グラフィクスとＣＡＤ　31－6
（１９８８．２．２６）

１次元１近傍のセル・オートマトンによる平面模様の生成　その２

坂元宗和，高木幹雄
東京大学　生産技術研究所
機能エレクトロニクス研究センター

１９８６年１０月の第１報に続き，モチーフ形態の修正，モチーフ配置の調整，幾何学的変換，陰陽交代模様製作の方法について述べた．オートパターン（１次元セル・オートマトンによる平面パターン）は原理上の制約により通常の幾何学的変換をそのまま実行することはできない．合同変換である平行移動，鏡映，回転と，縦，横方向の拡大等について対応する変換の仕方と制約条件を示した．白黒を反転すれば，もとの模様と合同になる陰陽交代模様は，恒等推移関数でも反転推移関数でも生成できる．反転巡回対称と反転転置対称の陰陽交代模様を制作する方法を説明した．

Pattern Generation Using 1-D, 1-Neighbor Cellular Automata, Part 2

Munekazu SAKAMOTO, Mikio TAKAGI
Center for Function-oriented Electronics
Institute of Industrial Science, University of Tokyo
7-22-1, Roppongi, Minato-ku, Tokyo 106, Japan

Following the previous report dated October 1986, advanced techniques of designing autopatterns (patterns generated by 1-D cellular automata), such as retouching of motifs, adjustment of motif arrangement, geometrical transformations, and designing of alternately symmetrical patterns are discussed. Because the digital plane cannot permit to do usual transformations, their counterparts are proposed. Alternately symmetrical patterns, which are congruent to themselves after exchange of black and white, can be made using either the identity transition function or the inverse one.

はじめに

前報告では，１次元セル・オートマトンの状態遷移を順次並置して多様な模様を作ることができることを示して，モチーフ形成の原理と，モチーフの配置を表わす基準格子，モチーフ凝集の程度を表わす連結対を説明し，恒等推移関数を使った簡単な模様製作の技法を紹介した．

１次元セル・オートマトンの状態推移を順次並置して作った模様というのはくだくだしいので，今後愛称としてオートパターンと呼ぶ．基本事項を摘録すると；オートパターンはずらし繰り返しと同一視でき，幅ｗの初期値〔C〕，ずらし量ｄ，推移関数Ｆを用いて，w:〔C〕|d;F と表記して識別する．オートパターンは周期的であるから，初期値の位相が異なっていても，すなわち，どのセルから始っていても合同になり，これを巡回合同という．

本報告ではこのようにして作ったオートパターンの変形加工と，白黒を反転させてももとの模様と合同になる陰陽交代模様の製作について説明する．

１．モチーフ形態の修正

最も簡単な模様の加工はw,d,F を変化させず，〔C〕の状態のみを変化させるもので，モチーフの配置は変化しない．

これはモチーフの形態を構成するセルを一つ一つ修正する方法である．モチーフ内の修正したいセルが，ｔ段，ｉ番のセル$C^t(i)$ である場合には，対応する初期値セルを修正すればよいが，これは$C^0(i-td \bmod w)$である．

この修正は，該当位置i-td mod wに１をもち他は０からなる幅ｗのマスク〔M〕を使って，

〔D〕 = 〔C〕 xor 〔M〕

を作ることに相当するから，論理演算を一般化し，〔M〕をオートパターンの初期値と見なせば，上式は合成を意味している．この場合は〔C〕の位相を固定し，〔M〕の位相を変化させれば，もちろん合成結果は異なる．逆操作の分解はor演算を考えると分りやすい．このときの分解の仕方は，黒セル数が多ければ，極めて多数になる．

２．モチーフの配置調整

オートパターンの配置はw|d の組合せが作る基準格子で決まる．基準格子は至近，次近，三近の三本の移動一致ベクトルで定まる．至近ベクトルをv1=(x1,y1)，他も同様に書くと，主たる方向性はv1の方向になる．実際上は垂直方向が強く印象付けられるので，三本の基準ベクトルのうち，一番垂直に近く，かつ他に比べてあまりに長くないものが重要である．これをvv=(xv,yv)とすると，オートパターンは，水平幅w/yvの帯に切られる．

モチーフの形は必ずしもこの帯を分割したユニット上にはないが，分割した平行四辺形は同幅の単位を重ねて形成されていると見ることができるので，初期値を区切った単位を導入しておくと都合がよい．この単位をセットという．上の定義からw/yvは整数に限らないので，セット幅ｕは整数化した値になる．

