

解説

1. DSP の特徴と基礎理論



1.2 背景となる理論と基礎技術†

石井 六哉††

1. まえがき

アナログ信号処理を計算機や専用ハードウェアで模写してデジタル的に行おうという技術から出発したデジタル信号処理は、VLSI の発展にともないデジタル信号処理用 VLSI、デジタルシグナルプロセッサの出現をみた。このためますますデジタル信号処理が行いやすくなり、従来アナログ信号処理で行われていた技術が、デジタル信号処理技術に置き換わりつつある。小文では、アナログ信号処理技術をデジタル信号処理に置き換えたときに問題となる事柄やデジタル信号処理技術の考え方、デジタル信号処理技術を採用することにより実現が容易になった適応信号処理技術などについて述べる。

2. アナログ信号からデジタル信号へ

ベクトルなどを考えたとき、一つのベクトルを表すのに、基本ベクトルの和として表すことが一般的である。この考え方が信号を表すのにも使われている。つまりアナログ信号 $x_a(t)$ があったとき、この波形はいろいろな形を表すことになる。これを基本波形の和で表す方法が、フーリエ変換なりフーリエ級数展開である。図-1 に示すように、ベクトルを表すのに使われるのが、直交座標軸上の単位ベクトルであるが、アナログ波形を表すのに使われる基本波形は $e^{j\Omega t}$ である。ベクトルでは、直交座標軸上の基本ベクトルは、離散的であるが、基本技術 $e^{j\Omega t}$ の Ω の値は連続になる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega_1 t} \cdot \overline{e^{j\Omega_2 t}} dt = 2\pi \delta(\Omega - \Omega_2) \quad (2.1)$$

となるので、 $\Omega = \Omega_2$ のときだけ値をもち、 $\Omega \neq \Omega_2$ のときには零になる。つまり $e^{j\Omega t}$ は Ω が異なると直交

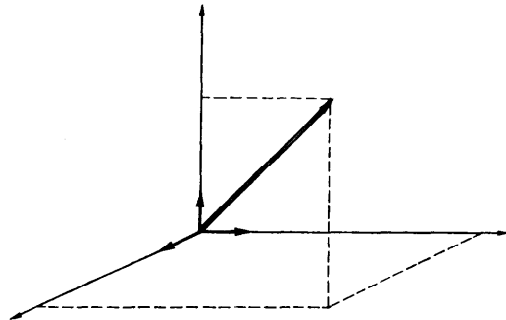


図-1 ベクトル図

していることがわかる。しかも無限に直交軸があることになる。

$x_a(t)$ の $e^{j\Omega t}$ 成分を求める計算がフーリエ変換と呼ばれている演算で、次式のように表せる。

$$X_a(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \overline{e^{j\Omega t}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (2.2)$$

$e^{j\Omega t}$ は複素関数であるので、 $X_a(\Omega)$ は一般的に複素数となる。 $X_a(\Omega)$ をスペクトルと呼んでいる。また $e^{j\Omega t}$ の成分が $X_a(\Omega)$ であるので、 $X_a(\Omega) e^{j\Omega t}$ を Ω に関して加算した値は元の波形にもどるはずである。これがフーリエ逆変換である。これは次式のようになる。

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (2.3)$$

$x_a(t)$ が周期関数の場合には、 Ω の値は連続ではなく、離散的な値となる。つまり周期を T とすると、 Ω は $2\pi/T$ の整数倍しか存在しない。これらの成分に分ける方法がフーリエ級数展開である。

デジタル信号を作るためには、アナログ信号のある時間間隔でサンプル必要がある。サンプル間隔を T [sec] として、アナログ信号 $x_a(t)$ をサンプルする。サンプルされた信号は $x_a(nT)$ と書ける。この信号は、 n の値のみによるので、 $x(n) (= x_a(nT))$ と置く

† Fundamental Theories and Concepts of Digital Signal Processing by Rokuya ISHII (Division of Electrical and Computer Engineering, Faculty of Engineering, Yokohama National University).

