グラフィクスとＣＡＤ 32－1
（１９８８．５．１３）

多面体細分割による漸近的曲面設計

中西一浩，鶴岡信治，木村文隆，三宅康二
三重大学工学部電子工学科

本稿ではソリッドのエッジ（稜線）が指定した曲率半径を持つ円柱面に漸近的に近づくいくつかの円柱面型多面体細分割について検討する．すべてのエッジに対して同一の処理を行なう単純円柱面型と，その問題点を改良したミニマム型および場合分け型の多面体細分割を比較し，場合分け型の多面体細分割によって最も満足すべき結果が得られることを示す．また，エッジを平面で削り取る単純な面取り処理に適したいくつかの多面体細分割についても検討する。

Asymptotic Surface Design based on Polyhedral Subdivision

Kazuhiro NAKANISHI Shinji TSURUOKA Fumitaka KIMURA Yasuji MIYAKE
Faculty of Engineering, MIE University
Kamihama 1515, Tsu, 514 JAPAN

This paper discusses some cylindrical polyhedral subdivision methods which asymptoticaly make edges of a solid approach to cylindrical surface with specified radius. A simple cylindrical type subdivision applys same operasions to all edges. A minimum type and a combination type subdivisions are the improved version of the minimum type. The combination type is shown to be most preferable among them.

Some other simple polyhedral subdivisions suitable for chamfering edges by plane are a lso discussed.

１．はじめに

筆者らは，コンピュータ・グラフィックス，ＣＡＤ，ロボティックス，コンピュータ・ビジョン等で用いる，ソリッドモデラーに関する基礎研究のひとつとして，ＬＩＳＰ言語による対話型プロトタイプ・ソリッドモデラー”ＰＲＩＳＭ”(Prototypal Interactive Solid Modeler)(1)(2)を開発しているが，多面体細分割による漸近的局面設計の機能を実現し，いくつかの結果を得たので報告する．

２．多面体細分割

多面体細分割はCatmull, Clark(3)によってＢースプライン曲面の生成手法として提案され，Doo, Sabin(4)によって，数学的な性質が詳しく調べられている．多面体細分割は，任意の（不規則な）制御点メッシュに対して自由曲面を生成することができるとともに，曲面の生成過程が段階的，直感的であり試行錯誤的な対話的曲面設計に適している．最近の報告としては，Nasri(5)による，面の境界（縁）の制御に関するもの，山口ら(6)のテンションや確率モデルの導入による形状の制御に関するものがある．これらの研究は，いづれも自由曲面の発生を目的としたものであるが，本稿ではソリッドのエッジ（稜線）が指定された曲率を持つ円柱面に漸近的に近付く多面体細分割（円柱面型多面体細分割）について検討する．一般に工業製品は，自由曲面とともに，エッジを面取りしてできる円柱面を多く含んでいるので，このような多面体細分割の応用は広いと考えられる．また，エッジを平面で削り取る単純な面取り処理に適したいくつかの多面体細分割（面取り型多面体細分割）についても検討する．

双二次形式の多面体細分割は基本的には次の処理を行なう．

まず，ソリッドの各面に対してその頂点数に等しい数の新頂点を面上に発生したのち，新頂点をもちいて以下の３種の面を発生してソリッドを再構成する（図１）．

（１）同一面上の新頂点をエッジで結んで新しい面(FACE-Face)をつくる．

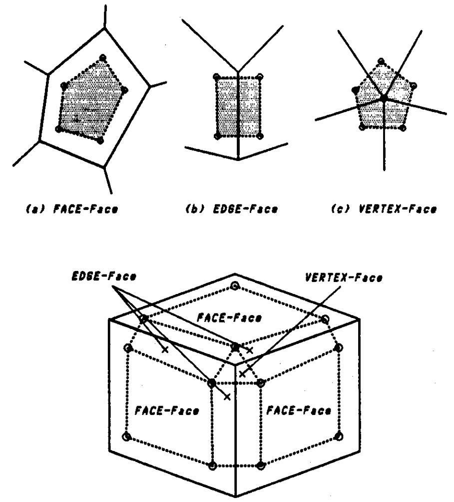

図１　新頂点と３種の面

（２）旧エッジの両端の頂点に対応する新頂点のうちそのエッジの両側にある面上にある四つの新頂点をエッジで結んで新しい面(EDGE-Face)をつくる．

（３）旧頂点に対応する新頂点をエッジで結んで新しい面(VERTEX-Face)をつくる．

一般に，この多面体細分割を再帰的に繰り返すと，面の数はおよそ４倍ずつ増えていくが，２回目以降の細分割では非四角形の数は一定で増加しない．これは，EDGE-Faceがすべて４角形になること，新頂点に隣接するエッジは必ず４本となるため，再帰２回目以降のVERTEX-Faceがすべて４角形になるためである．