三本の基準ベクトルのうち，一番水平に近いものをvh=(xh,yh)とすると，yhは隣の帯のユニットが何段下にあるかを指す．これを落差ｖという．

２．１　落差調整

オートパターンの原理より，ｖとしては必ず１をとりうる．このときはモチーフの高さｈに対して落差が小さいから，模様は横並びで，少しずつ右下りになっていく．

w mod u=0 のときは，GCD(h,v)=1となる落差ｖも可能である．このようなｖをもつオートパターンは，ユニットの各セットのデータを下からｖ番目ごとに選んだ初期値で作ればよい．新しい初期値は，幅ｕのセット単位で初期値を入れ換えたものになる．このような入れ換えをシャフリングと呼び，Sh(〔C〕#u,v) と書く．

新しいずらし量ｅについては

$$mv = nh+1, \quad e = mu$$

を満足させるはずである．これはｎに０から順に値を代入して解を求めることができるが，最小解を示すために２重線の割算記号を導入すれば，

$$e = \frac{nh+1}{v}\cdot u$$

となる．落差調整後のオートパターンは次のようになる．

w:Sh(〔C〕#u,v)|(nh+1)//v·u;F

２．２　位相差調整

落差調整は縦方向の調整であるが，落差が１であれば，横方向の調整も簡単にできる．このときはｗを変えて，同じｄで生成するので，モチーフの形は変化せず，配置のみ変化することになる．これを位相差調整といい，必要な初期値の増減を増幅操作または減幅操作という．

位相差調整後のオートパターンは次のようになる．

w±v:〔C〕±〔D〕|d;F

ただし，ｖは〔D〕の幅で，－〔D〕のときは長さｖのダミ

ー・ストリングを意味するものとする．〔D〕と増減幅時の位相により結果はいろいろ変化する．

2．3　横間隔調整

セットごとにセルの添削を規則的に行なえば，モチーフ間の横間隔を加減できる．間隔とはいっても，黒セルを追加したり，削除することも含んでいる．このとき，もとのずらし量ｄ＋セットごとに加減したセルの個数＝新しいずらし量としてオートパターンを生成させれば，もとのモチーフによく似たものが生成される．ただし，ｗが変るので，配置は変化する．

セットごとといってもセット幅に対する縦のモチーフの並びは，複数あることが多い．これはずらし量と基準ベクトルとの関係になる．新しい初期値はもとの初期値の該当する位置にセルを挿入するなり，そこからセルを削除すればよい．新しいずらし量は，ずらしベクトルの矢線と交差する増減セルの量をもとのずらし量に加えれば得られる．

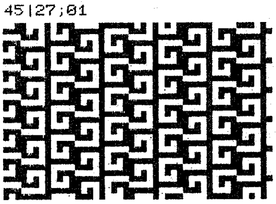
この方法は，増減するセルの数が各段で同じなら，うねった隙間や折線の隙間の増減にも適用できる．条件は増減する隙間を縞と見たとき，その横幅が常に同じであることであり，かなり水平に近い隙間でも可能である．ただし，このときの添削位置は一定間隔にはならない．

2．4　縦間隔調整

モチーフの縦方向の間隔調整は，落差が１の場合は位相差調整になるので，簡単であるが，落差が１以上の場合は初期値の末尾にセルを添削するだけではすまない．

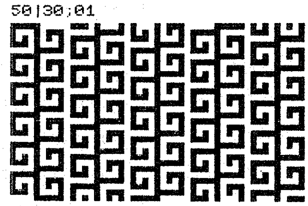
この場合は，まず，ユニットの帯が垂直になるように初期値を増減して，位相差調整する．こうして落差調整のシャフリングが可能になったら，実施する．さらに，この結果に対してもとの方向性が再現されるように位相差調整すればよい．