†† 横浜国立大学工学部電子情報工学科

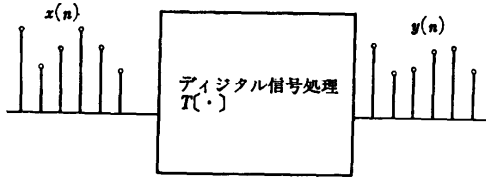


図-2 デジタル信号処理システム

ことにする。デジタル的に信号を処理するということは、 $x(n)$ をなんらかの処理をして、離散信号 $y(n)$ を得ることである。この考えを、図-2 に示す。このデジタル的な処理を考える前に、アナログ信号を基本成分に分けたのと同じように、離散信号 $x(n)$ を基本成分に分ける方法について示す。

アナログ信号での基本信号は $e^{j\omega t}$ であった。これを T 間隔サンプルし、 n 番目の信号は $e^{jn\Omega T}$ と表せる。サンプル間隔は一定であり、これをいつも書くのはわずらわしいので、

$$\omega = \Omega T \tag{2.4}$$

と置いて、基本信号を $e^{jn\omega}$ と表すことにする。この信号は、 2π を周期とする周期関数になる。離散信号 $x(n)$ が $e^{jn\omega}$ をどの程度含んでいるのかを求める数学的な計算が離散フーリエ変換である。これは次式のように表せる。

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\overline{e^{jn\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} \tag{2.5}$$

アナログ信号のとき、 Ω は連続な値であるので、 ω も連続な値となる。 $X(e^{j\omega})$ をスペクトルと呼んでいる。 $X(e^{j\omega})$ は $x(n)$ の中に $e^{jn\omega}$ の成分がどの程度含まれているかを示しているのので、この成分は $X(e^{j\omega})e^{jn\omega}$ となる。これらを ω についてすべて加算すれば、元の信号になるはずである。これが逆離散フーリエ変換と呼ばれており、次式のように表せる。

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{jn\omega} d\omega \tag{2.6}$$

さて、アナログ信号 $x_a(t)$ の $e^{j\Omega t}$ の成分 $X_a(\Omega)$ と、 $x_a(t)$ を T 間隔でサンプルした信号 $x_a(nT)$ ($=x(n)$) の $e^{jn\omega}$ の成分 $X(e^{j\omega})$ とは、なんらかの関係があるであろうと予想される。これらの関係を具体的に示すと次式のようになる。

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a\left(\Omega + \frac{2\pi r}{T}\right) \tag{2.7}$$

アナログ信号のスペクトル $X_a(\Omega)$ が図-3(a)に示すように Ω_0 までしかなく、 π/T の値が Ω_0 よりも大きい場合、式(2.7)より求めたデジタル信号のスペ

