ゲーム理論によるリスクとリターンの総合的評価法について

松崎雄大* 豊田規人*
北海道情報大学経営情報学部†

株価変動の本質的振る舞いは大きく分けると安定，振動減衰，暴落，振動発散の４つに分類出来る．その４つの特徴を良く捉えた高安らのモデルを用いて，２証券ずつ，３証券ずつ，４証券全ての組み合わせでポートフォリオリスク，ポートフォリオリターンを評価した．そして各証券の組み合わせを短期売却か長期売却（長期投資）のどちらに向いているかを分類し考察した．論文の後半ではポートフォリオリスク，ポートフォリオリターンに着目する割合と投資比率の双方をゲーム理論的手法で総合的に判断出来る評価法を提案する．そして混合戦略で，短期売却か長期売却のどちらに向いているかを分類し考察した．

A method for synthetic estimation of risk and return based on Game Theory

Yuudai Matsuzaki, Norihito Toyota
Hokkaido Information University (business administration and information science)

The essential behaviors of stock fluctuations are classified into 4 forms; stable, damped vibration, heavy fall, forced vibration. We estimated the portfolio risk and the portfolio return for every 2 stocks, 3 stocks and 4 stocks by using the model proposed Takayasu et al. that represents the 4 features well. We investigate whether the combinations of stocks are suitable for a sale of short term or a sale of long term (a long term investment). In the latter half of our paper, we propose a method for a synthetic estimation of both the portfolio risk and the portfolio return by using Game Theory. We investigate whether the combinations of stocks are suitable for a sale of short term or a sale of long term by considering mixed strategies in Nash equilibrium.

1 はじめに

株価は絶えず変動し，日によって数百倍になったりする場合もあるなど，価格変動は激しく複雑である．この株価変動を含めた価格変動の性質は，先人達の研究によって少しずつ解明されつつある**[1],[2],[3],[5]**．株価変動を予測出来れば損をするか得をするかが分かるが，実際は株価変動の予測は困難である．そこで複数の株を考えると，ある証券の価格が急に下落（あるいは上昇）しても，他のある証券の価格が急に下落（あるいは上昇）しない場合がある．従って様々な証券へ分散投資すれば，株価変動による損（リターン）や得（リスク）が相殺され，リターンは減るがリスクは少なくてすむ場合があるであろう．しかし，通常のポートフォリオ理論ではリスクとリターンは独立に評価されており，リスクとリターンのどちらに着目すべきなのかという判断は売買する人の主観的判断に任せる形になる．この判断が合理的か否かの判断は難しいであろう．

株価変動の本質的振る舞いは大きく分けると安定，振動減衰，暴落（バブル），振動発散の４つに分類出来る．株価変動の予測が困難なので，株価変動のこれら４つの特徴を持つ高安らの株価変動モデルを本論文では用いることにする．論文の前半では，株価変動の４つの特徴を２，３，４証券の組み合わせでポートフォリオリスク，ポートフォリオリターンを評価する．観察時間や投資比率を変化させることによって，長期売却に向いているか短期売却をしなければ損をするのかを分析する．

リスクとリターンを総合的に評価するために，本論文ではゲーム理論を導入する．論文の後半ではポートフォリオリスク，ポートフォリオリターンに着目する割合と投資比率の双方をゲーム理論的手法**[6],[7],[8]**で同時に判断出来る評価法を提案する．それを元に，長期売却に向いているか短期売却をしなければ損をするのかを議論する．

*matsuzakiyuudai@do-johodai.ac.jp
† 北海道江別市西野幌 59-2　北海道情報大学経営情報学部

2 仮想均衡価格と株価変動モデル

売り手と買い手が自由に参加出来，互いの合意で取引価格を決定するような市場（オープンマーケット）で売買を繰り返す売買人（以下ディーラー）は，自分が取り引きしたいと考える売値と買値，変動する価格とを随時比較し，売り買いの取引をしている．ディーラーそれぞれが取り引きしたいと考える価格（指値）と量を全て知ることが出来るとすれば一般に，価格がいくらであればどれだけの量を売る，または買うという取引についての一覧表は作成可能であろう．この一覧表を「板情報」または「板」と呼んでいる**[1],[2],[3]**．板情報の概念図を図１で表す．図１は縦軸が量，横軸が指値である．縦軸は正方向が買いの量，負方向が売りの量，０にある場合は売りと買いの量が０であることをそれぞれ表している．一般にディーラーはある価格以上で一定量を買い,ある価格以下で一定量を売ると心に決めて取引をするので,階段状のグラフになる．しかし，ディーラーの数が十分に多ければ図１のような曲線になることが期待出来る．一般にディーラーは安い価格で買い,高い価格で売るので,板情報は図 1 のような右下がりの特性を持つ．図１で売りの価格と買いの価格とが等しくなり，かつ希望量が０のときの価格がある．これを仮想均衡価格 $x^*(t)$と呼ぶ **[1],[2],[3]**．図１の $x(t)$は時刻 t における株価であり，$x^*(t)$は時刻 t における仮想均衡価格である．仮想均衡価格が株価よ