２．１　Doo & Sabin 型多面体細分割

新頂点の座標を文献 (3),(4)の方法で決定すると，得られる多面体は双二次スプライン曲面に近付く．　ここでは，文献(4)のDoo & Sabinによる多面体細分割について簡単に説明する．

ＶおよびＶ’をそれぞれ旧頂点，新頂点の位置ベクトルとし，各面のｉ番目の新頂点の位置を次式で決める．

$$V_i' = \sum_{j=1}^{n} W_{ij} \cdot V_j$$

$$W_{ij}=(n+5)/4n \quad (i=j)$$

$$W_{ij}=[3+2\cos\{2\pi(i-j)/n\}]/4n \quad (i\neq j) \qquad (1)$$

ｎは面の頂点数，ｉ，ｊは頂点の番号である．

Doo & Sabin 型多面体細分割の例を図２に示す．なお，ここで用いた初期ソリッドを以後「トリポッド(tripod)」と呼ぶことにする．

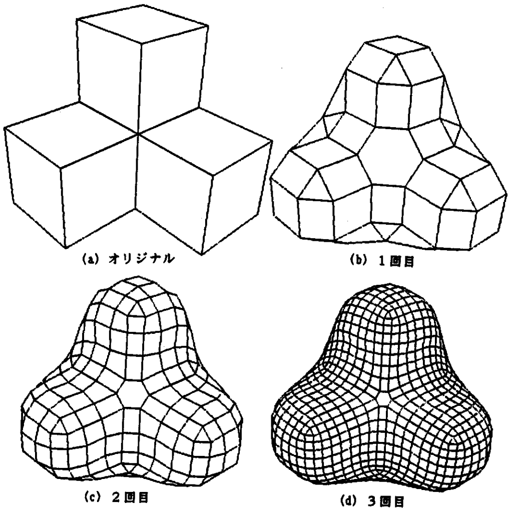

図２　Doo & Sabin型多面体細分割の例

この方法には以下の特徴がある．

(1)４角形格子を細分割してできる格子は，双２次Ｂ－スプライン曲面に近付く．

(2)すべての多角形は，その重心に向かって収束する．

(3)すべての多角形がその角数に関係なく，一様な速度で収束する．

(4)凹多角形やねじれた多角形を含む任意の多角形が正アフィン平面多角形に収束する．

(5)非四角形が収束してできる特異点においても接線の連続性が保たれる．

以上のように，Doo & Sabinの方法には，多くの長所があるが，種々の曲面を設計する場合にこれだけでは十分でなく，例えば，穴のある多角形を持つソリッドに直接適用できない，凹多角形の凹角にできる新頂点が面の外側にでき，面取りを目的とする場合の直感に合わない，自由度がなく最初のソリッドに対して漸近曲面が一意に決ってしまう，工業製品に多く用いられている円柱面や球面（の一部）を漸近的に設計することができない，カット幅などを指定した単純な平面による面取りができないなどの問題がある．以下では上述の問題に対処するため，単純な平面面取りのための面取り型多面体細分割と，エッジを漸近的に円柱面に近付ける円柱面型多面体細分割について検討する．

３．多面体細分割による漸近的曲面設計

３．１面取り型多面体細分割

ここでは，まず，エッジを平面で削り取る，切削加工に相当する，面取り型多面体細分割について検討する．

面取りの幅や結果の形状は新頂点の取り方に依存する．そしてこの新頂点の位置を決めるパラメータとしては，例えば，面取りの幅，削る深さなどがユーザにとって指定しやすい．

ここでは，次の３つの新頂点決定法を考える．

（１）角２等分型多面体細分割

これはパラメータとして頂点からの距離１を指定するもので，面の各頂点において，内角を２等分する方向に距離１だけ離れた点を新頂点とするものである（図３）．旧頂点から新頂点へ向かうベクトルを考え，以後変位ベクトルと