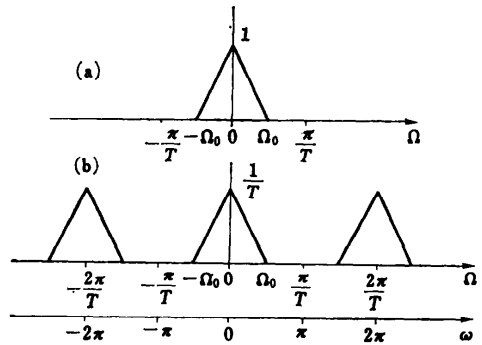


図-3 折り返し雑音がない場合のスペクトル図

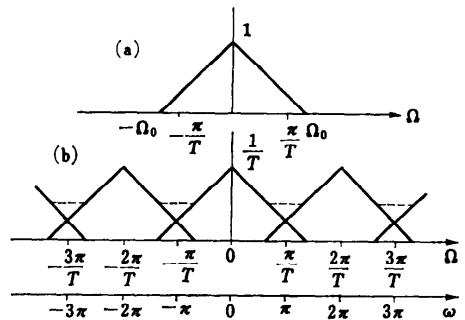


図-4 折り返し雑音がある場合のスペクトル図

クトル $X(e^{j\omega})$ ($\omega = \Omega T$) は同図(b)のようになる。また図-4(a)に示すように π/T が Ω_0 より小さい場合には、図-4(b)で示されるように π/T と Ω_0 の間のスペクトルは重なることとなり、この部分は点線で示すような個々のスペクトルの和の形になる。サンプルされた信号から、元のアナログ信号を復元しようとするとき、 $X(e^{j\omega})$ にスペクトル $X_a(\Omega)$ の形が残っていることが必要である。つまり図-3(b)のように、(a)の形が残っていれば、(b)の中から(a)の形の部分を切り出せば元の信号を得ることができる。しかし図-4(b)のように、 $X(e^{j\omega})$ に $X_a(\Omega)$ のスペクトルの形が残っていなければ、 $X(e^{j\omega})$ の値の中からどのように切り出しても $X_a(\Omega)$ のスペクトルは得られないことになる。このことは、一度サンプルしてしまうとどのようにしても元の信号は得られないことを意味する。このように元の信号の形が残っているか、スペクトルの重なりが生じ、この部分のスペクトルが加算されて形が変わってしまうかは、 Ω_0 と π/T の値の関係が決まる。つまり $\Omega_0 < \pi/T$ であれば、 $X_a(\Omega)$ のスペクトルの形が $X(e^{j\omega})$ に保存されることになる。このとき $X(e^{j\omega})$ の中から $X_a(\Omega)$ の部分を切り出すこと、つま



図-5 アナログ信号のデジタル処理

り低域通過フィルタをとすことにより元の信号を得ることができる。 $x_a(t)$ と $x_a(nT)$ とは次式で表せる。

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT) \frac{\sin(\pi/T)(t-kT)}{(\pi/T)(t-kT)} \quad (2.8)$$

上式のように、帯域制限された信号 $x_a(t)$ が、 $x_a(kT)$ で表されることを「サンプリング定理」と呼んでいる。 $x_a(kT) (=x(k))$ 信号別に $\sin x/x$ を乗ずることは、低域通過フィルタを通すことである。式(2.8)からわかるように、 $\sin x/x$ の関数は既知であるので含まれている最大周波数を $f_0 (= \Omega_0/2\pi)$ とすると、 $T \leq 1/2f_0$ の間隔でサンプルされた信号 $x_a(kT)$ と連続信号 $x_a(t)$ の情報量はまったく同じである。このことから、 $x_a(t)$ の信号を処理する代りに、 $x_a(kT)$ の信号をデジタル的に処理をして、アナログ信号にもどせばよいということになる。 $2f_0$ の値をサンプリング周波数と呼んでいる。コンパクトディスク (CD) のサンプリング周波数は 44.1 kHz ですの、理論的には約 20 kHz までの周波数の信号を含んでいるということが言える。

以上のことからわかるように、アナログ信号をデジタル的に処理するシステムは、図-5 のように表すことができる。まず信号はサンプルされ、A/D 変換器におかれ、このことにより信号は 1 と 0 のビット列の信号になる。この信号をデジタル的に処理をして、D/A 変換器に通される。この信号はいわばパルス列となる。この信号を低域通過フィルタに通すことにより、デジタル的に処理を行ったアナログ信号を得ることができる。

3. デジタル信号処理システムの性質

図-2 に示すように、離散化された信号 $x(n)$ になんらかの処理をして得られる離散信号を $y(n)$ と置くと、 $y(n)$ と $x(n)$ は数式的に次式のように表せる。

$$y(n) = T[x(n)] \quad (3.1)$$

デジタル信号処理をするシステムが線形性、つまり

$$\begin{aligned} y_1(n) &= T[x_1(n)] \\ y_2(n) &= T[x_2(n)] \\ \Rightarrow ay_1(n) + by_2(n) &= T[ax_1(n) + bx_2(n)] \end{aligned} \quad (3.2)$$

