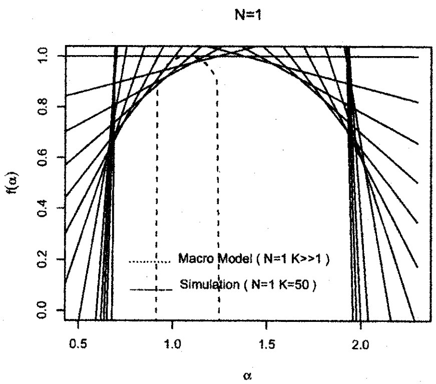


図 A·1　1 部の時間階層のみの確率変数からなるマルチフラクタルカスケード

文　献

[1] M. Ausloos and I. Ivanova. *Comput. Phys. Commun*, 147.

[2] L. Calvet, A. Fisher, and B. Mandelbrot. Large deviations and distribution of prive changes. Yale university working paper.

[3] A. Fisher, L. Calvet, and B. Mandelbrot. Multifractality of deutschmark/usdollar exchange rate. Yale university working paper.

[4] J.W. Kantelhardt, S. Zschiegner, E. Koscielny-Bunde, S. Havlin, A. Bunde, and H.E. Stanley. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A*, 316.

[5] B. Mandelbrot, A. Fisher, and L. Calvet. A multifractal model of asset returns. Yale university working paper.

[6] Ashkenazy Y. Stanley H.E. Marita, K. Multifractal properties of price fluctuations of stocks and commodities. Technical report.

[7] A. Sato and H. Takayasu. Dynamic numerical models of stock market price - from microspic determinism to macroscopic randomness. *Physica A*, 250.