り大きければ，株を購入するディーラーが潜在的に多いと期待出来る．逆に仮想均衡価格が株価より小さければ，株を売却するディーラーが潜在的に多いと期待出来る．株を購入する量が増加すれば市場に出回る量が減少するので，その後の株価は上昇する傾向にあるであろうし，逆に株を売却する量が増加すれば市場に出回る量が増加するので株価は下降する傾向にあるであろう**[1],[2]**．このことから，次の取引の株価 $x(t+\Delta t)$ が仮想均衡価格 $x^*(t)$ に近付きながら変動する**[1],[2],[3]**．仮想均衡価格は板情報を滑らかにした曲線によって決定されるが，ひとりひとりのディーラーは株価の変動に応じて自分の指値と量を変えていく**[1],[2]**．例えば株価が上がった場合，今まで売り注文をしていなかったディーラーが売り注文をするようになると期待出来る．同様に，株価が下がった場合，今まで買い注文をしていなかったディーラーが買い注文をすると期待出来る．つまり仮想均衡価格は，株が売買されるたびに変動するのである．このことから，仮想均衡価格 $x^*(t+\Delta t)$ が株価 $x(t)$ と株価 $x(t-\Delta t)$ の差に影響されながら変動する**[1],[2],[3]**．株価の変動と仮想均衡価格の変動の関係をモデル化したのが高安らの株価変動モデルである**[2]**．高安らの株価変動モデルでは，株価 $x(t)$ と仮想均衡価格 $x^*(t)$ の変動は以下の式に従うものとする．今回のシミュレーションはこのモデルに基づく．

$$x(t+\Delta t)=x(t)-A(x(t)-x^*(t)),$$
$$x^*(t+\Delta t)=x^*(t)+B(x(t)-x(t-\Delta t)). \qquad (1)$$

A は株価の変動を決定するパラメータであり，B は仮想均衡価格の変動を決定するパラメータである．このモデルはそれぞれ A と B の値によって４つの特徴的な株価変動をする（図２，図３，図４，図５参照）．これらの図は全て，横軸が時間 t，縦軸が株価である．また，図３と図４において縦に入った線は t=30，t=60，t=80，t=100 のメモリを表している．図２は A とBが共に小さい場合のグラフである．株価は時間が経つにつれて徐々に大きくなり，徐々に収束していく．図３は A が大きくを B が小さい場合のグラフである．時間が経つにつれて最初は大きかった変動が小さな変動になっていき徐々に収束していく．図４は A が小さく B が大きい場合のグラフである．最初の株価と比べると t=100 での株価は大きく下がっている．ただし，本論文ではバブルを取り扱わない．図５は A と B が共に大きい場合のグラフである．最初は小さかった変動が，時間が経つにつれて大きな変動になっていく．これら４つの特徴的な株価変動は実際の株価においても確認出来る**[3]**．

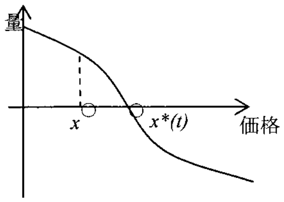

図１　仮想均衡価格と株価の関係

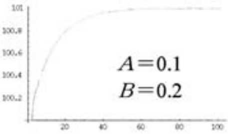

図２　安定：証券１

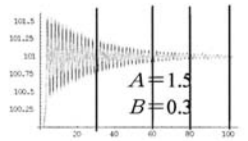

図３　振動減衰：証券２

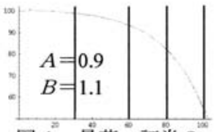

図４　暴落：証券３

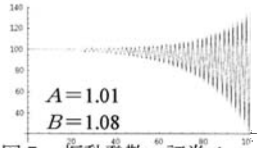

図５　振動発散：証券４

３ ポートフォリオ

あらゆる市場は予測困難な変動をしている．そして株式市場も同様である**[3]**．このように，予測不能な証券に対してどのような投資をすれば安定して利益を得ることが出来るのであろうか．この問題を合理的に考察可能とする評価法がポートフォリオなのである．

３．１　リターン

ポートフォリオにおいてリターンとは収益率の平均であると定義される．R_i は証券 i の収益率の平均値である．証券 i の収益率の平均値 R_i は以下で与えられる．

$$R_i=U_i \cdot A_i+(1-U_i)\cdot B_i. \qquad (2)$$

U_i は好景気の確率である．この論文では，好景気の確率 U_i は時刻 0 から現在時刻 t までの区間内において，ある時刻の株価と１ステップ数前の株価を比べ株価が上昇した回数の全ステップ数に対する割合とする．よって，好景気の確率 U_i は以下の式で与えられる．

$$U_i=1/(t+1)\cdot\sum_{j=0}^{t}\theta(x(t-j)-x(t-j-1)). \qquad (3)$$

ただし $\theta(t)$ は，

$$\theta(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t\leqq 0\end{cases} \qquad (4)$$

というステップ関数である．一方，不景気の確率は 1-U_i である．

A_i は証券 i の好景気時の収益率の平均であり，B_i は証券 i の不景気時の収益率の平均である．この論文では，それぞれ好景気と不景気に分けて収益率の平均を求める．それは以下の式で表される．

$$A_i=1/(t+1)\cdot\sum_{j=0}^{t}(x_u(t-j)-x(0))/x(0),$$
$$B_i=1/(t+1)\cdot\sum_{k=0}^{t}(x_{1-u}(t-k)-x(0))/x(0). \qquad (5)$$

x_u は好景気のときの株価，x_{1-u} は不景気の時の株価，$x(0)$ は基準とする時刻での株価である．A_i は 0 から t までの中から好景気のときのみ和を取り，B_i は 0 から t までの中から不景気のときのみ和を取る．