と、入力信号が入ってこないかぎり、出力信号は出てこないという性質、つまり時不変性

$$y(n) = T[x(n)] \Rightarrow y(n-k) = T[x(n-k)] \quad (3.3)$$

を有しているならば、 $y(n)$ は次式で求められる。

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k) \quad (3.4)$$

ここで $h(n)$ は、システムにインパルス $\delta(n)$ ($n=0$ のとき $\delta(0)=1$ 、それ以上は $\delta(n)=0$) を入力して得られた信号である。一般的に $h(n)$ をインパルス応答と呼んでいる。 $h(n)$ にシステムの情報がすべて含まれていることになる。

入力信号として、基本波である $e^{j\omega n}$ を入力したとき、つまり式(3.4)において、 $x(n) = e^{j\omega n}$ とすると、 $y(n)$ は次式のようにになる。

$$y(n) = H(e^{j\omega})e^{j\omega n} \quad (3.5)$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \quad (3.6)$$

ここで $H(e^{j\omega})$ はインパルス応答の離散フーリエ変換である。つまり基本波 $e^{j\omega n}$ は、デジタル信号処理システムを通ると、 $H(e^{j\omega})$ だけ変えられることになる。 $H(e^{j\omega})$ は基本波を変化させる度合を表しているの、システムの周波数特性と呼んでいる。

式(3.4)を離散フーリエ変換すると、

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \quad (3.7a)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\omega n} \quad (3.7b)$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \quad (3.7c)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (3.7d)$$

と表せる。つまり $y(n)$ の $e^{j\omega n}$ の成分は、 $h(n)$ の $e^{j\omega n}$ の成分と $x(n)$ の $e^{j\omega n}$ の成分の積で表されることになる。

式(2.5)で定義される離散フーリエ変換において、 $e^{j\omega} = z$ と置き換えると、次式を得る。

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (3.8)$$

この式で定義される変換を z 変換という。 z に $e^{j\omega}$ の値だけではなく、代入することが可能な複素数すべてを表すために z を用いる。


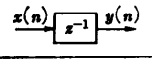

式(3.4)の関数を z 変換すると、

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (3.9)$$

となる。ここで $Y(z)$ 、 $H(z)$ 、 $X(z)$ はそれぞれ $y(n)$ 、 $h(n)$ 、 $x(n)$ の z 変換である。この式からわかるように、 $H(z)$ は $X(z)$ と $Y(z)$ の比で表される。

$$H(z) = Y(z)/X(z) \quad (3.10)$$

表-1 デジタル信号処理用基本素子

演算素子	回路信号	演算式
乗算素子		$y(n) = Ax(n)$
遅延素子		$y(n) = x(n-1)$
加算素子		$y(n) = x_1(n) + x_2(n)$

これは z の関数となる。

一般的にデジタル信号処理を行うための回路を構成する基本素子は、表-1の3種類だけである。これらの素子から構成されている回路の $H(z)$ は、 z^{-1} の多項式か z^{-1} の有理関数で表すことができる。また逆にこれらのように表される $H(z)$ を基にして、表-1に示す回路素子で回路を構成できることが知られている。

例として、 $H(z)$ が

$$H(z) = 1 / \left(1 - \frac{1}{2} z^{-1} \right) \tag{3.11}$$

と表されたとする。このシステムの入力信号 $x(n)$ と出力信号 $y(n)$ は、次のように2種類の方法で表すことができる。つまり式(3.4)の関係で表せる場合と差分方程式の関係で表せる場合である。

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{2} y(n-1) \tag{3.12a}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k x(n-k) \tag{3.12b}$$

