解 説

ファジィ数学とファジィ工学†

堀 内 清 光††

1. はじめに

「堅苦しく厳密で難解なものは読んでもらえんぞ！」と言うアドバイスに答えて，「ファジィ数学」をとにかく面白く紹介し「ファジィ工学」とのかかわりを分析してみたいと思う．そこで，まったく式の意味が分からなくてもなんとなくファジィ数学の目標・目的が感じられるように工夫したつもりである．そのため，わざと批判的（自虐的）な表現も書いてみた．関係者が読むと怒り出すかも知れない．しかし堀も塀も柵もないので「関係者立ち入り禁止」とするわけにはいかない．たちのわるい子供の掘った落とし穴にはまったと思って，軽い気持ちで一笑にふしていただきたい．

2. ファジィ数学とは

「ファジィ数学」と呼ばれるものも「ファジィ工学」と同様に広く多岐にわたっている．しかし，ファジィ数学とは何かと聞かれると，答えるのは難解である．まず定義がはっきりしていない．境界がぼやけているのである．つまりファジィ数学がファジィ集合なのである．そこで何人かの関係者の方々に，どんなものをファジィ数学と言うのかたずねてみた．その結果として，数学の人（もしくは数学に近い人）は比較的狭い範囲をファジィ数学と考え，数学の外の人（工学者を含む）は少し大きい領域までファジィ数学と考えているようである．その延長として数学者の中にファジィを数学と認めない人がいると言える．このことをふまえて私なりにファジィ数学の整理を行った．

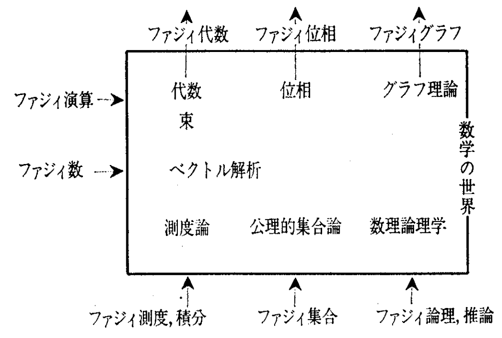


図-1

まずは上の**図-1** を見てもらいたい．

この図の枠で囲まれた部分が数学者が数学と認めているモノとする．ただし，枠内の語句は必ずしも数学の分類をしているわけでなく，ファジィと関連してよく使われている用語を書いていると思ってほしい．この図で，枠の中から外へ飛び出す矢印は「すでに数学として確立された概念を拡張しようとしてファジィ化を試みているモノ」であり，中向きの矢印は「数学と呼ぶには不可能な荒削りな考えを整理して数学に入れようとしているモノ」を表現してみた．先ほど述べた数学者が，まあだいたい数学と認めているのは外向きの矢印である．そして，中向きのモノの多くはまだ数学の領域に達していないと考えられているのである．これがファジィ数学の実状と私は思っている．

3. 応用されている数学について

今後の分析のために，少しファジィから離れて一般的な数学と工学の考え方の違いを比較する．本書の読者は工学にたずさわってられる方なので工学の目的を書くのは釈迦に説法であろう．そこで数学（特に純粋数学）をやっている者が何を考

† Fuzzy Mathematics and Fuzzy Engineering by Kiyomitsu HORIUCHI (Department of Mathematics, Faculty of Science, Naruto University of Education).
†† 鳴門教育大学自然系数学

えているかを考えてみよう．

もともと数学者と工学者は問題意識がまったく異なっている．よくサイエンスとテクノロジィの差異を「why」と「how」と表現することがあるが，物理学者の中でさえ数学者に「現実世界の裏付けの薄い空論や，駆け離れた理論のための理論がそんなに面白いか？」と聞くことがあるぐらいである．数学でもいろんな分野があって，浮き世離れしたものから，結構どろくさい現実感のあるものまで存在すると私は考えるが，数学以外の方からみれば五十歩百歩なのだろうと思う．そして，いろいろな理由を考えて自己防衛するより，要するに「数学は面白い」からやっているのである．数学には数学の価値観や美意識がある．しかし部外者にとって理解しがたい．黙々とスコップで庭に穴を掘っている人間に「面白いのか？」と聞いて「はい，非常に面白いです」と答えられたようなものである．しかし，その「のめり込み」は普通でなく，大きな大洞窟を構築してしまっている．