45|27;01



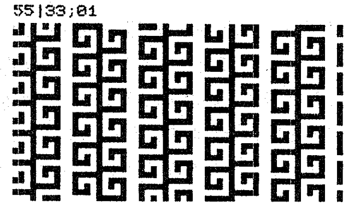
右の横間隔削減

50|30;01



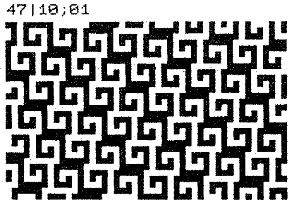
下の落差変更
黒モチーフ保存

55|33;01



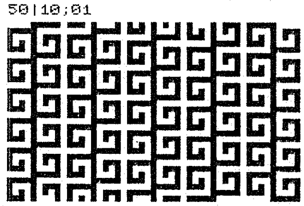
左の横間隔添加

47|10;01



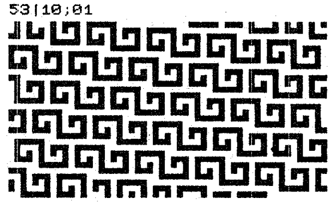
右の位相差変更
３セル削減

50|10;01



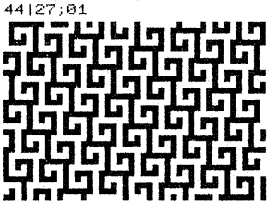
原模様“枝雷”

53|10;01



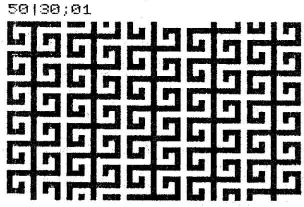
左の位相差変更
３セル添加

44|27;01



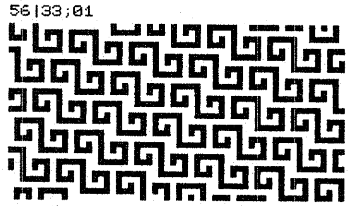
上の縦間隔削減
右の位相差変更

50|30;01



上の落差変更
白モチーフ保存

56|33;01



上の縦間隔添加
左の位相差変更

３．幾何学的変換

モチーフの形態と配置を操作する幾何学的手法として第一に必要なものは合同変換である．合同変換によって自己合同なものを対称形という．他に重要な幾何学的変換には相似変換があるが，ここでは縦，横の拡大までを扱う．

オートパターンは原理上の制約により通常の幾何学的変換をそのまま実行することはできない．もちろん，オートパターンをアナログ図形として変換するのは造作もないことである．ここで言う変換はディジタル平面上でのもので，対応する類似操作とその実行可能条件について述べる．

合同変換には平行移動，鏡映，回転がある．オートパターンでは整数位置しかとりえないので，平行移動は整数値を各軸方向の移動量とする(m,n) のみ可能である．y座標値がnならば，x座標値はnd mod wであるから，これとmとの差m-(nd mod w)だけ初期値の位相をずらせばよい．また，鏡映は，X軸に対して４５度の倍数の傾斜をもつときにのみ可能である．上下鏡映はw:〔C〕|w-d;F ，左右鏡映は初期値の逆順配列R(〔C〕)を使ってw:R(〔C〕)|w-d;Fで可能であるから，４５度の奇数倍のときはこれと転置を併用すればできる．回転は９０度の倍数しかできない．奇数倍のときの転置は回転拡大の説明のところで述べる．１８０度のときはw:R(〔C〕)|d;Fで可能である．

回転は等倍の場合は９０度の倍数しかできないが，拡大を伴えば，他の角度も可能になる．従って，回転ではなく，回転拡大を基本的な操作と考える方がよい．回転は回転拡大の特殊な場合と見ることができる．

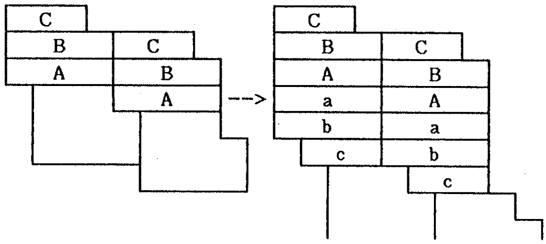
拡大については，横方向は自由であるが，純粋な縦方向は生成の原理によって不可能である．ここでは近似的な縦方向拡大で代用する．オートパターンでは，最小単位が存在するから，特別な場合以外，縮小は情報を失わずに実行することができない．拡大の逆操作としてなるべく自然に定義した場合は，サンプリング縮退になる．

以上によりオートパターンの基本的幾何学変換は，平行移動，鏡映，横拡大，縦拡大，回転拡大となる．

３．１　回転対称化

初期値を２回続けて，同じずらし量で生成しても，できるオートパターンは合同である．２番目のものを逆順のものに換えると，逆順の部分の初期値によるオートパターンはもとの初期値によるオートパターンを回転したものになる．従って，新しいモチーフは回転対称になる．もとのモチーフが接触せず維持されるなら，回転対称の対ができる．