ポートフォリオのリターンは収益率の平均値 R_i の様々な証券についての平均値であると定義される．よって，ポートフォリオのリターン P_R は以下の式で求め

ることが出来る．

$$P_R=\sum_{i=1}^{N} P_i \cdot R_i. \qquad (6)$$

P_iは証券 i に対する投資比率であり，N は証券 i の総数である．各証券の投資比率によってポートフォリオのリターンは変化するので，通常ディーラーは投資比率を変化させてポートフォリオのリターンの最大値を取るように投資比率を決定する．

3．2　リスク

ポートフォリオにおいてリスクとは収益率の分散と定義される[10]．収益率の変動の大きさでその証券が安定して利益を上げることが出来るのか否かを判断することが出来る．ポートフォリオでは収益率と平均収益率との差が大きくなればなるほど，リスクが大きくなると考えるのである．r_iは証券 i の好景気と不景気の収益率に対する分散の平均値とする．

$$r_i=U_i \cdot (A_i-R_i)^2+(1-U_i) \cdot (B_i-R_i)^2. \ (7)$$

ポートフォリオのリスクとは r_iの投資比率についての平均値であると定義される[4]．ポートフォリオのリスク P_rは以下の式で与えられる．

$$P_r=\sum_{i=1}^{N} P_i^2\, r_i+2\sum_{i\neq j}^{N} P_i \cdot P_j \cdot \langle P_i\, P_j\rangle. \quad (8)$$

$\langle P_i P_j\rangle$は証券 i, j の収益率に対する好景気と不景気の平均の共分散である．それぞれは以下の式で表すことが出来る．

$$\begin{aligned}\langle P_i\, P_j\rangle=&U_i \cdot U_j \cdot (A_i-R_i)\,(A_j-R_j)\\&+U_i\,(1-U_j)(A_i-R_i)(B_j-R_j)\\&+(1-U_i) \cdot U_j \cdot (B_i-R_i)(A_j-R_j)\\&+(1-U_i)(1-U_j)(B_i-R_i)(B_j-R_j). \quad (9)\end{aligned}$$

4 P_r ，P_Rの評価結果と考察

高安らの株価変動モデルを用いて，４証券におけるポートフォリオのリスクとポートフォリオのリターンを評価する．証券１は$A=0.1$ と $B=0.2$ で安定という変動をする証券（図２参照），証券２は$A=1.5$ と $B=0.3$ で振動減衰という変動をする証券（図３参照），証券３は$A=0.9$ と $B=1.1$ で暴落という変動をする証券（図４参照），証券４は$A=1.01$ と $B=1.08$ で振動発散という変動をする証券（図５参照）とした．初期の株価は $x(0)=100$，$x(-1)=101$，初期の仮想均衡価格は $x^*(0)=101$ で $x(0)<x^*(0)$かつ $x(0)<x(-1)$とした．ステップ数はt=100 までとし，観察時間をそれぞれt=0 からt=30，t=60，t=80，t=100 までとした．また，短期とは t=0～30 までで，長期とは t=0～100 までとする．

ここでは代表的な評価結果を，３つのグラフで挙げておく．図６は証券１＆２，図７は証券１＆３，図８は４証券全ての組合せのグラフである．左のグラフの縦軸が 10^5P_R，右のグラフの縦軸が 10^5P_rの値をそれぞれ表している．これらのグラフの横軸は投資比率を表しており，各グラフの横軸は，図６，７が $10P_1$，図８が $1000P_1+100P_2+10P_3$ である．図中の t=30 などは観察時間を表しており，それぞれ観察時間ごとにグラフにしたものである．また，図中の線は近似曲線で，それは証券１の P_r ，P_Rへの影響を見るための線である．観察時間を大きくするときに全体として，P_rが小さくなり，または P_Rが大きくなれば長期売却に向いていると判断する．逆に，P_rが大きくなり，または P_Rが小さくなれば短期売却しなければ損をすると判断する．図６は，観察時間と共に P_rが大きくなり，P_Rが小さくなる．図７，８は，観察時間と共に P_rが小さくなり，P_Rが大きくなる．ディーラーによっては，P_rや P_Rのうちどちらか一方のみに着目すれば良い場合もあるだろう．P_r か P_R にのみ着目した場合の長期売却に適した各証券の組み合わせ，短期売却をしなければ損をする各証券の組み合わせを表１で示す．

	P_r	P_R
短期売却	証券１＆３， 証券１＆４， 証券２＆３， 証券２＆４， 証券３＆４， 証券１＆２＆３， 証券１＆２＆４， 証券１＆３＆４， 証券２＆３＆４， 証券１＆２＆３＆４	証券１＆３， 証券１＆４， 証券２＆３， 証券２＆４， 証券３＆４， 証券１＆２＆３， 証券１＆２＆４， 証券１＆３＆４， 証券２＆３＆４， 証券１＆２＆３＆４
長期売却	証券１＆２	証券１＆２

