

## Gregory 系パッチの一般表現

植田 健治                  原田 毅士

(株) リコー ソフトウェア研究所

あらまし Gregory パッチは, Coons パッチにおけるツイスト問題を解決するために Gregory が提案した式を, Bézier パッチの制御点に適用して曲面間の滑らかな接続を容易になるように定義された曲面式である. この Gregory パッチと同じような性質を持つさまざまな曲面式の一般的な表現を Gregory 系曲面として示し, これまで提案されてきた高次の接続性を持つもの, 境界曲線が有理曲線であるものなどがすべてこの表現に含まれることを示す. この考察のなかで曲面式の持つ接続性と, 曲面の制御点を表現する式の間関係についても明らかにする. また Gregory 曲面の中でも, ふたつの曲面の凸結合としても表現できるものは, いくつかのすぐれた特徴をもつことも示す.

## A Generalized Form of Gregory Patches

Kenji UEDA                  Tsuyoshi HARADA

Software Research Center, Ricoh Company Ltd.  
1-1-17, Koishikawa, Bunkyo-ku,  
Tokyo, 112, JAPAN

**Abstract** The Gregory patch is the result of an adaption to the Bézier patch using Gregory's solution for the twist incompatibility in a Coons patch. The main feature of the Gregory patch is that the four cross boundary derivatives are independent of each other. We present a generalized form of a set of patches satisfying this and other properties of the Gregory patch. This generalized surface patch is a Bezier form whose control points are expressed as an interpolation between two points, similar to the interior points of the Gregory patch. This surface includes the  $C^1$ ,  $C^2$ - Gregory patches, the rational boundary Gregory patch and the Brown's form.

# 1 はじめに

3次元の形状を生成する場合に、あらかじめワイヤフレームで形状を定義しておき、その後ワイヤフレームで囲まれる領域に曲面を内挿するという手法がとられることが多い。このような場合に用いられる曲面としては Coons パッチが有名である。Coons パッチは境界の曲線と境界における(1階)微分ベクトルから、曲面を内挿するものであるが、Coons パッチを定義する場合にツイスト量とよばれる値を決める必要がある。この値の決め方については幾つかの方法があるが[4]、Gregory はツイスト量をひとつの値ではなく、有理式によって表すことで解決した[8]。

一方、自由曲面を表現する曲面式として Bézier パッチがある。Bézier パッチはその取り扱い易さから自由曲面を表現する式として広く用いられているが、ワイヤフレームの間を滑らかに内挿したり、いくつかの曲面を滑らかに接続することは困難である。そこで、Coons パッチの4隅におけるツイスト問題を解決するために Gregory が行った補正を Bézier パッチに適用することで Gregory パッチが提案された[5]。この Gregory パッチを利用すると、パッチの境界における接平面の連続性を境界ごとに定義できるので曲面間の接続が容易になり、ワイヤフレームから滑らかな3次元形状の生成が容易になる。

これまでに、ツイスト問題を解決するための様々な議論[2,3,11]や、有理曲線の境界曲線に対する Gregory パッチ[6]、曲率まで連続な Gregory パッチ[12]等の提案がなされてきた。これらの議論を元に、本研究では、Gregory パッチのような性質を持つ曲面式を Gregory 系のパッチと呼び、この曲面に対する考察を行う。Gregory 系の曲面式のなかでも制御点が同一の式で表現されるような曲面式については、いくつかの特徴があるのでその性質を示す。

## 2 Gregory 系パッチ

### 2.1 Gregory パッチ

CAD 分野で利用される自由曲面は通常パラメトリック曲面とよばれ、ふたつの変数  $u, v$  の関数の形で表現される。なかでも Bézier パッチは扱い易いことから多くの CAD システムで利用されている。しかし、いくつかの Bézier パッチを貼りあわせた曲面を滑らかにすることは困難である。

二つの曲面間の境界での接続性を満たせば、曲面内を滑らかに内挿できるような曲面式として Gregory パッチが提案された[5]。Gregory パッチは、Coons パッチ[7]におけるツイスト問題を解決するために Gregory が行った補正[8]を、Bézier パッチに適用して定義されたもので、次のように定義される。 $B_i^n(t)$  は、 $\binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i$  で定義される Bernstein 基底関数である。

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_i^3(u) B_j^3(v) P_{i,j}(u, v) \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1)$$

$$P_{i,j}(u, v) = P_{i,j}^y = P_{i,j}^u \equiv P_{i,j} \quad (i = 0, 3 \quad j = 0, 3)$$

$$P_{1,1}(u, v) = \frac{uP_{1,1}^y + vP_{1,1}^u}{u+v} \quad P_{1,2}(u, v) = \frac{uP_{1,2}^y + (1-v)P_{1,2}^u}{u + (1-v)}$$

$$P_{2,1}(u, v) = \frac{(1-u)P_{2,1}^y + vP_{2,1}^u}{(1-u) + v} \quad P_{2,2}(u, v) = \frac{(1-u)P_{2,2}^y + (1-v)P_{2,2}^u}{(1-u) + (1-v)}$$

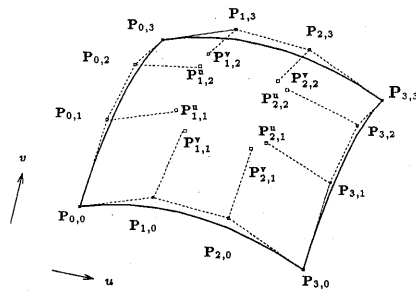


図1: 双3次 Gregory パッチ

Gregory パッチは、次のような性質を持つ。

- すべて  $P_{i,j}^y = P_{i,j}^u \equiv P_{i,j}$  である場合には、制御点が  $P_{i,j}$  である Bézier パッチになる。
- 各  $P_{i,j}$  が  $P_{i,j}^y, P_{i,j}^u$  の凸結合で表現されるため、曲面は  $P_{i,j}^y, P_{i,j}^u$  で定義される凸閉包内に含まれる。
- 境界ごとの(一階の)導関数の値が、 $P_{i,j}^y$  または  $P_{i,j}^u$  だけで定義できる。