まず，とにかく未知の方向に掘り進むのが楽しみの一つなのである．見る人によってであるが，ときには金の鉱脈やダイヤモンドと言うべき理論を発見しているのである．

単に穴を掘ると言っても適当にやったのでは，すぐに崩れて生き埋めになってしまう．そこで厳密な計測をして柱や梁をたくさん入れて掘り進んでいるのである．それが近代数学である．そしてその「かっちりと厳密に」やることが数学の快感なのである．逆に言うと，いい加減な手抜き工事を大変嫌っているのである．凄く心配になるのである．はた目には，どうでもよいところでも寸分違わぬ精密さを要求するのである．

また，抽象的に一般化することが奥へ深く掘り進むことなのである．理論をより一般化することでよく似た別の状況でも適応できるようにしておくのである．そして簡単な地上に近い例を示すことは，導入・入門のときにとどめるのが慣例なのである（あまりに分かりきったことを書き並べると軽蔑されるような気がするのは私だけではないはずだ）．もともとは，地に足の付いた分かりやすいところから掘り下げるのだが，すでにいったいどこを掘っているのか分からないような深いところを掘り進んでいるのである．

このような「広くて，深くて，かっちりとした」穴の中に住んでいる数学の研究者からみた工学などの応用とは地上の建造物である．大きく立派なものは皆が凄いと思う．自分たちが固めた土台を使って貰えたときは誇りに思うこともある．日光に当たり輝いているのを羨望の眼差しをもって見ている．しかし地底深くに棲息する数学者「もぐら」族には興味がないことが多いらしい．霞を食べて生きている仙人的「もぐら」氏も結構いる．もっとも最近はコンピュータという建物の床下に住んでいる「もぐら」も多くなった．「もぐら」氏も快適さを求めてコンピュータを（建物というより電気ドリルのような道具の一つとして）使いこなしているようである．しかし，いまだに「紙と鉛筆さえあれば，寝食を忘れる」が数学の真髄である．

「工学を文明とするならば，数学は文化である」と言う人もいる．もっと過激に「数学の応用といっても表面の草むらの算術という芝刈り掃除ぐらいを利用しているに過ぎない」と思っている人もいる．そこで，実際に応用されている数学とはどんなモノがあるのか考えてみた（いつもはそんなことに興味がないので，人に聞きまくった．ほとんど知らないことばかりである．だからここの話は責任もてません）．当然表面にでている簡単なことはすぐに使われる．たとえば三角関数や微分積分の計算．これなどは数学の専攻の者より物理や工学の人間のほうが堪能である．もう少し深いところではフーリエ変換が音響工学やNMRなど周期的な波の解析全般に使われ，組合せのポリア理論は化学で分子の構造解析に，グラフ理論が回路設計に使われているそうである．そのほか群論が結晶構造の理論に応用され，整数論が現代の暗号の作成に使われているという噂を聞いたこともある．確率統計や数値解析はもともと応用色の強い分野もある．たいしたものである!! しかし正直に言ってどのように使われているのか詳しく知らないのである．特に純粋数学をやるということは，どうも応用とは違う方向にベクトルが向いているようであった．そうでなければ数学を専攻しないのかも知れない．だから「今後どんな数学が応用に利用できるか」を数学の研究者が簡単に予想できるものでない．思いもよらぬモノが使われるかも知れないと私は思う．元来は最も純粋で

応用など意識せずに創られたはずのガロア理論でさえも応用があるらしい．数学というデータベースから，とにかく，使えそうなモノなら何でも持って行って試してもらいたい．

「地に足の付いたものをやらなければ」という数学者も少しは存在する．彼らは応用数学者ということになり，工学者に含まれることも多い．彼らが数学と工学などの橋渡しを行っている．彼らが踏み歩いたところが「応用されている数学」と定義すべきなのだろうと考えられる．これからも彼らの働きに期待したい．