表１　P_r，P_Rに着目した場合の短期・長期売却の相性

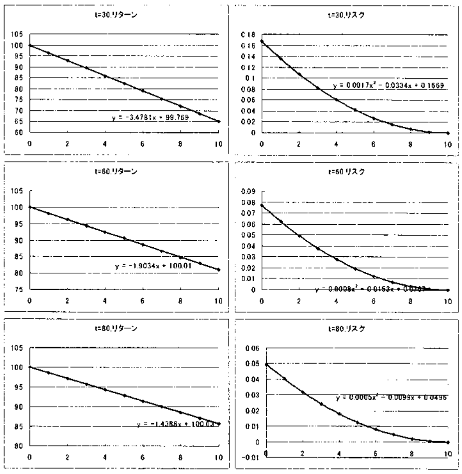

図６　証券１＆２

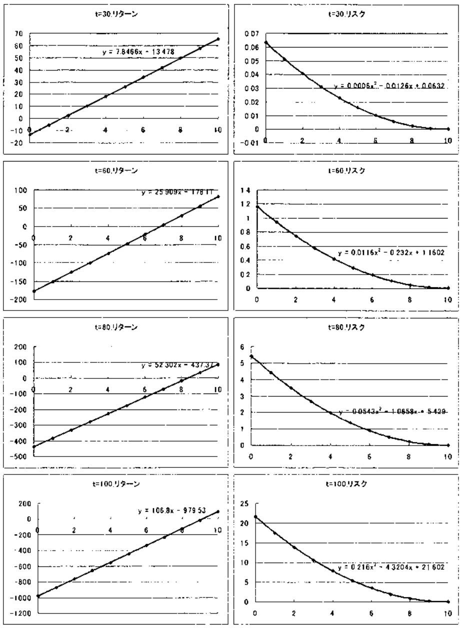

図７　証券１＆３

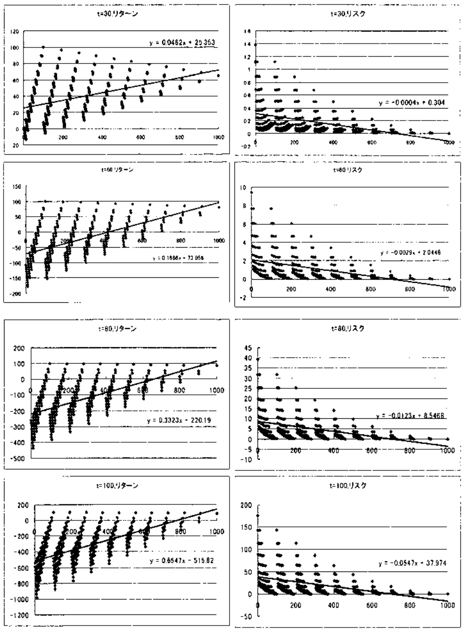

図８　証券１＆２＆３＆４

P_rにのみ着目すると長期売却に向いているのは唯一，証券１＆２である．証券１＆２は時間が経つにつれてP_rが徐々に小さくなるからである．このような性質を他の証券の組み合わせは持っていない．

表１の結果より，P_r と P_Rの双方に着目すると，それぞれに向いた証券の組み合わせは以下のようになる．

・長期売却：証券１＆２
・短期売却：証券１＆２以外の全ての組み合わせ

長期売却であれば P_r ，P_Rのどちらに着目しても良い組み合わせは証券１＆２のみである．証券１の株価は時間が経っても下がることなく上がる一方であり，証券２の株価は時間経過によって株価変動が収束するため，このような結果になったと考えられる．つまり投資をする場合，必ず証券１＆２のような変動をする組み合わせで投資した方が良いと言える．

しかし，これらの表や結果は P_r ，P_Rが独立に評価されているので，P_r ，P_Rのどちらにどれだけの気を配れば良いかという判断が出来ないのである．次章ではゲーム理論的手法を用いてそれらの問題を解決する方法を提案する．

５　ゲーム理論的手法のポートフォリオ

前章までのポートフォリオリスク，リターンの評価はそれぞれ独立したものであった．よって合理的な株の売買は，ディーラーの主観により判断せざるを得ない状況であった．それは万人が最も良いと考える合理的な評価結果はひとつに定まらないことを意味している．そこでポートフォリオのリスク，リターンの評価を総合的に行える手法を用いればこのような不定性は改善されるであろう．これらを総合的に評価出来ればポートフォリオのリスクにどれだけ注意を払えば良いのか，あるいはポートフォリオのリターンにどれだけ注意を払えば良いのかという判断も可能になるであろう．ディーラーの立場になって考えると，ポートフォリオのリスク，リターン双方に対して最も利益を得ることが望ましい．本論文では，合理的な意思決定法であるゲーム理論を適用することによって，ディーラーの望みを叶えることが出来るであろうと考えた．以下でゲーム理論的手法を用いた評価法を提案する．