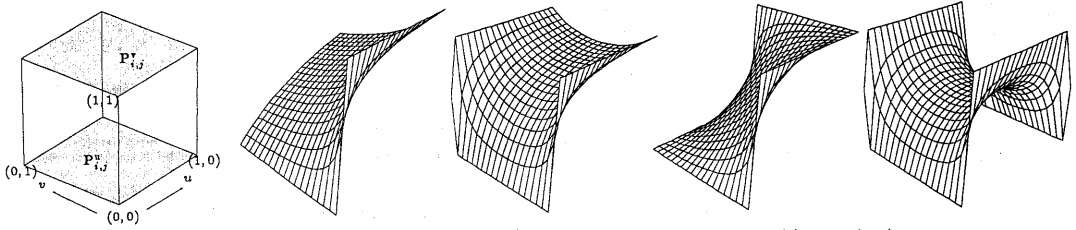


図 2: 分母が  $u+v$ ,  $u+v(1-v)$ ,  $u(1-v)+(1-u)v$ ,  $u(1-u)+v(1-v)$  の場合の  $P_{i,j}(u,v)$

## 2.2 Gregory 系パッチ

Gregory パッチは Bézier パッチの制御点をパラメータ  $u, v$  の有理関数で表現することで境界間の不整合を吸収する。例えば、 $(u,v) = (0,0)$  における不整合は  $P_{1,1}(u,v)$  によって吸収される。不整合を吸収する方法は、先に示した式以外にもさまざまなものが  $P_{1,1}(u,v)$  での不整合を吸収できる。

1. 分母が  $u+v$ ,  $u+(1-u)v$ ,  $u(1-v)+v$ , ... なら、 $(u,v) = (0,0)$  での不整合が吸収できる。
2. 分母が  $u+v(1-v)$ ,  $u+(1-u)v(1-v)$ , ... なら、 $(u,v) \in \{(0,0), (0,1)\}$  での不整合が吸収できる。
3. 分母が  $u(1-v)+(1-u)v$ , ... なら、 $(u,v) \in \{(0,0), (1,1)\}$  での不整合が吸収できる。
4. 分母が  $u(1-u)+v(1-v)$ , ... なら、 $(u,v) \in \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$  での不整合が吸収できる。

これを図で示したのが、図 2 である。いずれも  $u=0$  では  $P_{i,j}^u$ ,  $v=0$  では  $P_{i,j}^v$  という値をとり、その間を連続的に変化している事が分かる。

このように、Gregory パッチと同様の性質を持つ曲面はいくつも存在する。たとえば、次のような曲面も Gregory パッチと同じ性質を持つ。この曲面は、Gregory パッチのような 4 種類の式ではなく、2 種類の式で制御点を表現している。

$$P_{1,1}(u,v) = \frac{u(1-v)P_{1,1}^u + v(1-u)P_{1,1}^v}{u(1-v) + v(1-u)} \quad P_{1,2}(u,v) = \frac{uvP_{1,2}^u + (1-u)(1-v)P_{1,2}^v}{uv + (1-u)(1-v)}$$

$$P_{2,1}(u,v) = \frac{(1-u)(1-v)P_{2,1}^u + uvP_{2,1}^v}{(1-u)(1-v) + uv} \quad P_{2,2}(u,v) = \frac{v(1-u)P_{2,2}^u + u(1-v)P_{2,2}^v}{v(1-u) + u(1-v)}$$

Gregory パッチと同様の性質を持つ曲面式を、Gregory 系のパッチと呼ぶ。

## 3 Gregory 系パッチの一般表現

### 3.1 Gregory 系パッチの一般形

Gregory パッチと同様な性質を持つ曲面は、たとえば次のような形で一般的に表現できる。この形式以外にも表現は可能であるが、本研究ではこの形式を Gregory パッチの一般形とする。

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) P_{i,j}(u,v) \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1)$$

$$P_{i,j}(u,v) = \frac{u^p v^q (1-u)^{r_i} (1-v)^{s_j} P_{i,j}^u + u^p v^q (1-u)^{r_i} (1-v)^{s_j} P_{i,j}^v}{u^p v^q (1-u)^{r_i} (1-v)^{s_j} + u^p v^q (1-u)^{r_i} (1-v)^{s_j}}$$

$$(p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j}, s_{i,j} \geq 0, p_{i,j}^u P_{i,j}^v = q_{i,j}^u r_{i,j}^v = r_{i,j}^u s_{i,j}^v = 0)$$

$P_{i,j}(u,v)$  は式の形から、 $(p_{i,j}^u + q_{i,j}^u + r_{i,j}^u + s_{i,j}^u > 0) \wedge (p_{i,j}^v + q_{i,j}^v + r_{i,j}^v + s_{i,j}^v > 0)$  なら  $u, v$  の変化に従って  $P_{i,j}^u$  と  $P_{i,j}^v$  を結ぶ直線上を連続的に移動する。この移動に従い、曲面  $S(u,v)$  も滑らかに変化する。