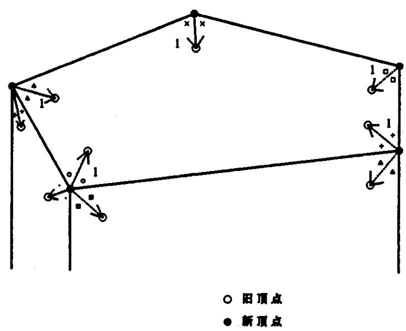

図３　角２等分型多面体細分割の新頂点

呼ぶことにする．

この方法の長所は，新頂点の決め方が直感的で分かりやすいこと，面取りの幅を1で制御できること，凹多角形や穴のある多角形のあるソリッドに適用でき，その結果も自然であることである．短所は，距離1が絶対値なので，細分割を繰り返すたびに1を注意深く選択する必要があり，反復適用による漸近曲面の設計には適していないことである（1をうまく選ばないと結果の面が裏返ることがある）．

（２）カット幅指定型多面体細分割

これはパラメータとしてエッジからの距離dを指定するもので，このdをカット幅と呼ぶ．各面に対し，その内側にdだけ辺を平行移動し，それにより囲まれる小さな多角形の各頂点が新頂点となる（図４）．

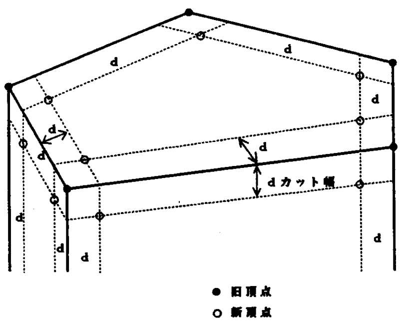

図４　カット幅指定型多面体細分割の新頂点

この方法の長所及び短所は角２等分型と同様である．

（３）ベクトル和型多面体細分割

これはパラメータとして定数αを指定するもので，各面に対し，旧頂点を始点とし，その両隣の頂点を終点とする２つのベクトルを考え，そのベクトル和をα倍したものを変位ベクトルとする（式（２）および図５）．

$$Vi' = Vi + \alpha\,(Vi{+}1 - Vi) + \alpha\,(Vi{-}1 - Vi) \qquad (2)$$

この方法で細分割した例を図６に示す（α＝0.2）．

ベクトル和型の長所は，角２等分型およびカ

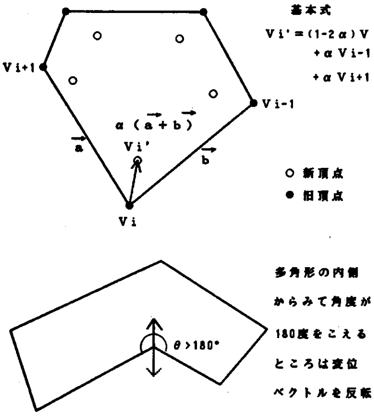

図５　ベクトル和型多面体細分割の新頂点

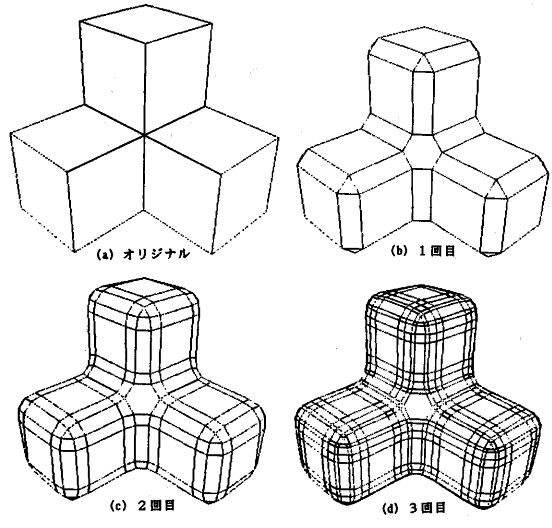

図６　ベクトル和型多面体細分割の例

ット幅指定型の長所に加えて，穴のない凸多角形のみからなるソリッドに対しては何回でも反復適用できること，凹多角形，穴あき多角形を持つソリッドに対してもある程度反復適用でき