一般的に表-1の基本素子で構成されている回路の入出力の関係は、式(3.4)の関係で表される場合と、差分方程式で表される場合の2種類の方法がある。例に示したシステムの周波数特性は $H(e^{j\omega})$ と表せる。

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{4 - \cos \omega} \tag{3.13}$$

$$\varphi(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\frac{1}{2} \sin \omega}{1 - \frac{1}{2} \cos \omega}$$

ここで $A(\omega)$ を振幅特性、 $\varphi(\omega)$ を位相特性という。

4. 実現に必要な基礎技術

4.1 デジタルフィルタ

デジタル信号処理システムを実現するためには、まず伝達関数 $H(z)$ を求める必要がある。このためには、与えられた周波数特性 $H(e^{j\omega})$ などに課せられた要求を満たす $H(z)$ を求める必要がある。このことを伝達関数の設計という。前章で述べたように $H(z)$ は z^{-1} の有理関数である場合と、 z^{-1} の多項式で表される場合とがあるが、多くの場合設計方法は異なる。いろいろと知られている最適化手法を使って $H(z)$ を設計する方法もよく使われる方法である。 $H(z)$ が z^{-1} の有理関数の場合には、従来よく知られているアナログ回路の伝達関数の設計手法を使って $H(z)$ を設計する方法がよく使われる。

次に設計された伝達関数 $H(z)$ を回路で実現することが必要である。 $H(z)$ が z^{-1} の多項式か有理関数かで回路の構成方法が異なる。 $H(z)$ が z^{-1} の多項式で表される回路は、FIR デジタルフィルタと呼ばれており、インパルス応答が有限個しか存在しない。3.で示したように、インパルス応答とはインパルスを入力信号としたときの出力信号である。この出力信号が有限個であるということは、有限個の値で回路の情報すべてを知ることができるということである。

$H(z)$ が z^{-1} の有理関数で表される回路は、インパルス応答は無有限個となる。この回路はIIR デジタルフィルタと呼ばれている。

また回路の構造上、フィードバック枝を含む構造をもつ回路を再帰型デジタルフィルタと呼び、フィードバック枝をもたない回路を非再帰型デジタルフィルタと呼んでいる。これらのことをまとめると表-2のようになる。回路の入出力関係としてインパルス応答が有限個か無有限個かで分ける場合と、内部構造に着目してフィードバック枝が存在するかしないかで分け

表-2 デジタルフィルタの分類

内部構造		入出力関係	
		有限個	無有限個
帰還	存在する	FIR デジタルフィルタ 再帰形デジタルフィルタ	IIR デジタルフィルタ 再帰形デジタルフィルタ
	存在しない	FIR デジタルフィルタ 非再帰形デジタルフィルタ	対応するデジタルフィルタは存在しない

る場合の2とおりに分けられる。これらの例を次に示す。

図-6 にインパルス応答が有限個しかなくしかも帰還路が存在しない回路の例、図-7 にインパルス応答が無限個ありしかも帰還路がある回路の例、図-8 にインパルス応答が有限個であるが帰還路が存在する回路の例を示す。この回路の伝達関数は z^{-1} の多項式となることがわかる。

以上の議論は、信号および各種の値が任意の値をとることができる、つまり無限ビットで表されているという仮定の下で議論を行ってきた。しかし現実には信号および各種の値は有限ビットで表すことになる。伝達関数に関しては係数を有限ビットで表すことにより特性が変わることがある。有限ビットのビット数にも関係があるが極端な場合には係数を有限ビットで表し