５．１　ゲーム理論的手法によるポートフォリオ

本論文ではゲーム理論的手法を取り入れることによってポートフォリオリスク，ポートフォリオリターンの両方を総合的に評価することを可能にする．ここでは“ポートフォリオ”と“証券”をプレイヤーと考える．ポートフォリオはポートフォリオリスクとポートフォリオリターンという２つの戦略のうちどちらか一方を選択するものとする．証券は証券Ａと証券Ｂという２つ戦略のうちどちらか一方を選択するものとする．証券が証券Ａという戦略を，ポートフォリオがポートフォリオリスクという戦略を選択する場合，証券の利得とポートフォリオの利得はどちらも証券Ａのポートフォリオリスクを元に評価した量とする．同様に証券Ａとポートフォリオリターンという戦略の場合，証券の利得とポートフォリオの利得はどちらも証券Ａのポートフォリオリターンを元に評価した量とする．証券が証券Ｂを選択する場合も同様に考えることが出来る．それらの利得は利得表で表現出来る．ただし純粋戦略を用いれば P_r と P_Rを総合的に評価出来ない．なぜなら純粋戦略では必ず１つの戦略しか選択出来ないから

である．

しかしポートフォリオを考えるならば，投資比率を考慮する必要がある．また，ポートフォリオリスク戦略とポートフォリオリターン戦略に重きを置く割合を考慮すれば，どちらをどれだけ優先するべきかの評価を得ることが出来る．つまりこれらを一括して考慮すれば，投資比率をいくらにし，ポートフォリオリスクをどのくらい考慮して投資をするべきかというひとつの指標を得ることが出来るのである．このように戦略に割合を考慮する必要がある場合，混合戦略を用いると良い[7]．しかし，ポートフォリオリスクの値をそのまま利得として用いる訳にはいかない．ポートフォリオリスクは小さいほど利得が大きく，ポートフォリオリターンは大きいほど利得が大きいと考えられる．また，ポートフォリオリスクとポートフォリオリターンが同じ値であっても，利得の大小関係は簡単に比較出来ない．その二つの問題を解決出来なければ，信頼出来る利得表を作ることが出来ないのである．

5．2　利得の規格化と利得表

そこで利得を規格化するために偏差値を用いて表現することにする．ポートフォリオリスクの偏差値 h_p とポートフォリオリターンの偏差値 g_p はそれぞれ以下の式で定義される．添え字の p は投資比率を表し，p=0～1 の間を $1/N$ 刻みで離散的な値を取るものとする．

$$h_p=10\cdot(P_{r,p}-\langle P_r\rangle)/Z_r+50, \qquad (11)$$

$$Z_r=\sqrt{1/N\cdot\sum_{i=0}^{N}(P_{r,p}-\langle P_r\rangle)^2}, \qquad (12)$$

$$\langle P_r\rangle=1/N\cdot\sum_{i=0}^{N}P_{r,p} \quad . \qquad (13)$$

$$g_p=10\cdot(P_{R,p}-\langle P_R\rangle)/Z_R+50, \qquad (14)$$

$$Z_R=\sqrt{1/N\cdot\sum_{i=0}^{N}(P_{R,p}-\langle P_R\rangle)^2}, \qquad (15)$$

$$\langle P_R\rangle=1/N\cdot\sum_{i=0}^{N}P_{R,p} \quad . \qquad (16)$$

ただし，$p=i/N$.

$P_{r,p}$, $P_{R,p}$ はそれぞれ投資比率 p のときのポートフォリオリスク，ポートフォリオリターンの値であり，$\langle P_r\rangle$, $\langle P_R\rangle$ はそれぞれ p に対するポートフォリオリスク，ポートフォリオリターンの平均値である．Z_r, Z_R はそれぞれポートフォリオリスク，ポートフォリオリターンの標準偏差である．これら偏差値の式は，適当な値に規格化され，偏差値の平均値が 50 になるように規格化されており，偏差値の式で最も一般的な式である[9]．ポートフォリオリスク，ポートフォリオリターンの値は投資比率によって変化するので，それらの計算には第３章の式（６），（８）を用いる．このような変換をすることでポートフォリオリスクとポートフォリオリターンとの大小比較が可能となる．

式（１１）～（１３）ではまだポートフォリオリスクが小さいほど利得が大きいという意味になっていない．ポートフォリオリスクの値が小さければ利得が大きいという意味にするため，安全度 S_p を導入する；

$$S_p=\mathrm{Min}(h_p)+\mathrm{Max}(h_p)-h_p\,. \qquad (17)$$

S_p は，h_p の最大値を S_p の最小値，h_p の最小値を S_p の最大値へと変換する式である．このような変換をすることでポートフォリオリスクが小さければ利得が大きいという意味に出来る．

本論文の利得表は式（１１）～（１７）によって作ることが出来る．それを表２で示す．

	証券A	証券B
P_r	(S_p, S_p)	$(S_{1\text{-}p}, S_{1\text{-}p})$
P_R	(g_p, g_p)	$(g_{1\text{-}p}, g_{1\text{-}p})$

表２　混合戦略を用いた利得表．ただし p=1

p，$1-p$ はそれぞれ証券 A，証券 B の投資比率であり，それぞれ０～１までの値を取る．q をポートフォリオリスクを考慮する割合とすると，p，q の期待利得は以下の式で求めることが出来る．

$$K=q\cdot S_p+(1-q)\cdot\{p\cdot g_p+(1-p)\cdot g_{1\text{-}p}\}. \qquad (18)$$

このような期待利得の式にしたのは，S_p が p，q に関して非線形なので簡単に線形で繋ぐことが出来ないと判断したからである．この期待利得の式を用いることによって，全ての p，q に対して利得を表現することが出来るようになる．