### 3.2 導関数の計算

境界における連続性を議論するためには、曲面の導関数を求める必要がある。Gregory 系のパッチの 1 階、2 階の導関数は以下のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial u} S(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \frac{d}{du} B_i^m(u) B_j^n(v) P_{i,j}(u,v) + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \frac{\partial}{\partial u} P_{i,j}(u,v)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} S(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \frac{d^2}{du^2} B_i^m(u) B_j^n(v) P_{i,j}(u,v) + 2 \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \frac{d}{du} B_i^m(u) B_j^n(v) \frac{\partial}{\partial u} P_{i,j}(u,v) + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \frac{\partial^2}{\partial u^2} P_{i,j}(u,v)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} S(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \frac{d}{du} B_i^m(u) \frac{d}{dv} B_j^n(v) P_{i,j}(u,v) + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \frac{d}{du} B_i^m(u) B_j^n(v) \frac{\partial}{\partial v} P_{i,j}(u,v)$$

$$+ \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) \frac{d}{dv} B_j^n(v) \frac{\partial}{\partial u} P_{i,j}(u,v) + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} P_{i,j}(u,v)$$

また、制御点  $\mathbf{P}(u, v)$  を次のように表現するとその導関数は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(u, v) &= \frac{f(u)\mathbf{P}^v + g(v)\mathbf{P}^u}{f(u) + g(v)} \\ \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{P}(u, v) &= \left( f(u, v) \frac{\partial}{\partial u}g(u, v) - \frac{\partial}{\partial u}f(u, v)g(u, v) \right) \frac{[\mathbf{P}^u - \mathbf{P}^v]}{(f(u, v) + g(u, v))^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial u^2}\mathbf{P}(u, v) &= \left( f(u, v) \frac{\partial^2}{\partial u^2}g(u, v) - \frac{\partial^2}{\partial u^2}f(u, v)g(u, v) \right) \frac{[\mathbf{P}^u - \mathbf{P}^v]}{(f(u, v) + g(u, v))^2} \\ &\quad - 2 \left( f(u, v) \left( \frac{\partial}{\partial u}g(u, v) \right)^2 + \frac{\partial}{\partial u}f(u, v) \frac{\partial}{\partial u}g(u, v)(f(u, v) - g(u, v)) - \left( \frac{\partial}{\partial u^2}f(u, v) \right)^2 g(u, v) \right) \frac{[\mathbf{P}^u - \mathbf{P}^v]}{(f(u, v) + g(u, v))^3} \end{aligned}$$

### 3.3 導関数の境界独立条件

境界における導関数の値は Bernstein 多項式の性質から、次の条件を満たせば  $u=0$  の境界における  $k$  階までの微分値が  $\mathbf{P}_{i,j}^n$  だけで決定できる。

$$\mathbf{P}_{i,j}(0, v) = \mathbf{P}_{i,j}^n \quad (i \leq k), \quad \left. \frac{\partial^{k+1-i}}{\partial u^{k+1-i}} \mathbf{P}_{i,j}(u, v) \right|_{u=0} = 0 \quad (i < k)$$

$\mathbf{P}(u, v)$  の導関数の式から、この条件を満たすには  $p_{i,j} > k+1-i$  でなければならないことが分かる。つまり境界  $u=0$  での  $C^k$  連続性が他の境界と独立であるためには、 $i \leq k$  に対して  $p_{i,j} \geq k+1-i$  でなければならない。しかし、もし  $\mathbf{P}_{i,j}^u = \mathbf{P}_{i,j}^v$  であれば  $\mathbf{P}_{i,j}(u, v)$  に要求される条件は常に満たされていることになるので、 $p_{i,j}^u \geq 0, p_{i,j}^v = 0$  でよいことになる。

$u=1, v=0, v=1$  の境界については  $p_{i,j}^u, p_{i,j}^v$  の代わりに  $q_{i,j}^u, q_{i,j}^v, r_{i,j}^u, r_{i,j}^v, s_{i,j}^u, s_{i,j}^v$  を制御すれば、各境界それぞれの連続性を独立に確保できる。

### 3.4 有理形式の Gregory 系パッチ

境界曲線が有理 Bézier 曲線の場合には、Gregory 系パッチは次の形で表現される。

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(u, v) &= \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \mathbf{Q}_{i,j}(u, v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) W_{i,j}(u, v)} \equiv \frac{\mathbf{Q}(u, v)}{W(u, v)} \\ \mathbf{Q}_{i,j}(u, v) &= \frac{u^{p_{i,j}^u} (1-u)^{q_{i,j}^u} v^{r_{i,j}^v} (1-v)^{s_{i,j}^v} w_{i,j}^u \mathbf{P}_{i,j}^v + u^{p_{i,j}^v} (1-u)^{q_{i,j}^v} v^{r_{i,j}^u} (1-v)^{s_{i,j}^u} w_{i,j}^v \mathbf{P}_{i,j}^u}{u^{p_{i,j}^u} (1-u)^{q_{i,j}^u} v^{r_{i,j}^v} (1-v)^{s_{i,j}^v} + u^{p_{i,j}^v} (1-u)^{q_{i,j}^v} v^{r_{i,j}^u} (1-v)^{s_{i,j}^u}} \\ W_{i,j}(u, v) &= \frac{u^{p_{i,j}^u} (1-u)^{q_{i,j}^u} v^{r_{i,j}^v} (1-v)^{s_{i,j}^v} w_{i,j}^u + u^{p_{i,j}^v} (1-u)^{q_{i,j}^v} v^{r_{i,j}^u} (1-v)^{s_{i,j}^u} w_{i,j}^v}{u^{p_{i,j}^u} (1-u)^{q_{i,j}^u} v^{r_{i,j}^v} (1-v)^{s_{i,j}^v} + u^{p_{i,j}^v} (1-u)^{q_{i,j}^v} v^{r_{i,j}^u} (1-v)^{s_{i,j}^u}} \end{aligned}$$