4. ファジィ数学各論の外観

論より何とかで，とにかくファジィ数学を少し見ていただこう（数式などは全て飛ばし読みで見てくださって結構です）．

4.1 ファジィ集合の理論

2 を $\{0,1\}$ の二点集合（真理集合），I を実数の $[0,1]$ 区間，X を普通の集合とする．このとき，A が X の部分集合であることを，A が X から 2 への関数であると考えてもよい．ところが 2 は I の一部とみなすと X から 2 への関数は X から I の関数の部分集合である．この X から I への関数を X 上のファジィ集合と定義した．それにあわせて空集合，全体集合，集合の和や積・補集合などの演算も定義された．以下，よく使われるので max, sup を $\vee, \bigvee$ で，min, inf を $\wedge, \bigwedge$ で表すとする．

X：（普通の）集合

$$2 \equiv \{0,1\} = \{No, Yes\} \quad I = [0,1]$$

$A : subset\ of\ X \Leftrightarrow A : X \to 2$

$A : fuzzy\ subset\ of\ X \Leftrightarrow A : X \to I$

I^X：X の $fuzzy\ subset$ 全体

$\phi, X \in I^X$ を次で定義

$$\phi(x) = 0\ \forall\ \ x \in X,\ X(x) = 1 \quad \forall x \in X$$

$A, B\ A_j(j \in J) \in I^X$ に対し

$$(A \cup B)(x) \equiv A(x) \vee B(x)$$

$$(A \cap B)(x) \equiv A(x) \wedge B(x)$$

$$\bigcup_{i \in J} A_j(x) = \bigvee_{i \in J} (A(x))$$

$$\bigcap_{i \in J} A_j(x) = \bigwedge_{i \in J} (B(x))$$

$$A'(x) \equiv 1 - A(x)$$

で，$\cup$，$\cap$，$'$ などを定義

批判的解説

このシンプルな自然な発想が今まで数学の中でなかったわけでなかった．だれでもが思いついた．しかし近代数学は公理的集合論の枠組みの上で構成されているもので，集合の概念を根底からゆさぶることは数理論理学や集合論の専門家をのぞいて考えようとはしなかった．タブーと言うより興味の対象でなかった．ファジィ集合と呼ばれるものは関数なのだから集合とは別の概念の関数として処理するほうが自然であった．集合の概念と関数の概念の「混同」がファジィ集合である．数理論理学では直観論理・多値論理・様相論理がすでに存在していた．直観論理と古典論理の間の中間論理は無数に創れる．ファジィ論理もそんな砂漠の砂のひとつのようにもみえてくる．連続体仮説の問題からブール値集合論もできあがっている．ここで集合論を分かりやすく解説するのは紙面の関係上（筆者の能力上も）不可能である．それらは専門的で難解であって，専門の数学者以外には取っつきにくいものである．

竹内外史先生の書かれた，あの講談社ブルーバックスの「集合とはなにか（はじめて学ぶ人のために）」を評して「素人は手を出すモノでない」と，ある専門家が言っていた．この素人とは他の分野の数学の研究者のことである．このような分野の研究は普通に考えられている世界よりもずっと厳密である．厳密な体系の構成とその性質の分析が目標の学問である．今，ファジィ論理と呼ばれるモノで，数学として認められているものは数理論理の研究者がその1バリエーションとして行っているモノである（このあたりのことを詳しく知りたい方は日本ファジィ学会誌 Vol. 3 No. 4 に掲載された千谷先生の「ファジィの数学的基礎」を一読されることをお奨めします）．工学の応用として考えられているファジィ推論などは，厳密性より実用性に重点がおかれていると思う．目的意識にかなりの隔たりがあるように私には思える．煮詰まってくれば自然と近づくのだろうか？

4.2 ファジィ位相空間論とその周辺

［1］位相空間論とは集合と点の基本的関係から解析学や幾何学の重要な基礎概念を研究する分野である．普通直感的に考えがちな「点列の極限」「関数の連続」などの概念がある．これを集