ることであり， 短所は， Doo & Sabin型に比べて3角形の収束は早いが5角形以上の多角形の収束が遅いこと，凹多角形，穴あき多角形を持つソリッドに対する適用回数とαのとり方に制限があることなどである（凹多角形の凹角部において変位ベクトルを反転しなければ，後者の問題は生じない）．

以上の，面取り型多面体細分割の応用例のひとつとして，一回目の細分割にベクトル和型の細分割を用いることにより，二回目以降のDoo & Sabinの方法で発生する自由曲面の形状を制御する例を図7に示す．この例は，$\alpha=0.1$および$\alpha=0.25$の場合の違いを示している．

このように，多面体細分割法は1回目の細分割後の形状に大きく影響されることがわかる．

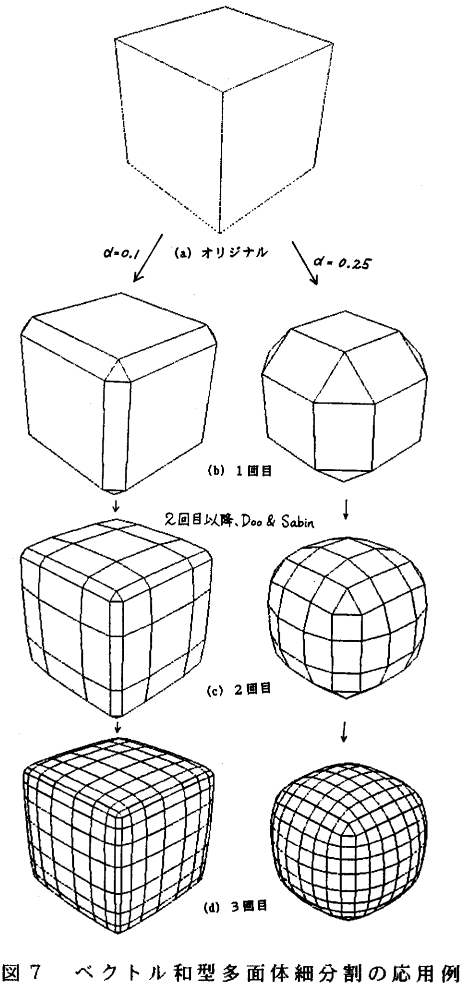

図7　ベクトル和型多面体細分割の応用例

3．2円柱面への漸近的曲面設計

以下には，与えられた多面体のエッジを指定された曲率を持つ円柱面に近付けるための，4通りの新頂点の位置の決め方について比較検討する．

（1）単純円柱面型多面体細分割

単純に，すべてのエッジを漸近的に円柱面に近付ける方法を考える．

曲率半径rに応じて次式で，面取りのカット幅xを決定する（図8）．

$$x=2r\{1-\sin(\theta/2)\}/\sin\theta \qquad (3)$$

ただし，

x：面に対する面取りのカット幅

r：円柱面の曲率半径

θ：エッジをはさむ2面のなす角

次に，求めたカット幅から新頂点の座標を以下のように決定する．

各面の1つの頂点にその面に含まれる2つのエッジが隣接しており，この2つのエッジの各々に対してカット幅x1,x2が上式によって求めら

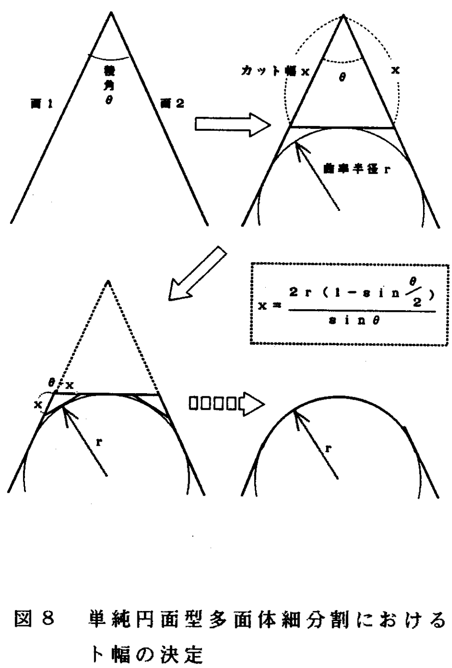

図8　単純円面型多面体細分割におけるカット幅の決定

れる．そこで，２つのエッジからx1,x2だけ面の内側に平行線を引き，その交点を新頂点Ｖ’とする（式（４）および図９）．

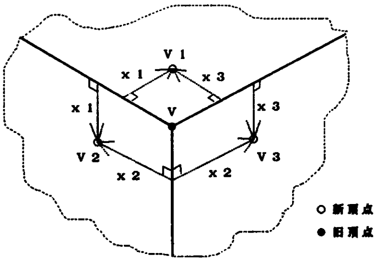