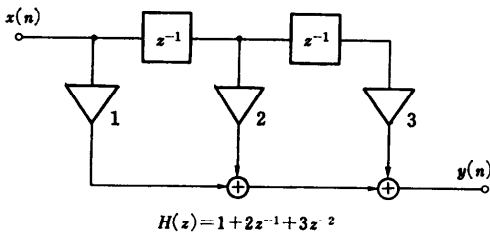


図-6 2次の FIR デジタルフィルタ

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$$

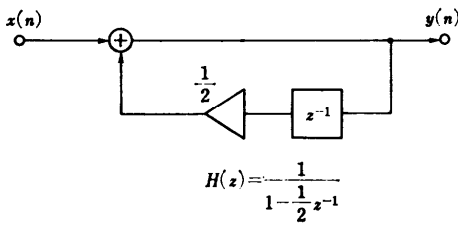
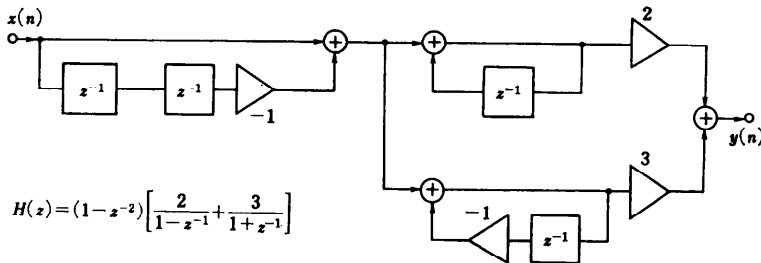


図-7 1次の IIR デジタルフィルタ

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$



$$H(z) = (1 - z^{-2}) \left[\frac{2}{1 - z^{-1}} + \frac{3}{1 + z^{-1}} \right]$$

図-8 周波数サンプリングフィルタ

たことにより、要求される条件を満たさない場合も出てくる。このような場合には、要求条件を満たすように係数値を調整するという必要も必要になってくる。

また信号と乗数値の積の結果の信号を有限ビット数で表すことにより、正しい乗算結果との間に誤差が生ずる。回路にフィードバック枝が存在する場合には、この誤差によりリミットサイクルと呼ばれる一種の発振現象が生ずる場合がある。このように有限ビット演算により、各種の誤差が生ずる。

4.2 高速変換アルゴリズム

有限個の離散信号が周期的にくり返されることにより得られる信号のスペクトルは、離散的な値しかスペクトルはないことが知られている。つまり周期的な離散信号のスペクトル $X(e^{j\omega})$ は、離散的な値しかもたない。いま周期的を N とすると、この信号のスペクトルは $2\pi k/N$ ($k=0 \sim N-1$) の角周波数のところにかスペクトルがないことが知られている。そしてこれらのスペクトルは、周期信号 $x(n)$ ($n=0 \sim N-1$) によって、次のように計算することができる。

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4.1)$$

$$k=0 \sim N-1$$

ここで $X(k)$ は、 $\omega=2\pi k/N$ のスペクトルを表している。また $X(k)$ から周期信号 $x(n)$ を求めるには、次のような計算による。

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4.2)$$

$$n=0 \sim N-1$$

$x(n)$ は実数値であるが、 $X(k)$ は一般的に複素数である。すべての $X(k)$ ($k=0 \sim N-1$) を求めるためには、 $N \times N (= N^2)$ 回の乗算を必要とする。計算機などで式 (4.1) の計算をするためには、加算よりも乗算の計算時間がはるかにかかる。そこで計算時間を短くするためには、乗算の回数を減らせばよいことになる。そ

ここで $e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ の周期性に注目して、この値をできるだけ簡単にし、同じ値を乗るときはまとめて乗算を行うという方針の下で、式(4.1)の計算を工夫した方法に高速フーリエ変換アルゴリズム (FFT) やウィノグラードフーリエ変換アルゴリズムがある。高速フーリエ変換アルゴリズムのときは、サンプル数 N が2のべき乗のとき、乗算回数を $(N/2) \log_2 N$ の回数でスペクトルを求めることができる。またウィノグラードフーリエ変換アルゴリズムのときは、 N が奇素数のとき、だいたい N 回の乗算で式(4.1)の計算が可能である。これを以下で具体的に示す。 m ステップ目の $u_m(p), u_m(q)$ を使って $m+1$ ステップ目の $u_{m+1}(p)$ と $u_{m+1}(q)$ を、次式のように表す演算を考えてみる。