式（１８）を用いてナッシュ均衡を求めれば，２証券の組み合わせでのそれぞれの投資比率とポートフォリオリスク，リターンを考慮する割合を合理的に求めたことになる．次章では，式（１８）を用いて混合戦略のナッシュ均衡を求め，その結果を議論する．

6　ゲーム理論的手法を用いた評価の考察

第４章までは独立してポートフォリオリスク，リターンを考慮してきた．そして，どちらにどれだけ着目するかという判断はディーラーの主観的判断に任せるので，それが本当に合理的なのかという疑問が生じる．ゲーム理論を導入することにより，投資比率とポートフォリオリスク，リターンを考慮する割合を合理的に評価出来る．また，最適反応戦略の動きを求めれば，ナッシュ均衡を求めることが容易になる．混合戦略で最大になる期待利得を評価し，そのときのナッシュ均衡を求めれば，ディーラーにとって最も利益がある投資比率とポートフォリオリスク，リターンを考慮する割合を総合的かつ合理的に求めたことになる．この手法によってディーラーは株価変動の４つの特徴を持つ証券の組み合わせに対し，どのようにすれば最大の恩恵を得ることが出来るか評価可能である．

6．1　混合戦略と各証券の設定

４証券を２証券ずつ，６種類の組み合わせで最適反応戦略の動きからナッシュ均衡を求め，さらに最大期待利得を求める．これによって，最大期待利得が純粋戦略になるか混合戦略になるかを，各証券の組み合わせについて求めることが出来る．そして，最大期待利

得になるときに長期売却に向いているか，短期売却をしなければ損をするのかを評価する．各証券の初期値は第４章と同じ設定である．証券の投資比率pを0〜1まで0.05ずつ変化させ，そのときのqと最大期待利得を求める．また，ポートフォリオの割合qを0〜1まで0.05ずつ変化させ，そのときのpと最大期待利得を求める．これらによって，プレイヤー“証券”，“ポートフォリオ”それぞれの最適反応戦略の動きを求めることが出来るので，混合戦略の最適反応戦略の組みであるナッシュ均衡が求まる．

６．２　最大期待利得とナッシュ均衡

ここでは最適反応戦略の動きについて３つに分類出来る．図９〜１１の左のグラフの横軸はpかqの値を表し，縦軸はそのpかqの値に応じてそれぞれの最大期待利得を表している．グラフ上の点はpかqのときの最大期待利得を表している．グラフは観察時間ごとのもので，左右のグラフは同じ観察時間のときの各プレイヤーの最適反応戦略の動きを表している．右下の線はプレイヤー“証券”の最適反応戦略の動きを表し，左上の線はプレイヤー“ポートフォリオ”の最適反応戦略の動きを表している．つまり，線の交点がナッシュ均衡である．

証券１＆２のナッシュ均衡は３つで，証券２＆４のナッシュ均衡は１つである．全ての評価結果をナッシュ均衡の数によって分類すると，以下の表になる．

３つ	証券１＆２，証券３＆４
１つ	証券１＆３，証券１＆４， 証券２＆３（右下がり），証券２＆４

表３　ナッシュ均衡の数で分類した各証券の組合せ

証券２＆３はt=30 のときのみ最適反応戦略の動きが右下がりの階段で，ナッシュ均衡は(0.25,1)である．証券１＆２と証券３＆４，証券１＆３と証券２＆４など，異なる証券の組み合わせで，最適反応戦略の動きやナッシュ均衡がほぼ同じであることは自明ではないだろう．また証券１＆２では，最大期待利得を取るのは純粋戦略のナッシュ均衡(1,1)なので，混合戦略のナッシュ均衡(0.3,0.05)で最大期待利得を取らないことが図９より分かる．これは一般にジレンマゲームと呼ばれている鹿狩りゲーム**[10]**と同じ状況であるが，ここではジレンマではない．なぜならここでは利得が大きい方が良い状況なので，ナッシュ均衡が複数あるとしても戦略がひとつに定まるため，ジレンマにはならない．

各組み合わせにおける各観察時間別の最大期待利得とそのときのナッシュ均衡を表４で示す．表４の下の値は最大期待利得で，それぞれ括弧内の左と右が最大期待利得を取るときの（p, q）である．最大期待利得は，観察時間ごとに変化している組み合わせと，変化しない組み合わせがあることが分かった．この表を見ると，p =1, q =1 になる場合が約７割である．つまり最大期待利得を取るとき，ほとんどが純粋戦略になるのである．しかも観察時間がt=100 になると，証券３＆４の組み合わせを除き，純粋戦略になる．p=1 は２証券の組み合わせ，どちらかの証券に完全に投資した方が良いということを表す．q=1 はポートフォリオリスクに完全に着目した方が良いことを表す．このことは，現在のポートフォリオがリスクに着目する傾向があることと合致している．また表４より，証券１と他の証券の組み合わせの場合，必ず証券１に完全に投資をした方が良いことが分かる．このように純粋戦略で考えてよいという結果は，t=100 のように観察時間を大きくすると，ポートフォリオリターンに着目する割合を考慮する必要がないことを指している．このことから混合戦略を考える必要があるか，あるいは純粋戦略で考えて良いのかを分類出来る．第４章のように，短期とはt=0〜30 までで，長期とはt=0〜100 までとする．そして，証券の組み合わせをそれぞれ短期，長期に分けて考え，そのとき最大期待利得で混合戦略になっているか純粋戦略になっているかを分類すると表５のようになる．