合の境界の取扱いを精密にすることによって考えられる開集合・閉集合の概念を利用して，シンプルな形に厳密に表現できる．このようなことから始めて，点と点の分離の状態を記述したり，距離が入る空間（距離の概念の存在しない空間は，いっぱいある！）の性質を論じたり，次元とは何かを考えたりする分野である．この分野は集合の概念が直接かかわっているので，まずこの集合をファジィ集合に代えてどのような性質の変化が起こるか調べることが考えられる．

> $T \subset I^X$ が
> （1） $\phi, X \in T$
> （2） $A, B \in T \Rightarrow A \cap B \in T$
> （3） $A_j (j \in T) \in T \Rightarrow \cup_{j \in J} A_j \in T$
> を満たすとき X のファジィ位相 (X, T) をファジィ位相空間と呼ぶ

これは通常 $T \subset 2^X$ で（1）（2）（3）を満たすとき開集合としているのを形式的に $T \subset I^X$ と置き換えているのである．このような形式的な定義をするのは簡単だが，それを押し進めていくと普通の世界では当たり前の重要な性質（たとえばチコノフの定理「コンパクト空間の無限積もコンパクト」）がファジィの世界では成り立たなくなってしまうのである．そこでその意味を考えたり，その回避が研究対象となった．またファジィ空間の位相の考え方は何通りでも考えられるし，普通の位相空間論に登場する概念が非常に多いので現在でもいろんなモノの提案が続いている．

批判的解説

近ごろは，あまりにたくさんの論文があり玉石混交である（石ころがごろごろ，と非難する人もいる）．ファジィ位相空間論は中国でたいへん盛んに行われている．日本の位相空間論の研究は集合論の本流とのかかわりを重視する人は多くても，ファジィ位相の研究者は少ない．ファジィの研究によって伝統的な普通の位相空間論へ帰す成果が得られることを疑問視する向きが多い．これは他のファジィ数学でも同じことか？

［2］ これとは別に位相の開集合の概念自体をファジィ化させることも考えられる．ファジィ集合が開集合である度合いを考えるのである．

> $T : I^X \Rightarrow I$ が
> （1） $T(\phi) = T(X) = 1$
> （2） $T(U \cap V) \geq T(U) \wedge T(V)$
> $(U, V \in I^X)$
> （3） $T(\cup_{j \in J} U_j) \geq \wedge_{j \in J} T(U_j)$
> $(U_j (j \in J) \in I^X)$
> を満たすとき X のファジィ位相 (X, T) をファジィ位相空間と呼ぶ

［1］と［2］の二つは，これからも何度も登場するファジィ理論の典型である．前者はファジィ集合を使った世界の理論整備（再構成）である．ここではA型と呼ぶことにする．これとは別にファジィ集合とは直接の関係がない概念のなんらかのファジィ化をB型と呼ぶことにしよう．後者のファジィ位相はファジィ集合を取り入れた世界に，位相の概念もファジィ化されているのでAB型と呼んでおこう．

［3］ この周辺（周辺などと言うと怒られそうだが相対的に東京は埼玉の周辺と考えよう）では，線形位相空間のファジィ化や，距離空間のファジィ化の試みもある（これにもA型とB型の両方がある）．

批判的解説

数年前に「今ファジィ線形位相空間をやれば確実に世界で屈指となれる！ なぜなら2，3人しか参加してない」と分野の研究者が言っていた．今はどうなっているのだろうか？？

4.2 に関して詳しくお知りになりたい方は，どうぞ筆者までご連絡ください．残念ながら簡単な良い入門書や解説書は思い当たりません．位相空間などの知識が必要です．しかし，論文などの資料はある程度紹介できると思います．

4.3 ファジィの代数系いろいろ

［1］ もともと代数は方程式を解くことの研究から始まっていたが，今では抽象的な概念（群とか環とか体）が主な研究の対象となっている．ここでは同型，準同型写像などが重要な概念となる．そこで代数系（たとえば環）の部分集合である種の重要な性質を満たすものをイデアルと呼んでいるが，代数系の上のファジィ集合が，イデアルの性質を拡張した（継承した）条件を満たすときファジィイデアルと呼び，その性質を調べたりしている（AB型）．