曲面  $\mathbf{S}(u, v)$  の導関数は、分子  $\mathbf{Q}(u, v)$ 、分母  $W(u, v)$  の導関数の組み合わせで表現される。分子、分母ともに非有理形式の Gregory パッチと同じ形をしていることから、分子  $\mathbf{Q}(u, v)$ 、分母  $W(u, v)$  が次の条件を満たせば、 $u=0$  における  $C^k$  連続性は  $w_{i,j}^u, \mathbf{P}_{i,j}^u$  だけで決定できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{i,j}(0, v) &= w_{i,j}^u \mathbf{P}_{i,j}^u, & W_{i,j}(0, v) &= w_{i,j}^u \quad (i \leq k) \\ \left. \frac{\partial^{k+1-i}}{\partial u^{k+1-i}} \mathbf{Q}_{i,j}(u, v) \right|_{u=0} &= 0, & \left. \frac{\partial^{k+1-i}}{\partial u^{k+1-i}} W_{i,j}(u, v) \right|_{u=0} &= 0 \quad (i < k) \end{aligned}$$

この条件を満たすためには  $p_{i,j}^u > k+1-i$  であることが要求されるが、これは有理形式でない場合とまったく同じ条件である。

## 4 いろいろな Gregory 系パッチ

これまでに示した性質、条件の下にさまざまな Gregory 系パッチを定義することができる。ここではいくつかの Gregory 系パッチについて検証を行う。このために、次のような表記法を  $\mathbf{P}_{i,j}(u, v)$  に対して導入しておく。

$$\mathbf{P}_{i,j}(u, v) = \frac{u^{p_{i,j}^u} (1-u)^{q_{i,j}^u} v^{r_{i,j}^v} (1-v)^{s_{i,j}^v} \mathbf{P}_{i,j}^v + u^{p_{i,j}^v} (1-u)^{q_{i,j}^v} v^{r_{i,j}^u} (1-v)^{s_{i,j}^u} \mathbf{P}_{i,j}^u}{u^{p_{i,j}^u} (1-u)^{q_{i,j}^u} v^{r_{i,j}^v} (1-v)^{s_{i,j}^v} + u^{p_{i,j}^v} (1-u)^{q_{i,j}^v} v^{r_{i,j}^u} (1-v)^{s_{i,j}^u}} \equiv \frac{[\mathbf{P}_{i,j}^v, \mathbf{P}_{i,j}^u]}{[\mathbf{P}_{i,j}^u, \mathbf{P}_{i,j}^v, \mathbf{P}_{i,j}^u, \mathbf{P}_{i,j}^v]}$$

また、 $p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j}, s_{i,j}$  の値を示す場合には、次の規則に従って数値に符号を付けて表現する。

$$p_{i,j} = \begin{cases} +p_{i,j}^u & (p_{i,j}^u > 0, p_{i,j}^v = 0) \\ -p_{i,j}^v & (p_{i,j}^v > 0, p_{i,j}^u = 0) \\ 0 & (p_{i,j}^u = 0, p_{i,j}^v = 0) \end{cases}$$

ただし、 $\mathbf{P}_{i,j}(u, v) = \mathbf{P}_{i,j}^v = \mathbf{P}_{i,j}^u \equiv \mathbf{P}_{i,j}$  の場合には、 $p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j}, s_{i,j}$  は 0 以上の任意の整数で構わないので、 $\mathbf{P}_{i,j}(u, v)$  を  $[\mathbf{P}_{i,j}, \mathbf{P}_{i,j}]/[* , * , * , *]$  で表現する。

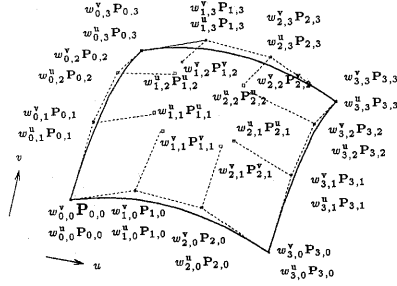


図 3: 双 3 次有理境界 Gregory パッチ

#### 4.1 双 3 次 Gregory パッチ

双 3 次 Gregory パッチは、冒頭で示したものである。その制御点は以下ようになる。

$$\left( \begin{array}{cccc} \frac{[P_{0,0}, P_{0,0}]}{[* , * , * , *]} & \frac{[P_{0,1}, P_{0,1}]}{[* , * , * , *]} & \frac{[P_{0,2}, P_{0,2}]}{[* , * , * , *]} & \frac{[P_{0,3}, P_{0,3}]}{[* , * , * , *]} \\ \frac{[P_{1,0}, P_{1,0}]}{[* , * , * , *]} & \frac{[P_{1,1}^v, P_{1,1}^u]}{[+1, 0, -1, 0]} & \frac{[P_{1,2}^v, P_{1,2}^u]}{[+1, 0, 0, -1]} & \frac{[P_{1,3}, P_{1,3}]}{[* , * , * , *]} \\ \frac{[P_{2,0}, P_{2,0}]}{[* , * , * , *]} & \frac{[P_{2,1}^v, P_{2,1}^u]}{[0, +1, -1, 0]} & \frac{[P_{2,2}^v, P_{2,2}^u]}{[0, +1, 0, -1]} & \frac{[P_{2,3}, P_{2,3}]}{[* , * , * , *]} \\ \frac{[P_{3,0}, P_{3,0}]}{[* , * , * , *]} & \frac{[P_{3,1}, P_{3,1}]}{[* , * , * , *]} & \frac{[P_{3,2}, P_{3,2}]}{[* , * , * , *]} & \frac{[P_{3,3}, P_{3,3}]}{[* , * , * , *]} \end{array} \right)$$