	証券１＆２	証券１＆３	証券１＆４
t=30	(1, 1), 70.993	(1, 1), 70.993	(1, 1), 70.993
t=60	(1, 1), 70.993	(1, 1), 70.993	(1, 1), 70.993
t=80	(1, 1), 70.993	(1, 1), 70.993	(1, 1), 70.993
t=100	(1, 1), 70.993	(1, 1), 70.993	(1, 1), 70.993

	証券２＆３	証券２＆４	証券３＆４
t=30	(0.25, 1), 74.122	(0.9, 1), 71.921	(0.95, 1), 71.332
t=60	(0.95, 1), 71.488	(1, 1), 71.052	(0.9, 1), 71.936
t=80	(1, 1), 71.059	(1, 1), 70.002	(0.9, 1), 71.065
t=100	(1, 1), 70.004	(1, 1), 70.994	(0.9, 1), 71.932

表４　各組み合わせにおける観察時間別の（p,q）と最大期待利得

	混合戦略	純粋戦略
短期	証券２＆３，証券２＆４， 証券３＆４	証券１＆２，証券１＆３， 証券１＆４
長期	証券３＆４	証券１＆２，証券１＆３， 証券１＆４，証券２＆３， 証券２＆４

表５　短期と長期における混合戦略と純粋戦略

証券１＆２，証券１＆３，証券１＆４は観察時間を変えても最大期待利得やナッシュ均衡が変化しないことから，短期と長期の両方に分類される．表５より，短期でも長期でも証券３＆４は混合戦略を考慮する必要がある．しかも短期と長期の双方において，純粋戦

略しか考慮しなくても良い組み合わせがあることが分かった．

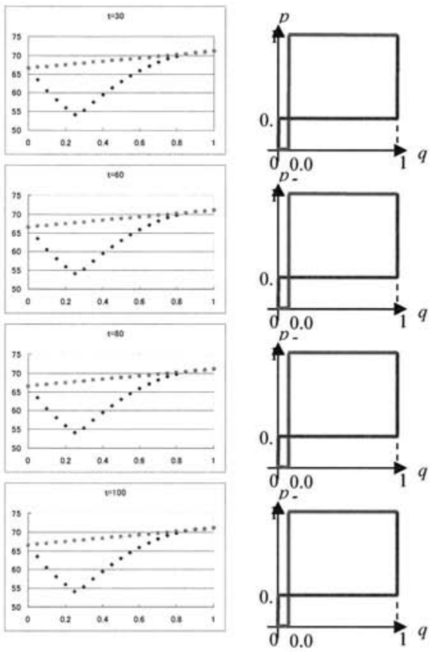

図９　証券１＆２の最適反応戦略の動き

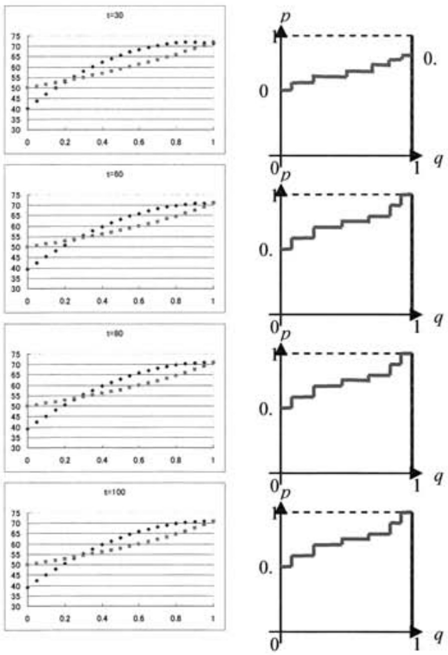

図１０　証券２＆４の最適反応戦略の動き

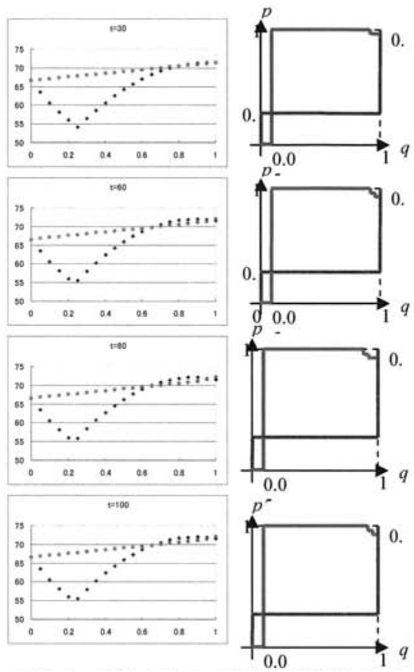

図１１　証券３＆４の最適反応戦略の動き

６．３　ゲーム理論的手法による評価結果の結論

ここでは，観察時間を大きくするときに最大期待利得が大きくなれば長期売却に向いていると判断する．逆に，最大期待利得が小さくなれば短期売却に向いていると判断する．それを元に６．２節の表４の評価結果を長期売却か短期売却に向いているかを分類する．