［2］ 上とは別に，ファジィの世界のカテゴリを研究する分野もある．カテゴリ（category，圏）

とは世界の関係を大きな目で，見ようとする考え方である．集合のカテゴリとは集合と集合の間の写像を扱い，位相空間のカテゴリは位相空間と位相空間の間の連続写像を扱う．群のカテゴリでは群とその準同型写像を扱う．このような大きな目でファジィ集合（空間）をながめる研究方法もある（A型）．

［3］ ファジィ集合の真理値は，別にIに限るわけでない．別のものに代えてもよいはずである．その一つが**4.1**で登場したブール値集合である．代数的には lattice（束）と呼ばれる概念あたりがよいだろうと思われた．束をLと書いて，L-ファジィ集合と呼ばれた．その他の代数的概念も真理値として採用することも可能である（A型の変型）．

批判的解説

私見では，工学や応用の人が lattice の利用のことをあまり重視していないのが不思議でならない．数学では一般的な束の方向に走ってしまっているので，話が見えにくいかもしれないが，実数の[0, 1]区間は数学的にはかなり複雑で難解な代物である．実際もっと簡単な構造を使っても良い場合が多いし，特殊な用途に合わせて考えても良い．計算機の中で実数など本当には考えてないと思うのだが，真理値を実数にするのは慣れのせいだろう．**4.4** でも少しだけ登場する「確率とファジィの論争」も[0, 1]以外の真理を使えばおさまるのでないだろうか？ なおファジィ集合の変形で「料金集合？」とか言うのもあるらしい．

4.4 ファジィの測度・積分・確率その周辺

［1］ 測度とはたとえば図形の「面積」（線分の「長さ」や立体の「体積」，物体の「重さ」）のようにAとBのふたつの部分を計っておいて足し合わせた結果で，AとBを図形（物体）として合わせたものを計った結果と一致するという性質（加法性）を満たした集合から実数Rへの非負な関数のことである．この加法性をはずして単調性に弱めたものをファジィ測度と呼んでいる（これは典型的B型）．

批判的解説

この研究は数学よりも基礎工学のほうで盛んに研究されている．数学としては非負単調実数値集合関数であり非加法的測度とよんでもよいと思う．その意味で概念としてはそれほど新しいものではない．加法性のない測度の例はいろいろ考えられるが，おのおのの個別にはともかく全体として数学的な面白い理論になるかどうか疑問である．

なお筆者はまったく興味がないのだが，かって確率統計とファジィの違いは何かとの大論争があったらしい（今でもあるらしいが）．それはファジィ集合の意味するものが主観確率とどこが異なるか？ が論点らしい．ファジィ測度・積分とは直接の関係はない．

［2］ ファジィ集合のエントロピも考えられている．これはファジィ集合のもつ情報量を考えたいときに使う概念である（A型）．

4.5 ファジィグラフ理論

物事と物事とに何かの関係があるとき，事物に点を関係に線を対応させると，直観的に分かりやすく，本質的な部分がはっきり言い表せる．このようにしてできた，点および点と点を結ぶ線（辺）より作られた図形をグラフという．このようなことを研究するのがグラフ理論である．そこで線の結び方をファジィ化させることを考えるのが，ファジィグラフ理論である（B型）．（このあたりのことに関しては本特集の宮本先生の「ファジィ関係に関する諸問題」を参考にしていただきたい）

4.6 ファジィ演算・算術

［1］ ファジィ集合の**4.1**で示した∪や∩以外にいろんな演算を考えることができる．たとえば

$A \cdot B \in I^X$ に対して

$$(A \cdot B)(x) = A(x) \times B(x)$$
$$(A \hat{+} B)(x) = A(x) + B(x) - A(x) \times B(x)$$
$$(A \triangle B)(x) = |A(x) - B(x)|$$
$$(A \oplus B)(x) = (A(x) \wedge B'(x)) \vee (A'(x) \wedge B(x))$$