ずらし量をセットにとったユニットでこの関係を示す．小文字は対応する大文字セットの逆順のものである．図で分るように最初と最後のセットで界面が生じるので，位相のとり方によってできる模様は異なる．



この操作を逆順倍幅による回転対称化という．そのオートパターンを次のように書く．

2w:〔C〕+R(〔C〕)|d;F

３．２　横拡大

オートパターンを横方向に２倍に拡大した模様を考える．各段は初期値をセルごとに２回ずつ繰り返したものである．このとき，ずらし量も２倍になっている．一般に横にｎ倍するには，セルをｎ回ずつ繰返し，ずらし量をndとする．

セルごとにｎ個ずつ並べて新しい初期値にすることをセル倍幅操作という．初期値をそのまま繰返すものは区別して全倍幅操作と呼ぶ．セル倍幅により横拡大したオートパターンは次のように書く．

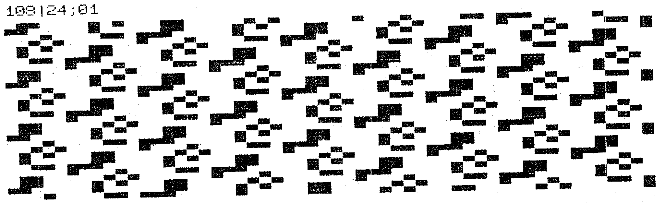
nw:n*〔C〕#1|nd;F

３．３　縦拡大

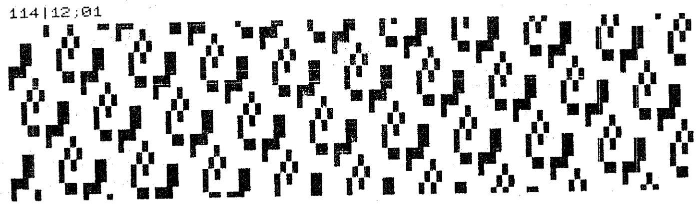
縦に拡大することは，同じ段を繰り返すことであるから，ずらし量が０ということになる．ところが，模様を形成するには，ｎ段ごとに必要なずらし量でずらさなければならない．これはオートパターンの原理に反しているので，不可能である．近似操作を捜さなければならない．

初期値をずらし量ｄのセットに区切って，これを２回ずつ繰返すセット倍幅操作を行なう．これをずらし量ｄで生成すれば，同じセットが下に続いたあと，隣のセットが下に来ることになる．実際にはこれだけでは落差が２になってしまい，オートパターンとして実現できない．そこで，最後の半端なセットには不足分Xを添加してずらし量と同じ長さになるようにしなければならない．図で示せば，下のようになる．このような不足分挿入を伴うセット倍幅をAm(〔C〕#d,n,〔X〕) と書く．

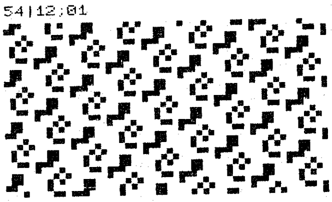
横拡大

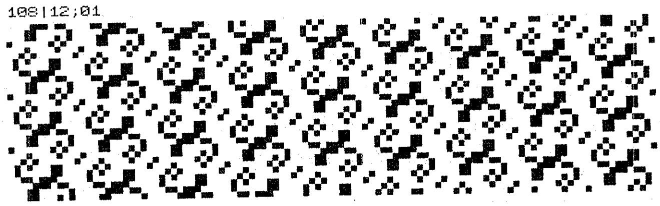


縦拡大

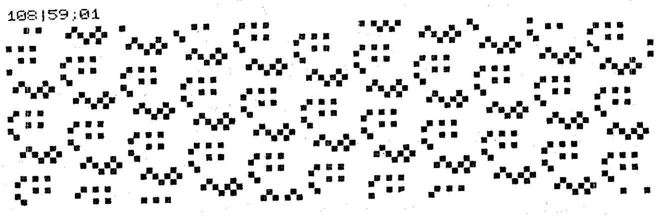


原模様“春日野”