この曲面は境界における  $C^1$  連続性を確保するためのものである。このため外側の  $[P_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j}, s_{i,j}]$  には、2 が現れる必要があるが  $P_{i,j}^v$  と  $P_{i,j}^u$  が  $P_{i,j}$  に一致しているため \* となっている。もし、境界を決定する制御点が  $u$  方向、 $v$  方向で異なれば次のような制御点をもてばよいことになる。これは、Little による Gregory の修正の一般化[1]に対応する。もちろん、1 が、すべて 2 であってもよい。その場合には、次節の双 3 次有理境界 Gregory パッチと同じ形式となる。

$$\left( \begin{array}{cccc} \frac{[P_{0,0}^v, P_{0,0}^u]}{[+2, 0, -2, 0]} & \frac{[P_{0,1}^v, P_{0,1}^u]}{[+2, 0, -1, 0]} & \frac{[P_{0,2}^v, P_{0,2}^u]}{[+2, 0, 0, -1]} & \frac{[P_{0,3}^v, P_{0,3}^u]}{[+2, 0, 0, -2]} \\ \frac{[P_{1,0}^v, P_{1,0}^u]}{[+1, 0, -2, 0]} & \frac{[P_{1,1}^v, P_{1,1}^u]}{[+1, 0, -1, 0]} & \frac{[P_{1,2}^v, P_{1,2}^u]}{[+1, 0, 0, -1]} & \frac{[P_{1,3}^v, P_{1,3}^u]}{[+1, 0, 0, -2]} \\ \frac{[P_{2,0}^v, P_{2,0}^u]}{[0, +1, -2, 0]} & \frac{[P_{2,1}^v, P_{2,1}^u]}{[0, +1, -1, 0]} & \frac{[P_{2,2}^v, P_{2,2}^u]}{[0, +1, 0, -1]} & \frac{[P_{2,3}^v, P_{2,3}^u]}{[0, +1, 0, -2]} \\ \frac{[P_{3,0}^v, P_{3,0}^u]}{[0, +2, -2, 0]} & \frac{[P_{3,1}^v, P_{3,1}^u]}{[0, +2, -1, 0]} & \frac{[P_{3,2}^v, P_{3,2}^u]}{[0, +2, 0, -1]} & \frac{[P_{3,3}^v, P_{3,3}^u]}{[0, +2, 0, -2]} \end{array} \right)$$

#### 4.2 双 3 次有理境界 Gregory パッチ

有理境界 Gregory パッチは、境界曲線が有理曲線であるような場合の Gregory パッチである[6]。双 3 次有理境界 Gregory パッチの制御点は以下のようになる。

$$\left( \begin{array}{cccc} \frac{[w_{0,0}^v P_{0,0}, w_{0,0}^u P_{0,0}]}{[+2, 0, -2, 0]} & \frac{[w_{0,1}^v P_{0,1}, w_{0,1}^u P_{0,1}]}{[+2, 0, -2, 0]} & \frac{[w_{0,2}^v P_{0,2}, w_{0,2}^u P_{0,2}]}{[+2, 0, 0, -2]} & \frac{[w_{0,3}^v P_{0,3}, w_{0,3}^u P_{0,3}]}{[+2, 0, 0, -2]} \\ \frac{[w_{1,0}^v P_{1,0}, w_{1,0}^u P_{1,0}]}{[+2, 0, -2, 0]} & \frac{[w_{1,1}^v P_{1,1}^v, w_{1,1}^u P_{1,1}^u]}{[+2, 0, -2, 0]} & \frac{[w_{1,2}^v P_{1,2}^v, w_{1,2}^u P_{1,2}^u]}{[+2, 0, 0, -2]} & \frac{[w_{1,3}^v P_{1,3}, w_{1,3}^u P_{1,3}]}{[+2, 0, 0, -2]} \\ \frac{[w_{2,0}^v P_{2,0}, w_{2,0}^u P_{2,0}]}{[0, +2, -2, 0]} & \frac{[w_{2,1}^v P_{2,1}^v, w_{2,1}^u P_{2,1}^u]}{[0, +2, -2, 0]} & \frac{[w_{2,2}^v P_{2,2}^v, w_{2,2}^u P_{2,2}^u]}{[0, +2, 0, -2]} & \frac{[w_{2,3}^v P_{2,3}, w_{2,3}^u P_{2,3}]}{[0, +2, 0, -2]} \\ \frac{[w_{3,0}^v P_{3,0}, w_{3,0}^u P_{3,0}]}{[0, +2, -2, 0]} & \frac{[w_{3,1}^v P_{3,1}, w_{3,1}^u P_{3,1}]}{[0, +2, -2, 0]} & \frac{[w_{3,2}^v P_{3,2}, w_{3,2}^u P_{3,2}]}{[0, +2, 0, -2]} & \frac{[w_{3,3}^v P_{3,3}, w_{3,3}^u P_{3,3}]}{[0, +2, 0, -2]} \end{array} \right)$$

この曲面も双 3 次 Gregory パッチと同様の性質を持つ有理曲面であるが、外側の制御点は  $\mathbf{P}_{i,j}^u = \mathbf{P}_{i,j}^v \equiv \mathbf{P}_{i,j}$  のように一致しているものの、重みが  $w_{i,j}^u \neq w_{i,j}^v$  のように一致しているとは限らない。従って  $w_{i,j}^u \mathbf{P}_{i,j} \neq w_{i,j}^v \mathbf{P}_{i,j}$  となり、有理形式における条件を満たすために外側の  $[p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j}, s_{i,j}]$  に、2 が現れざるを得ない。