図９　単純円柱面型多面体細分割の新頂点

$$V' = V + v1 + v2$$
$$v1 = e1 / \| e1 \| \cdot x2 / \sin\psi$$
$$v2 = e2 / \| e2 \| \cdot x1 / \sin\psi \qquad (4)$$

ただし，

Ｖ：元のソリッドの頂点（位置ベクトル）

ｅ１，ｅ２：Ｖに隣接するエッジＥ1，Ｅ2をＶを始点したときのベクトル

x1，x2：エッジＥ1，Ｅ2に対応するカット幅

ψ：エッジＥ1，Ｅ2のなす角（多角形の内角）

この方法の欠点として細分割を進めていくと元のソリッドの頂点付近にできる面が裏返る場合がある．極端な例ではあるが，面の裏返る例を図１０に示す．

（２）ミニマム型多面体細分割

新頂点の位置を以下のように決定すると面の裏返りが起きなくなる．

$$V' = V + v1 + v2$$
$$v1 = e1 / \| e1 \| \cdot \min(x2/\sin\psi, 0.25 \| e1 \|)$$
$$v2 = e2 / \| e2 \| \cdot \min(x1/\sin\psi, 0.25 \| e2 \|) \qquad (5)$$

この方法を単純円柱面型とベクトル和型の変位ベクトルの最小を取るという意味で，ミニマム型と呼ぶことにする（図１１）．

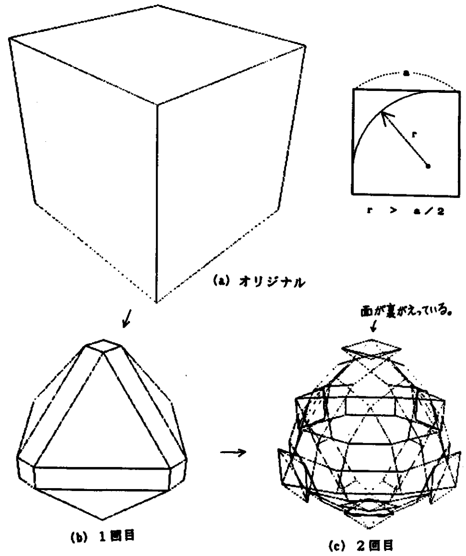

図１０　面が裏返る例

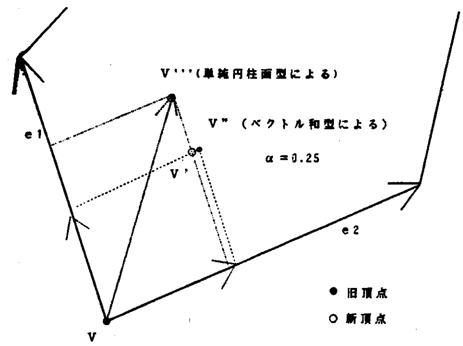

図１１　ミニマム型多面体細分割の新頂点

新頂点の位置は，円柱面型のカット幅が十分小さい面は単純円柱面型，カット幅が十分大きい面はベクトル和型の場合と同じように収束していく．

ミニマム型多面体細分割の例を図１２に示す．この方法の長所は，アルゴリズムが比較的簡単で，面の裏返りがないことであり，短所は図１２のソリッドの中央の多角形に見られるように角数の多い面の収束がベクトル和型よりさらに遅いこと，頂点付近に生じる多角形の性質が明確でないことである．