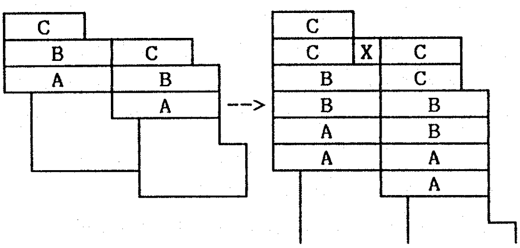




回転対称化



回転拡大
−４５°，長さ√２倍



セット倍幅による縦拡大後のオートパターンは，次のようになる。

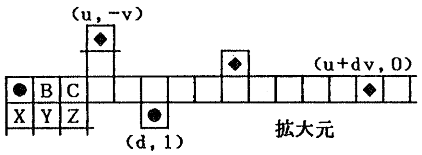
nw+(n−1)(−w mod d):Am(〔C〕#d,n,〔X〕)|d;F

ただし，〔X〕 は長さ(−w mod d)である。

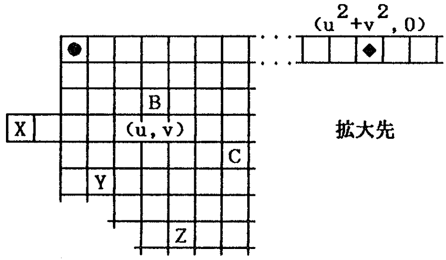
３．４　回転拡大

オートパターンのセルはいうまでもなく正方格子上に配置しているから，これを別の正方格子上に拡大して移殖することができる。拡大先の正方格子としては格子点が格子点に乗るような拡大ならば何でもよいわけであり，もとの横の隣接格子点，つまり位置(1,0) の格子点の移殖先の位置(u,v) を示せば，拡大が特定できる回転拡大である．しかし，(u,0) とすることは，m段目までの状態配列の位相を同じにすることにほかならないから，前項の縦拡大と同じ理由で不可能である。

このとき，単位格子の面積はu^2+v^2 となるから，同じ段に並ぶu^2+v^2 番目ごとのセルの状態を知ることができれば，拡大後の初期値を得ることができる。



拡大元



拡大先

拡大先では単位格子の面積がu^2+v^2となるから，初期値はu^2+v^2の幅のセットに分割できる．このうち拡大元のセルによって決まるのは１セルのみであるから，他のセルは適宜埋めればよい．白セル，黒セル，自分自身の状態，元の初期値において自分の前にあるセルの状態などが考えられる．どれを使うかで回転拡大後のオートパターンが変ってくるのはもちろんである．

拡大先でu^2+v^2の位置に来るセルは，複素数の割算によって容易に分るように，拡大元のオートパターンでは$(u,-v)$の位置にあるものである．従って，初期値においては$(u+dv, 0)$にある．よって，拡大元の初期値のu+dv番目ごとにセルを取り出して並べればよい．ただ，

$GCD(w, u+dv) \neq 1$

の場合は，部分周期が生じて，拡大元の初期値セルのすべてを尽くすことができない．従って，拡大先を指定する場合，このような(u, v)の組は指定できない．

新しいずらし量eは着目セルの右隣りのセルが新初期値で占める位置によって決めることができる．

この位置は単位格子面積の倍数だから，$p(u^2+v^2)$と置けば，拡大の定義より

$$u \equiv p(u^2+v^2)+ve \quad (\bmod\ (u^2+v^2)w)$$

従って，

$$e = \frac{u+(mw-p)(u^2+v^2)}{v}$$

ところで，pは拡大元の初期値を着目セルからu+dv番目ごとに選んでいって，着目セルの右隣りのセルに至る順位であるから，

$$p = \frac{nw+1}{u+dv}$$

である．

回転拡大のための初期値の作り方は，以上の説明ではセル増幅ののち，セット幅でシャフルしているが，セル幅でシャフルしてから，セル増幅しても同じである．よって，回転拡大後のオートパターンは次のようになる．

(u^2+v^2)w:Sh(〔C〕, u+dv)#1+〔D〕|e;F

ただし，〔D〕は長さu^2+v^2-1のストリング，eは上記説明のとおり．

４．陰陽交代模様の製作

陰陽交代模様とは，白黒模様の色を反転したときに，合同変換，すなわち平行移動，回転，鏡映によってもとの模様と合同になる模様をいう．たとえば，市松模様は最も簡単な陰陽交代模様である．図と地を反転させても同じモチーフが見えるので，モチーフが複雑であれば，その巧妙さが面白く，実用的に重要な模様である．モチーフ再現法による製作については，すでに第１報で報告したので，それ以外の技法を説明する．