$$u_{m+1}(p) = u_m(p) + W_N^r u_m(q) \tag{4.3}$$

$$u_{m+1}(q) = u_m(q) - W_N^r u_m(p) \tag{4.4}$$

ここで $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ である。これらの演算を行うフローグラフを図-9 に示す。枝上の値は、乗数値を表し、 \oplus の印は加算を表すことにする。図-9 のフローグラフで表した関係の組合せにより、サンプル数 N が2のべき乗のとき、高速フーリエ変換のアルゴリズムを得ることができる。 $N=2^2$ のときの具体例を図-10 に示す。ステップ数は、 $\log_2 2^2=2$ である。こ

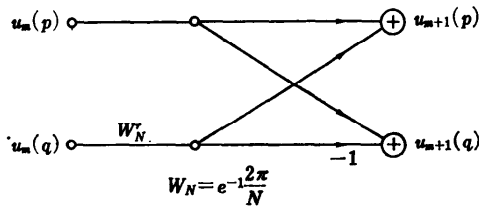


図-9 バタフライの基本区間

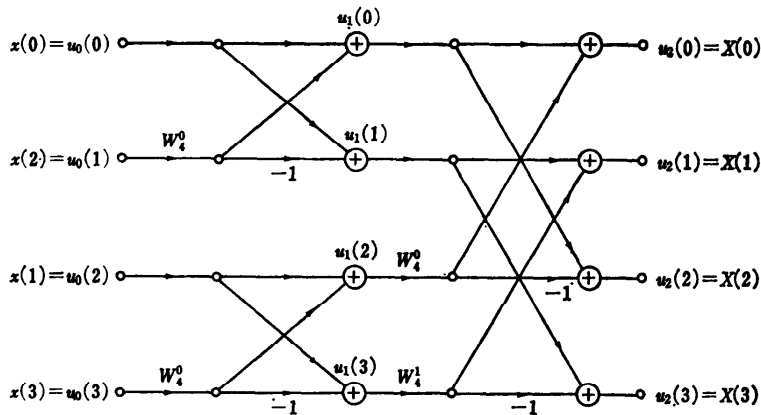


図-10 4 サンプルの FFT

のことに乗算回数は $1/2(2^2 \times \log_2 2^2) = 4$ となる。つまり一般的に乗算回数は $1/2(N \log_2 N)$ 回となることでわかるであろう。

次にウィノグラードフーリエ変換アルゴリズムと呼ばれている方法を示す。

例として、 $N=3$ の場合に、この方法は図-11 のように表せる。 T, S の部分は加算のみの演算で、中央の $d_0 \sim d_1$ を乗するだけである。しかもこの乗数値は、純虚数か実数値である。つまり乗算回数は3回となる。

この他にできるだけ少ない乗算回数でコンボリューションを求めるアルゴリズムなどが、いろいろと提案されているが、小文では省略する。

4.3 適応信号処理の理論

従来アナログ信号を処理する回路は、一単設計し、実現してしまうと、環境の変化や処理する信号が変わっても回路の素子の数値でさえも変えることはなかった。また値などを変えようとすると、なかなか容易でなかった。しかしデジタル信号処理回路においては、これらのことは容易に行うことが可能である。そこで、環境の変化や処理する信号の状況に応じて、処理回路を変える方法を、適応信号処理と呼んでいる。これをモデル化して表すと、図-12 に示すことができる。つまり理想とする信号 $d(n)$ とフィルタの出力信号 $y(n)$ との誤差信号を $\varepsilon(n) (=d(n) - y(n))$ に応じて、係数更新のアルゴリズムによりフィルタの係数を変更していくことである。以下において簡単な例を示す。