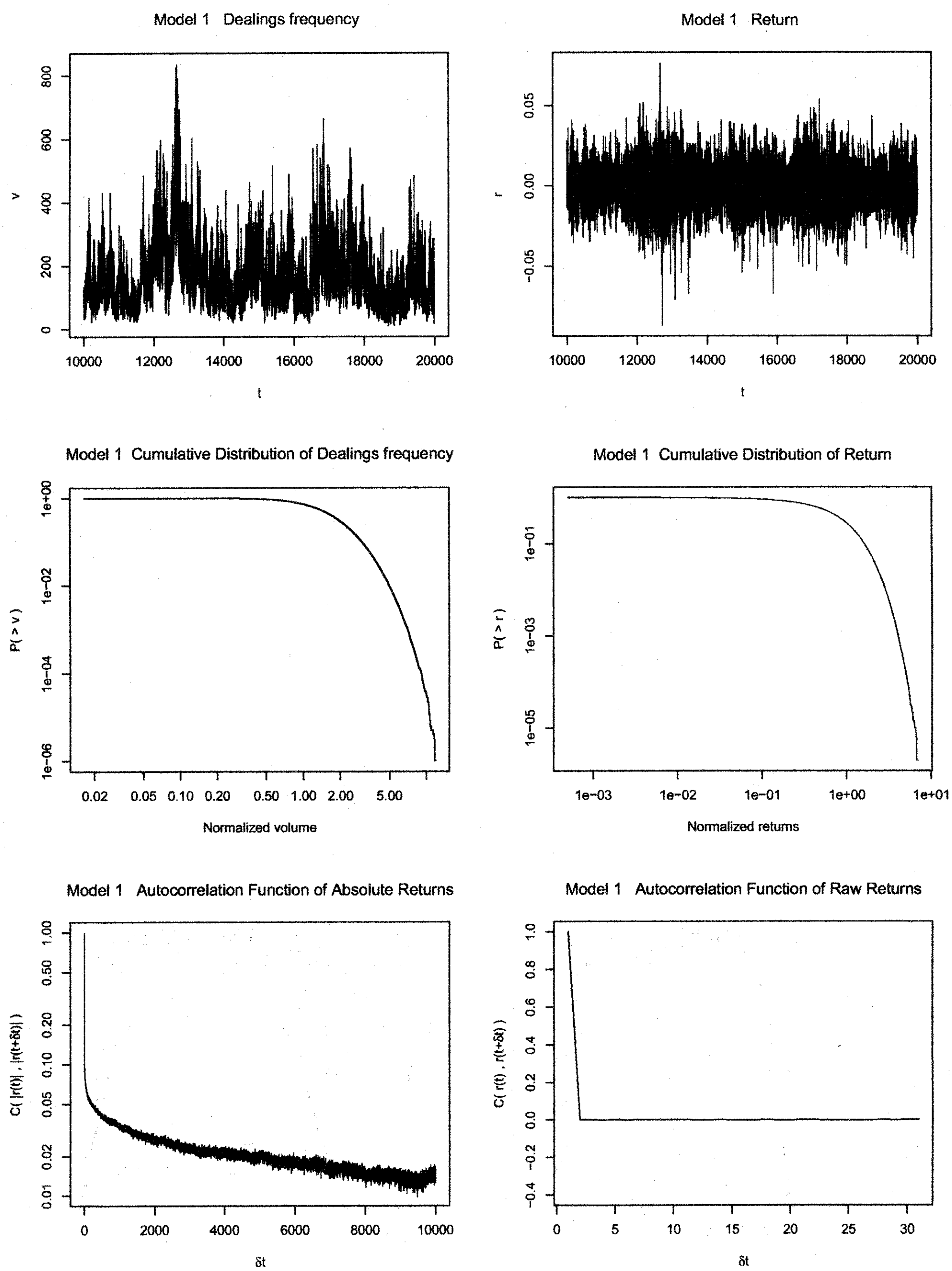


図1 スタイライズドファクト (市場シミュレーション)

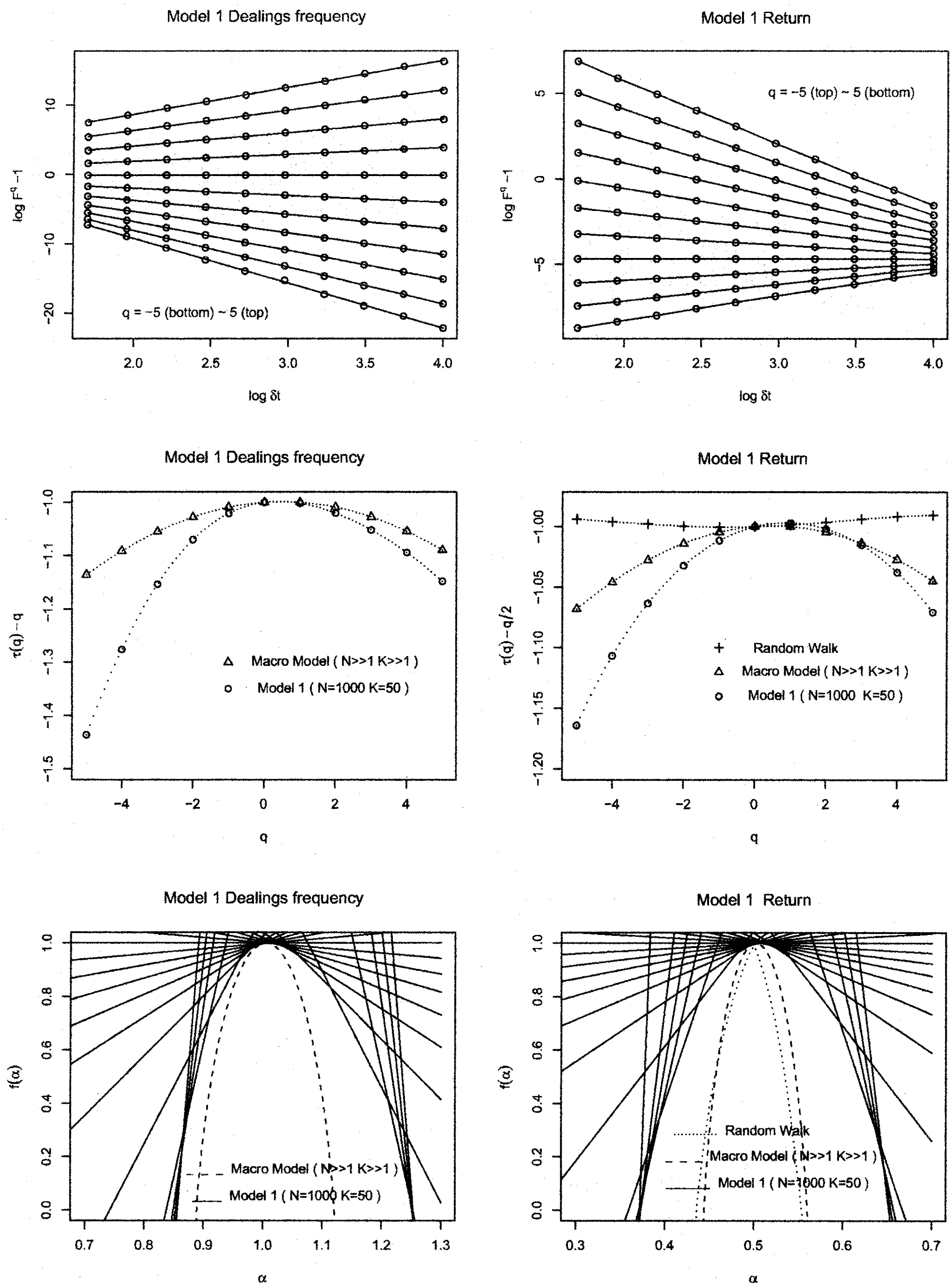


図 2　マルチフラクタル性を示す指標
市場シミュレーションとマクロモデル、およびランダムウオークの比較