再現法によってできるオートパターンは反転して，平行移動すれば，もとのパターンの合同になるものであった．この性質をもつ陰陽反転模様は，反転巡回対称であるという．転置してから平行移動すれば，合同になるものは，反転転置対称という．

４．１　反転巡回対称

推移関数１０によるオートパターンは，１段ごとに１と０を反転させたずらし繰り返しで作るから，いかなる初期値，いかなるずらし量によっても反転巡回対称の陰陽反転模様となる．

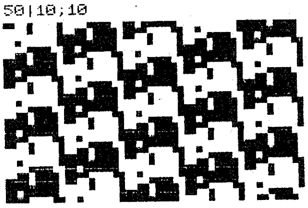
従って，任意の初期値，ずらし量を与えても陰陽反転模様ができるわけであるが，実際的な模様を得るためには，選抜が必要である．今回も，すでに報告した推移関数０１の場合と同じく，指標としてモチーフの配置の良さと形の良さを用いた経験的な評価関数でスクリーニングした．ただし，評価関数は多少異なったものになる．

配置の良さは対応する推移関数１０での基準格子だけでなく，推移関数０１での基準格子の良さも加味しなければならない．これは，推移関数１０のモチーフは図でもあり，地でもあるから，同色のモチーフ間の配置だけでなく，異色のモチーフ間の配置も意識されるからである．

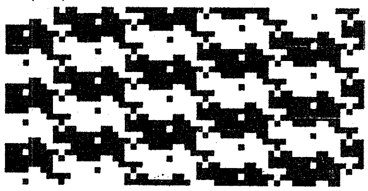
評価関数は次のようになる．

$V(d)=L1(d)L2(d)C(d)$

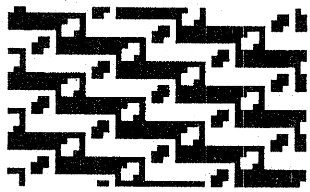
50|10;10



60|24;10

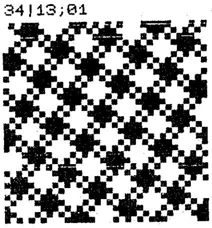


50|15;10

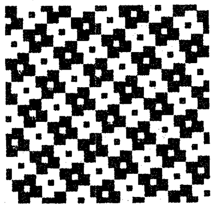


反転巡回対称

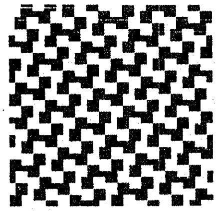
34|13;01



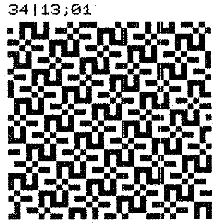
34|13;01



34|13;01



34|13;01



反転転置対称

ただし，

$$L1(d) = r1^2 / r2r3$$

$$L2(d) = s1^2 / s2s3$$

L1(d) 中のr1, r2, r3は推移関数０１での基準ベクトルの長さ，L2(d) 中のs1, s2, s3は推移関数１０での基準ベクトルの長さである．

$$C(d) = [3w/2+2R(0)+3R(1)-3R(d) -R(d-1)-R(d+1)] / ([3w/2-2R(0)^2/w+2R(0)]/8)$$

R(d)は環状自己相関関数である．

C(d)は推移関数０１の結合度と同じ考えに立つものであるが，関数１０の場合には，１段ごとに白黒が反転するので，このために環状自己相関関数で書くと違った形になる．横，縦，右斜，左斜の結合数をそれぞれS(1), S(d), S(d-1), S(d+1) とし，結合数の平均をSとすれば，上記の式は次の意味をもつ．

$$C(d)=[3S(1)+3S(d)+S(d-1)+S(d+1)]/S$$

推移関数０１の場合はS(i)の代りにR(i)を使い，SにはR(0)^2/2 を使えばよい．ところが，推移関数１０の場合，S(1)は，偶数段での黒黒の連結は１１の連結を表すからR(1)であるが，奇数段での黒黒の連結は実は００の連結なのでw-2R(0)+R(1)を使わなければならない．従って，横方向の連結数としてはこの平均w/2-R(0)+R(1) を使う．S(d), S(d-1), S(d+1)については，段ごとに白黒が反転しているから，黒白または白黒の連結数を数えなければならない．これはどちらも同じで，S(i)の代りにR(0)-R(i) を使えばよい．こうして，上式の分子が得られる．分母はその期待値である．