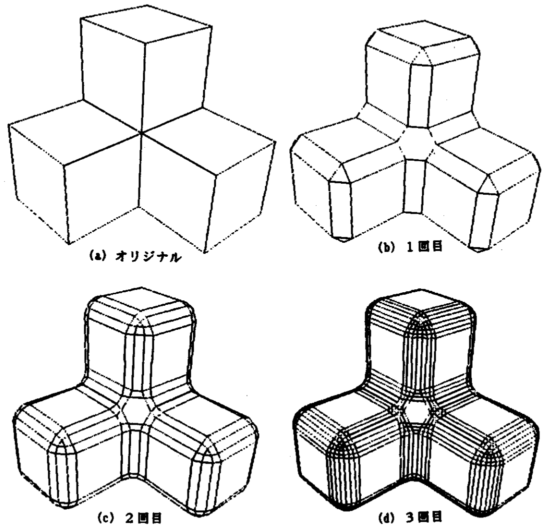

図１２　ミニマム型多面体細分割の例

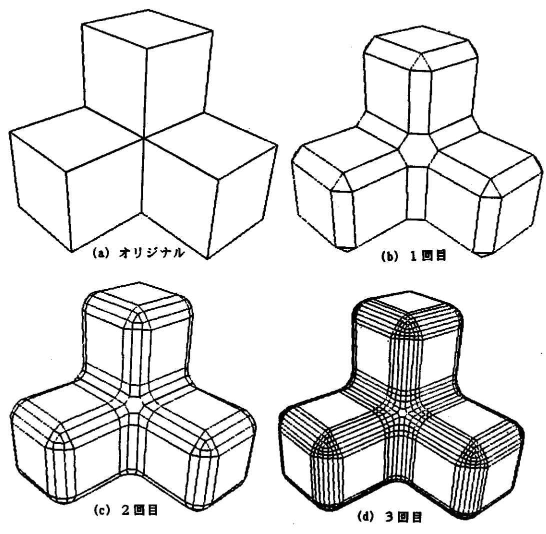

図１３　場合分け型多面体細分割の例

（３）場合分け型多面体細分割（単純円柱面型＋Doo & Sabin型）

この方法では，元のソリッドの頂点の回りに発生する面（頂点近傍面）に対しては，Doo & Sabin型，その他の面に対しては円柱面型で新頂点の位置を決定する．ここで頂点近傍面とは，以下のように定義される．

（ａ）初期ソリッドのVERTEX-Faceは頂点近傍面である．

（ｂ）頂点近傍面を細分割してできるFACE-FaceおよびこれにLに隣接するVERTEX-FaceとEDGE-Faceは頂点近傍面である．

以上の方法で細分割した例を図１３に示す．

この場合は，図の中央の６角形面も，端の３角形面も同じ速度で収束し，以上の（１）～（３）の内で最も優れている．

５．処理例

多面体細分割で得られたソリッドのシェーディング表示例を以下に示す．図１４は，トリポッドに場合分け型多面体細分割を適用した例，図１５は，「計算機室」のソリッドモデルに単純円柱面型細分割を適用する前後の違いを示したものである．面取り処理によって，より自然で，現実的な情景が合成できることがわかる．

６．まとめ

単純な面取りに適した多面体細分割として，角２等分型，カット幅指定型およびベクトル和型の細分割を実現した．これらのうちベクトル和型の細分割は穴のない凸多角形のみからなる

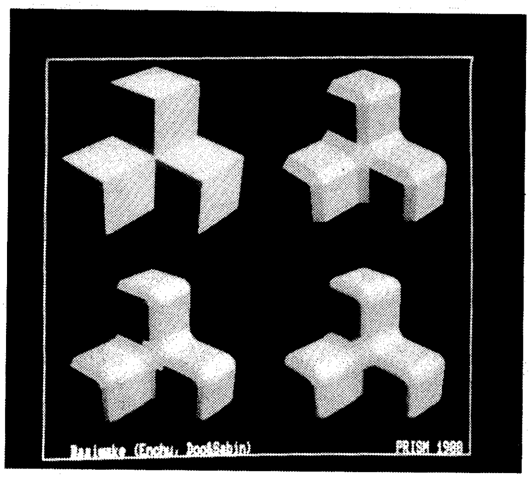

図１４　トリポッドのシェーディング表示

ソリッドに対しては何回でも反復適用できること，凹多角形，穴あき多角形を持つソリッドに対しても最初のパラメータの指定によってはある程度の反復適用が可能であることがわかった．また，これらの方法を１回目だけ適用し，Doo & Sabinによる近似曲面を制御できることがわかった．