### 4.3 $C^2$ Gregory パッチ

$C^2$  Gregory パッチ[3,12]の制御点は以下ようになる。この曲面が双 5 次になるのは、 $u=0$  と  $u=1$  あるいは  $v=0$  と  $v=1$  での 2 階微分までを独立にしなければならないからである。

$$\left( \begin{array}{cccccc} \frac{[\mathbf{P}_{0,0}, \mathbf{P}_{0,0}]}{[*,*,*]} & \frac{[\mathbf{P}_{0,1}, \mathbf{P}_{0,1}]}{[*,*,*]} & \frac{[\mathbf{P}_{0,2}, \mathbf{P}_{0,2}]}{[*,*,*]} & \frac{[\mathbf{P}_{0,3}, \mathbf{P}_{0,3}]}{[*,*,*]} & \frac{[\mathbf{P}_{0,4}, \mathbf{P}_{0,4}]}{[*,*,*]} & \frac{[\mathbf{P}_{0,5}, \mathbf{P}_{0,5}]}{[*,*,*]} \\ \frac{[\mathbf{P}_{1,0}, \mathbf{P}_{1,0}]}{[*,*,*]} & \frac{[\mathbf{P}_{1,1}, \mathbf{P}_{1,1}]}{[+2,0,-2,0]} & \frac{[\mathbf{P}_{1,2}, \mathbf{P}_{1,2}]}{[+2,0,-2,0]} & \frac{[\mathbf{P}_{1,3}, \mathbf{P}_{1,3}]}{[+2,0,0,-2]} & \frac{[\mathbf{P}_{1,4}, \mathbf{P}_{1,4}]}{[+2,0,0,-2]} & \frac{[\mathbf{P}_{1,5}, \mathbf{P}_{1,5}]}{[*,*,*]} \\ \frac{[\mathbf{P}_{2,0}, \mathbf{P}_{2,0}]}{[*,*,*]} & \frac{[\mathbf{P}_{2,1}, \mathbf{P}_{2,1}]}{[+2,0,-2,0]} & \frac{[\mathbf{P}_{2,2}, \mathbf{P}_{2,2}]}{[+2,0,-2,0]} & \frac{[\mathbf{P}_{2,3}, \mathbf{P}_{2,3}]}{[+2,0,0,-2]} & \frac{[\mathbf{P}_{2,4}, \mathbf{P}_{2,4}]}{[+2,0,0,-2]} & \frac{[\mathbf{P}_{2,5}, \mathbf{P}_{2,5}]}{[*,*,*]} \\ \frac{[\mathbf{P}_{3,0}, \mathbf{P}_{3,0}]}{[*,*,*]} & \frac{[\mathbf{P}_{3,1}, \mathbf{P}_{3,1}]}{[0,+2,-2,0]} & \frac{[\mathbf{P}_{3,2}, \mathbf{P}_{3,2}]}{[0,+2,-2,0]} & \frac{[\mathbf{P}_{3,3}, \mathbf{P}_{3,3}]}{[0,+2,0,-2]} & \frac{[\mathbf{P}_{3,4}, \mathbf{P}_{3,4}]}{[0,+2,0,-2]} & \frac{[\mathbf{P}_{3,5}, \mathbf{P}_{3,5}]}{[*,*,*]} \\ \frac{[\mathbf{P}_{4,0}, \mathbf{P}_{4,0}]}{[*,*,*]} & \frac{[\mathbf{P}_{4,1}, \mathbf{P}_{4,1}]}{[0,+2,-2,0]} & \frac{[\mathbf{P}_{4,2}, \mathbf{P}_{4,2}]}{[0,+2,-2,0]} & \frac{[\mathbf{P}_{4,3}, \mathbf{P}_{4,3}]}{[0,+2,0,-2]} & \frac{[\mathbf{P}_{4,4}, \mathbf{P}_{4,4}]}{[0,+2,0,-2]} & \frac{[\mathbf{P}_{4,5}, \mathbf{P}_{4,5}]}{[*,*,*]} \\ \frac{[\mathbf{P}_{5,0}, \mathbf{P}_{5,0}]}{[*,*,*]} & \frac{[\mathbf{P}_{5,1}, \mathbf{P}_{5,1}]}{[*,*,*]} & \frac{[\mathbf{P}_{5,2}, \mathbf{P}_{5,2}]}{[*,*,*]} & \frac{[\mathbf{P}_{5,3}, \mathbf{P}_{5,3}]}{[*,*,*]} & \frac{[\mathbf{P}_{5,4}, \mathbf{P}_{5,4}]}{[*,*,*]} & \frac{[\mathbf{P}_{5,5}, \mathbf{P}_{5,5}]}{[*,*,*]} \end{array} \right)$$

### 4.4 Brown パッチ

この曲面は、Brown がツイスト問題を解決するために二つの曲面の凸結合を行う式として示した式を[2]、Gregory パッチに利用したものである[4]。Brown パッチの制御点は以下ようになる。