６．２節では，最適反応戦略の動きを２つに分類することが出来た．t=100 になると，証券３＆４を除き，純粋戦略が最大期待利得になり，かつナッシュ均衡であることが分かった．

このことから証券３＆４以外は純粋戦略で考えて良いことが分かった．

・長期売却：なし

・短期売却：証券２＆３，証券２＆４

短期売却しなければ損をする証券はあるが，第４章の評価結果とは異なり，長期売却に向いている証券の組み合わせがないと分かった．証券３＆４の場合，t=80 までは最大期待利得の最大値が大きくなっているが，t=100 では小さくなっている．この先も小さくなる可能性があるので長期売却に向いているとは判断しなかった．しかし証券３＆４で t=80 までは保有している方が良い．

この章全体の結論として，長期売却を２証券で考慮する際は，いかなる組み合せも長期売却に向いていないと分かった．

7 最後に

高安らの株価変動モデルを用いてそれぞれ安定，振動減衰，暴落，振動発散という変動をする各証券の組

み合わせを２証券，３証券，４証券でポートフォリオのリスクやリターンを評価した．さらに，ポートフォリオリスクとポートフォリオリターンを総合的に評価するため，ゲーム理論的手法を用いてその評価を考察した．その結果，混合戦略のナッシュ均衡ではなく純粋戦略のナッシュ均衡で最大期待利得を取ることが分かった．そして，長期売却や短期売却について以下の４つのことが分かった．

- 短期で証券１と他の１つの証券を組合せた場合は，ポートフォリオリスクのみに着目すれば良い．
- 長期売却では証券３＆４以外ポートフォリオリスクのみに着目すれば良い．
- 短期売却をしなければ損をする証券の組み合わせは証券２＆３，証券２＆４の２つである．
- 長期売却に向いている証券の組み合わせは２証券ずつの組み合わせでは存在しない．

また，長期売却に向いている証券の組み合わせはないが，短期売却をしなければ損をする証券の組み合わせが２つあり，長期保有すれば短期保有よりも損をする．第４章では長期売却に向いた２証券の組み合わせは証券１＆２だったが，ゲーム理論的手法では長期売却に向いた証券の組み合わせがないことが分かった．短期売却しなければ損をする２証券の組み合わせは，ポートフォリオリスクとポートフォリオリターンを独立で評価した場合は証券１＆２以外の全ての組み合わせであったが（第４章参照），ポートフォリオリスクとポートフォリオリターンを総合的に評価した場合は証券２＆３，証券２＆４であった（第６章，６．３節参照）．つまりこの論文の手法はひとつの投資法を提案していると言える．

将来の課題を３つあげておく．１つ目は，今回のシミュレーションにおいて好景気の確率を式（３）で定義したが，好景気や不景気とは一体どういう状況のことを指すのかは曖昧であり，議論を深める必要がある．この問題を解決するには経済学に基いた，より一層の議論が不可欠であると考えられる．２つ目は，４証券全ての組み合わせの定式化とナッシュ均衡を求めることである．そのとき２証券では見られなかった混合戦略のナッシュ均衡が現れる可能性はある．それを実行するためには表４のような利得表を改良する必要がある．しかし，投資比率を決定するパラメータが３つになるので，ナッシュ均衡や期待利得の計算が複雑になると予想出来るため，工夫をする必要が出てくるであろう．３つ目は，この提案手法を実際の株取引に適用してみることである．そうすることによって，より現実的な評価を得ることが出来るようになるが，提案手法の改良が必要となるであろう．更なる改良が必要と考えられる１つの状況証拠として，例えば，１億円という株価の証券が安定な変動し，10円という株価の証券が暴落をしても，ディーラーにとって大した得や損をしない．このように株価変動の特徴の他，株価の大きさ自体が重要な役割を果たし得る．従って，株価の大きさに対しても考慮が必要にある可能性がある．そしてこれらの問題を解決出来たとき，本論文で提案した新しい手法が確立されるであろう．

参考文献

[1] H.Takayasu and M.Takayasu:"Critical fluctuations of demand and supply",Physica,A,269,24-29,1999.

[2] H.Takayasu,H.Miura,H.Hirabayashi and K.Hamada: "Statistical properties of deterministic threshold elements-the case of market price",Physica,A,184,127-134,1992.

[3] 高安秀樹，高安美佐子，「エコノフィジックス　市場に潜む物理法則」，日本経済新聞社，2001

[4] 榊原茂樹，城下賢吾，姜喜永，福田司文，「入門証券論」，有斐閣，2000

[5] 田中勝博，「テクニカル分析入門」，日本経済新聞社，2005

[6] 武藤滋夫，「ゲーム理論入門」，日本経済新聞社，2001

[7] John Von Neumann and Oskar Morgenstern, "Theory of games and economic behavior", Princeton University Press,1972

[8] 石原英樹，金井雅之，「進化的意思決定」，朝倉書店，2002

[9] Wikipedia,「偏差値」, http://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%81%8F%E5%B7%AE%E5%80%A4

[10] Harry M.Markowitz, "Portfolio selection:efficient diversification of investments", Yale University Press,1959