いま係数可変フィルタを図-13 に示すような2次の FIR デジタルフィルタであるとする。出力信号

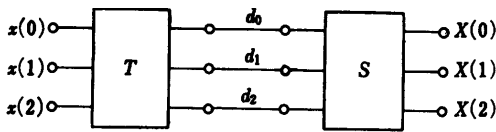


図-11 3 サンプルの WFTA

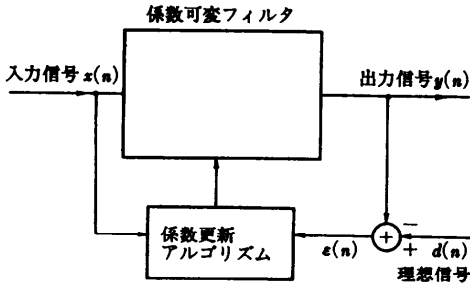


図-12 適応信号処理概念図

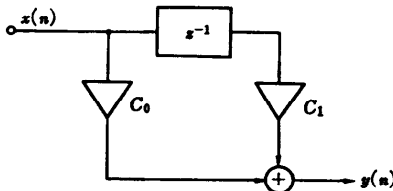


図-13 1 次の適応フィルタ

$y(n)$ は次のように表せる。

$$y(n) = c_0 x(n) + c_1 x(n-1) \tag{4.5}$$

理想とする信号を $d(n)$ とする。 $y(n)$ と $d(n)$ の誤差を $e(n)$ と置き、この値は次のように表せる。

$$e(n) = d(n) - y(n) \tag{4.6}$$

$e(n)$ の 2 乗平均値 $E(e^2(n))$ を求め、この値が最小になるように c_0, c_1 を定める。このため、

$$\frac{\partial E(e^2(n))}{\partial c_0} = 0 \tag{4.7 a}$$

$$\frac{\partial E(e^2(n))}{\partial c_1} = 0 \tag{4.7 b}$$

を満たすように、 c_0, c_1 を定める。この条件を満たす c_0, c_1 は、次のように定められる。

$$r(l) = E(x(n)x(n-l)) \tag{4.8}$$

$$p(l) = E(d(n)x(n-l)) \tag{4.9}$$

と置くと、

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) \\ r(1) & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

の方程式を解くことにより、 c_0, c_1 は定まる。このように、 c_0, c_1 の最適係数値を各時点ごとに直接あるいは近似して計算するアルゴリズムを適応アルゴリズムと呼んでいる。これらのアルゴリズムは、多くの方法が提案されているが、小文では省略する。

前記で明らかなように、ディジタル信号処理に必要な演算は、乗算と加算である。つまり積和演算の回数が非常に多い。この積和演算を共同回路で高速に行うため、DSP では乗算器のハードウェアと加算器のハードウェアが内蔵されて、しかも積和演算が行いやすい構造になっている。また乗算においては、信号に定数を乗ずることも多いので、メモリの値と信号を乗ずることができるような構造に DSP は構成されている。これらのことに関して、詳細は 1.1 の“DSP の現状と動向”で述べられるもので、ここでは省略する。

5. まとめ

小文では、ディジタル信号処理技術の背景となる理論について、入門的な事柄を説明した。これにより、読者がディジタル信号処理に興味をもたれるようになれば幸いである。

参考文献

- 1) Oppenheim, A. V. and Schaffer, R. W. : Digital Signal Processing, p. 574, Prentice-Hall, 伊達訳 (1975). : デジタル信号処理 (上), (下) コロナ社.
- 2) Papoulis, A. : Signal Analysis, McGraw-Hill, 1977, 町田, 村田訳 : アナログとディジタルの信号解析, 現代工学社 (昭 62).
- 3) Oppenheim, A. V. and Willsky : Signal and Systems, Prentice-Hall (1983).
- 4) Haykin, S. : Introduction to Adaptive Filters Macmillan, 1984, 武部訳 : 適応フィルタ入門, 現代工学社 (昭 62).

(平成元年 7 月 17 日受付)