$$\left( \begin{array}{cccc} \frac{[\mathbf{P}_{0,0}, \mathbf{P}_{0,0}]}{[+2,+2,-2,-2]} & \frac{[\mathbf{P}_{0,1}, \mathbf{P}_{0,1}]}{[+2,+2,-2,-2]} & \frac{[\mathbf{P}_{0,2}, \mathbf{P}_{0,2}]}{[+2,+2,-2,-2]} & \frac{[\mathbf{P}_{0,3}, \mathbf{P}_{0,3}]}{[+2,+2,-2,-2]} \\ \frac{[\mathbf{P}_{1,0}, \mathbf{P}_{1,0}]}{[+2,+2,-2,-2]} & \frac{[\mathbf{P}_{1,1}, \mathbf{P}_{1,1}]}{[+2,+2,-2,-2]} & \frac{[\mathbf{P}_{1,2}, \mathbf{P}_{1,2}]}{[+2,+2,-2,-2]} & \frac{[\mathbf{P}_{1,3}, \mathbf{P}_{1,3}]}{[+2,+2,-2,-2]} \\ \frac{[\mathbf{P}_{2,0}, \mathbf{P}_{2,0}]}{[+2,+2,-2,-2]} & \frac{[\mathbf{P}_{2,1}, \mathbf{P}_{2,1}]}{[+2,+2,-2,-2]} & \frac{[\mathbf{P}_{2,2}, \mathbf{P}_{2,2}]}{[+2,+2,-2,-2]} & \frac{[\mathbf{P}_{2,3}, \mathbf{P}_{2,3}]}{[+2,+2,-2,-2]} \\ \frac{[\mathbf{P}_{3,0}, \mathbf{P}_{3,0}]}{[+2,+2,-2,-2]} & \frac{[\mathbf{P}_{3,1}, \mathbf{P}_{3,1}]}{[+2,+2,-2,-2]} & \frac{[\mathbf{P}_{3,2}, \mathbf{P}_{3,2}]}{[+2,+2,-2,-2]} & \frac{[\mathbf{P}_{3,3}, \mathbf{P}_{3,3}]}{[+2,+2,-2,-2]} \end{array} \right)$$

通常 Brown の式と呼ばれるものは分母が  $u^2(1-u)^2 + v^2(1-v)^2$  である。また  $C^2$  の Brown の式として  $u^3(1-u)^3 + v^3(1-v)^3$  も紹介されている[3]、しかし Gregory パッチのように周囲の制御点が固定されていれば、 $u(1-u) + v(1-v)$  で構わないので、Gregory が示したように、曲面式は以下ようになる[9]。

$$\left( \begin{array}{cccc} \frac{[\mathbf{P}_{0,0}, \mathbf{P}_{0,0}]}{[+1,+1,-1,-1]} & \frac{[\mathbf{P}_{0,1}, \mathbf{P}_{0,1}]}{[+1,+1,-1,-1]} & \frac{[\mathbf{P}_{0,2}, \mathbf{P}_{0,2}]}{[+1,+1,-1,-1]} & \frac{[\mathbf{P}_{0,3}, \mathbf{P}_{0,3}]}{[+1,+1,-1,-1]} \\ \frac{[\mathbf{P}_{1,0}, \mathbf{P}_{1,0}]}{[+1,+1,-1,-1]} & \frac{[\mathbf{P}_{1,1}, \mathbf{P}_{1,1}]}{[+1,+1,-1,-1]} & \frac{[\mathbf{P}_{1,2}, \mathbf{P}_{1,2}]}{[+1,+1,-1,-1]} & \frac{[\mathbf{P}_{1,3}, \mathbf{P}_{1,3}]}{[+1,+1,-1,-1]} \\ \frac{[\mathbf{P}_{2,0}, \mathbf{P}_{2,0}]}{[+1,+1,-1,-1]} & \frac{[\mathbf{P}_{2,1}, \mathbf{P}_{2,1}]}{[+1,+1,-1,-1]} & \frac{[\mathbf{P}_{2,2}, \mathbf{P}_{2,2}]}{[+1,+1,-1,-1]} & \frac{[\mathbf{P}_{2,3}, \mathbf{P}_{2,3}]}{[+1,+1,-1,-1]} \\ \frac{[\mathbf{P}_{3,0}, \mathbf{P}_{3,0}]}{[+1,+1,-1,-1]} & \frac{[\mathbf{P}_{3,1}, \mathbf{P}_{3,1}]}{[+1,+1,-1,-1]} & \frac{[\mathbf{P}_{3,2}, \mathbf{P}_{3,2}]}{[+1,+1,-1,-1]} & \frac{[\mathbf{P}_{3,3}, \mathbf{P}_{3,3}]}{[+1,+1,-1,-1]} \end{array} \right)$$

## 5 一様 Gregory パッチ

### 5.1 一様 Gregory パッチ

Brown パッチのようにすべての  $\mathbf{P}_{i,j}(u, v)$  が同じ形を持つような曲面を一様 Gregory パッチと呼ぶ。一種類の式で 4 隅の不整合を吸収しなければならないので、 $\mathbf{P}_{i,j}(u, v)$  は次のような形となる。特に、 $p = q = r = s$  であるようなものを、すべて (位数  $p$ ) Brown パッチと呼ぶこととする。

$$\mathbf{P}_{i,j}(u, v) = \frac{u^p(1-u)^q \mathbf{P}_{i,j}^u + v^r(1-v)^s \mathbf{P}_{i,j}^v}{u^p(1-u)^q + v^r(1-v)^s} = \frac{[\mathbf{P}_{i,j}^u, \mathbf{P}_{i,j}^v]}{[+p,+q,-r,-s]}$$

曲面  $S(u, v)$  は、以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} S(u, v) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \left( \frac{u^p(1-u)^q P_{i,j}^x + v^r(1-v)^s P_{i,j}^y}{u^p(1-u)^q + v^r(1-v)^s} \right) = \frac{u^p(1-u)^q \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) P_{i,j}^x + v^r(1-v)^s \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) P_{i,j}^y}{u^p(1-u)^q + v^r(1-v)^s} \\ &\equiv \frac{u^p(1-u)^q S^u(u, v) + v^r(1-v)^s S^v(u, v)}{u^p(1-u)^q + v^r(1-v)^s} = \frac{u^p(1-u)^q}{u^p(1-u)^q + v^r(1-v)^s} S^u(u, v) + \frac{v^r(1-v)^s}{u^p(1-u)^q + v^r(1-v)^s} S^v(u, v) \end{aligned}$$