また，指定した曲率半径を持つ円柱面に収束するいくつかの円柱面型多面体細分割を実現し比較した．すべてのエッジに対して同一の処理を行なう単純円柱面型では反復過程で面が裏返る不都合な場合があった．次にミニマム型細分割はアルゴリズムが簡単で面が裏返ることもないが，面の収束が一様でない（角数の多い面では遅く，少ない面では速い）という問題があった．これらの問題に対処するため，場合分け型の細分割を実現し検討した結果 Doo & Sabin型と円柱面型の組合せによって最も満足すべき結果が得られた．

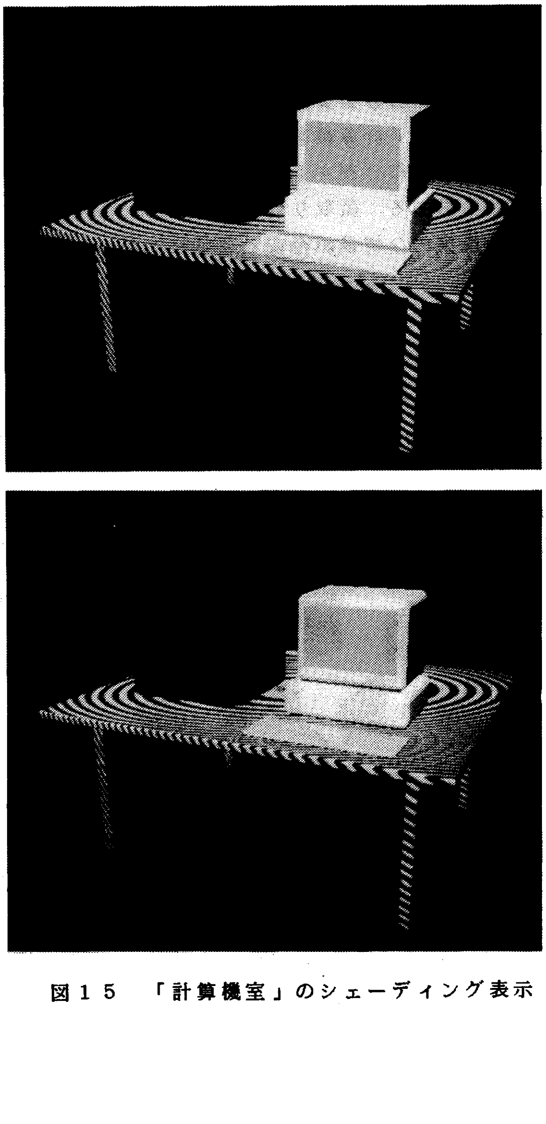

図１５　「計算機室」のシェーディング表示

以上に述べた曲面設計手法は，文献(7)の曲面を用いる丸め処理と比べ，(1)アルゴリズムが比較的単純である，(2)処理結果が平面多面体となるので専用ディスプレー等による高速表示に適している，(3)処理結果に対して立体集合演算などの他の操作を適用することができる(4)設計完了後必要なら区分的に曲面の解析表現を求めることができる，などの特徴があり，対話型の曲面設計の過程で重要な一つの手法と考えられる．

今後の課題としては，記憶容量や処理速度に関する考察，局所的細分割，双三次形式の多面体細分割の利用，近似曲面の連続性に関する考察等が残されている．

文献

(1)若林，鶴岡，木村，三宅：”ＬＩＳＰによるソリッドモデラーの開発”，情報処理学会グラフィクスとＣＡＤ研資２５－４（１９８７）．

(2)中西，木村，鶴岡，三宅：”ＬＩＳＰによるソリッドモデラーの開発～機能の拡張～”，昭６２電気関係学会東海支部連大，５７８．

(3)E.Catmull and J.Clark: "Recursively generated B-spline surface on arbitrary topological meshes", CAD, Vol.10, No.6(1978).

(4)D.Doo and M.Sabin: "Behaviour of recursive division surfaces near extraordinary points", CAD, Vol.10, No.6 (1978).

(5)A.H.Nasiri: "Polyhedral Subdivision Methods for Free-Form Surfaces", ACM Transactions on Graphics, Vol.6, No.1,pp29-73 (1987).

(6)山口ほか：”多面体細分割による近似曲面の生成法”，第三回Ｎｉｃｏｇｒａｐｈ論文集（1987）．

(7)Chiyokura: "An Extended Rounding Operation for Modeling Solids with Free-Form Surfaces", Computer Graphics 1987, Springer-Verlag (1987).