I上の演算や積分を利用することで，いろんな演算をファジィ集合上に構成することが可能である．これらの性質を研究（たとえば t-norm とか，mode 型演算として整理分析）することを行っている．

［2］ ファジィ数とは「実数上の normal で convex なファジィ集合」であるが，これ同士の演算を定義しその算術についての研究が行われている．

X：線形空間
$A \in I^X$, $\alpha \in I$ に対して
$A_\alpha \equiv \{x \in X \quad A(x) \geq \alpha\}$
A：$convex \Leftrightarrow A_\alpha$：$convex$ $\forall \alpha \in I$
A：$normal \Leftrightarrow \exists x \in X \quad A(x)=1$
A：$fuzzy\ number$
$\Leftrightarrow A$：$convex$ かつ $normal$
注：*fuzzy number* の定義は，さらに条件をつける場合もある

批判的解説

数学ではない応用の分野の人が造ったのか，ここでの算術の基礎をなしているのは誤差論に関連したインターバル演算を基調としている．たたみこみ的な演算構成を行うことになる．数学的には扱いにくく性質の良くないモノとなってしまう．これを別のモノに替えてファジィ数の理論をよりすっきりとした数学的体系に埋め込むことも研究されている．

5. ファジィ数学と工学の接点

4.2 や **4.3** の話は，少なくとも今のところ工学的応用は存在しない．**4.1** も基礎的発想はともかく真に数学となった部分を工学的に応用されているわけではない．しかしこれらはなんとか「数学である」と言えると私は思う．残念ながら **4.4** から **4.6** はまだ数学と呼ぶにまだ「いま一歩」の感のあるモノである．逆に言えば，そのような状態なので，すぐにでも応用が期待できるのかも知れない．それに甘んじることなく数学は歩んで行かなければならないし，そうなる運命であろう．さもなければ学問として成り立たなくなり消え去るのである．

工学や他の応用のみなさんには，**3.** で述べたような一般の数学と同じように気長にファジィ数学を観てもらいたいと思う．

6. ま と め

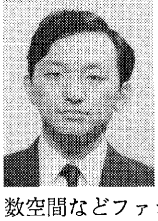
執筆のときの約束で，分かりやすく専門への深入りせず何をやっているかを書いたつもりですが，全体像がぼやっとでも分かっていただけたでしょうか．

数学の厳密好きはファジィの理念と矛盾するようにもみえる．しかし新たな方向へ穴を掘り進めるためには先に入れた柱が時には障害となる．それを取り除いて先へ進もうとも考えるのである．概念のファジィ化は梁や柱をはずしてみる冒険の一つである．ファジィ集合も集合の一般化の試みの一つであり，数学の精神となんら矛盾するものでない．

今までの価値観に新しい風をもたらしたファジィの起こした役割は大きい．しかしファジィ工学の基礎理論のファジィ論理，ファジィ数の計算，ファジィ関係の演算など理論的にかなりの無理を行っていると思われる．また確率統計や誤差の理論の模倣に近い手法をつかってることも多い．これは私見だが，そろそろきちっとした数学的体系のもとでファジィの理論を考え直す必要がきているのではないだろうか．ただし，数学は数学で勝手に増幅しているデータベースのようなものだから，利用者は旨く検索して役立つモノを引き込んでいくべきであろうと思う．結局，そのときは薄暗い穴蔵の中を探検してもらう必要があると思いますが，でもひょっとしてダイヤモンドが落ちているかもしれません．

この文が「懐中電灯」か「ろうそく」の代わりにでもなれば幸いですが，それにしてはパワー不足で暗すぎるのを陳謝して筆を置きます．

（平成4年7月3日受付）



堀内　清光
1987年神戸大学大学院自然科学研究科博士課程修了．1988年鳴門教育大学自然系数学講師．現在に至る．ファジィ位相空間，ファジィ関数空間などファジィ概念を組み込んだ数学理論の構成を研究対象としている．学術博士，日本数学会，日本ファジィ学会各会員．