C(d)は１または０が連続している場合に大きくなるから，乱数によって初期値を発生させる際に次の桁に同じ値が出現するようにすれば効率がよい．実験的には７０％程度の遷移確率が良かった．

推移関数０１による場合，初期値列の０と１の数は等しいから，幅wは偶数2vである．初期値を反転し，sだけ巡回シフトして一致するならば，セルの値はs番目ごとに反転している．このs番目ごとの系列の長さはGCD(w, s)となるから，独立な系列はw/GCD(w, s)本ある．このうち，s=v のときが最も自由度が大きい．これは幅vの任意の２値数列〔N〕 にその反転~〔N〕をつなげて幅wの２値数列〔M〕 とするものである．~〔M〕=~〔N〕〔N〕であるから，反転したものをvだけ左に巡回すればもとに一致する．さらに

〔M〕|d;01 ≡ 〔M〕|d+v;10

となるから，推移関数１０によるオートパターンの一部をなしていることが分る．

４．２　反転転置対称

これは反転したあと転置してから平行移動すれば一致する陰陽交代模様である．初期値幅wは，初期値における０と１の数が等しいことから，偶数である．次に，転置した場合にもずらし量dが同じでなければならないから，

$$d^2+1 \equiv 0 \pmod{w}$$

となり，dは奇数である．d=2n+1として

$$kw = 2kv = 4n^2+4n+2$$

すなわち，

$$w = 2v;\ v \mid 2n^2+2n+1$$

この条件を満たす幅wの初期値の状態とそれをずらし量dでシャフルして，適当量だけ巡回シフト（たとえば1セル右シフト）したものを並べると，たとえば

abcdefghijlkmnopqrstuvwxyz

vafkpuzejotydinsxchmrwbglq

これよりaとvは反転した関係にあり，v→w→b→aと反転系列がたどれる．一つの系列は，aとa（$\overline{a}$の反転）などで表わすことができる．他も同様にすれば，結局

$$a\overline{a}cde\overline{c}g\overline{e}i\overline{id}l\overline{di}i\overline{e}g\overline{c}edc\overline{a}a\overline{glg}$$

となる．各変数は独立であるから，初期値は各変数に0または1を任意に与えて得られる．

まとめ

本報告では，オートパターンの模様製作の技法としての実用性をより高めるべく，既存の模様に対して適用可能な各種の変換と，興味深い陰陽交代模様の制作の仕方を述べた．記号法は未だ不十分であるが，便宜を考えて導入した．未決定のもの，たとえば，2配列の要素を交錯させるのはAPLのmesh演算と同様であるが，そのまま導入するのは調和を破るので，考慮中である．

説明した内容は，技法とその基礎となる原理であるけれども，人間の仕事をコンピュータに肩代りさせるためのものではない．こうした応用は代用にすぎず，技術水準を低下させるのが常である．オートパターン法は，まったく無意味なランダム配列から人間は形と意味を読み取るということを，創造力を引出す刺激とするというアイデアによって，創造的マン・マシン・システムのあり方を示唆している．本方法が専門家にとって，発想法，表現法としても受容れられることを希望する．

参考文献

番号は第1報に続く．

[11] Stephen Wolfram: Universality and Complexity in Cellular Automata; Physica 10D (1984) pp1-

[12] 伏見康治：模様の科学；数学セミナー（1967．5－69．12）

[13] 中村義作：エッシャーの絵から結晶構造へ［MONAD BOOKS1］；海鳴社（1983）

[14] Branko Gruenbaum, G.C.Shephard: Tilings and Patterns; W.H.Freeman and Company (1987)

[15] 坂元宗和，高木幹雄：1次元1近傍のセル・オートマトンによる平面模様の生成；情報処理学会グラフィックスとCAD研究会資料86－CAD－23－3（1986）－－－第1報

[16] 高木幹雄，坂元宗和：1次元1近傍のセル・オートマトンによる平面模様のデザイン；電子情報通信学会創立70周年記念総合全国大会1629（1987）

[17] 高木幹雄，坂元宗和：オートパターン法による陰陽交代模様のデザイン；電子情報通信学会春期全国大会（1988）投稿中