このように、一様 Gregory パッチはその曲面  $S(u, v)$  が二つの曲面  $S^u(u, v)$  と  $S^v(u, v)$  の凸結合として表現される。この結果、制御点を表す式が一種類でないばあい、曲面の次数変えることは不可能であるが、一様 Gregory パッチは  $S^u(u, v)$  と  $S^v(u, v)$  それぞれの次数を上げることで  $S(u, v)$  の次数を上げられることができるがすぐわかる。この曲面パッチにはこのほかにいくつかの特徴があるので、以下の節で紹介する。

## 5.2 有理形式の一様 Gregory パッチ

有理形式の一様 Gregory パッチは、次のように変形できる。

$$\begin{aligned} S(u, v) &= \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \left( \frac{u^p(1-u)^q w_{i,j}^x P_{i,j}^x + v^r(1-v)^s w_{i,j}^y P_{i,j}^y}{u^p(1-u)^q + v^r(1-v)^s} \right)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \left( \frac{u^p(1-u)^q w_{i,j}^x + v^r(1-v)^s w_{i,j}^y}{u^p(1-u)^q + v^r(1-v)^s} \right)} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \frac{u^p(1-u)^q w_{i,j}^x P_{i,j}^x + v^r(1-v)^s w_{i,j}^y P_{i,j}^y}{\sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n B_k^m(u) B_l^n(v) (u^p(1-u)^q w_{k,l}^x + v^r(1-v)^s w_{k,l}^y)}}{\sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n B_k^m(u) B_l^n(v) (u^p(1-u)^q w_{k,l}^x + v^r(1-v)^s w_{k,l}^y)} \end{aligned}$$

結局、有理形式の一様 Gregory パッチは、制御点が次のように表現される Gregory パッチと解釈できる。

$$P_{i,j}(u, v) = \frac{u^p(1-u)^q w_{i,j}^x P_{i,j}^x + v^r(1-v)^s w_{i,j}^y P_{i,j}^y}{u^p(1-u)^q \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n B_k^m(u) B_l^n(v) w_{k,l}^x + v^r(1-v)^s \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n B_k^m(u) B_l^n(v) w_{k,l}^y}$$

このことは、 $P_{i,j}(u, v)$  の導関数が計算できれば、有理形式の Gregory パッチにおける導関数の計算式ではなく、通常の Gregory パッチの場合のように曲面の導関数が計算できることを示している。

## 5.3 有理 Bézier パッチへの変換

Gregory 系の曲面は分割すると Gregory 系の曲面式では表現できない。しかし、Gregory 系の曲面は本来有理形式の曲面であるので、各制御点を表現する式の分母にある  $u, v$  を変数とする多項式の最小公倍多項式の次数だけ高い次数の有理 Bézier 曲面に変換可能である。双 3 次 Gregory パッチは双 7 次有理 Bézier パッチに、双 3 次有理境界 Gregory パッチは双 11 次有理 Bézier パッチにそれぞれ変換できる[13]。有理 Bézier パッチなら、曲面の分割は可能である。

一様でない Gregory パッチから有理 Bézier パッチへの変換を一般的に行うためには多項式曲面から Bézier 曲面への基底変換を行う必要があるため複雑な計算をしなければならない。一様でない場合であっても分母はなるべく異なる形が少ないほうが、次数のより低い有理 Bézier パッチに変換できる。さらに、一様な Gregory パッチであれば最小公倍多項式が分母と一致するため、以下に示すように単純な計算のみでより低い次数の有理 Bézier パッチに変換することができる。

最初に  $u^p(1-u)^q S^u(u, v)$  が Bézier 曲面式で表わせることを示す。

$$u^p(1-u)^q S^u(u, v) = u^p(1-u)^q \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) P_{i,j}^x \Rightarrow \sum_{i=0}^{m+p+q} \sum_{j=0}^n B_i^{m+p+q}(u) B_j^n(v) P_{i,j}^x \Rightarrow \sum_{i=0}^{m+p+q+n+r+s} \sum_{j=0}^{n+r+s} B_i^{m+p+q}(u) B_j^{n+r+s}(v) P_{i,j}^x$$

ここで  $P_{i,j}^x$  と  $P_{i,j}^y$  の間には次の関係がある。

$$\binom{m+p+q}{i+p} P_{i,j}^x = \binom{m}{i} P_{i,j}^x$$

$v^r(1-v)^s S^v(u, v)$  も同様に変換可能であるので、変換後の二つの曲面の次数を次数上げによってそろえれば、 $S(u, v)$  の分子は Bézier 曲面式となる。分母は分子に現れる曲面の制御点  $P_{i,j}^x, P_{i,j}^y$  をすべて 1 とみなすことで、同様な変換が可能である。

$$\begin{aligned} S(u, v) &= \frac{u^p(1-u)^q S^u(u, v) + v^r(1-v)^s S^v(u, v)}{u^p(1-u)^q + v^r(1-v)^s} \\ &\Rightarrow \frac{\sum_{i=0}^{m+p+q+n+r+s} \sum_{j=0}^{n+r+s} B_i^{m+p+q}(u) B_j^{n+r+s}(v) P_{i,j}^x + \sum_{i=0}^{m+p+q+n+r+s} \sum_{j=0}^{n+r+s} B_i^{m+p+q}(u) B_j^{n+r+s}(v) w_{i,j} P_{i,j}^y}{\sum_{i=0}^{m+p+q+n+r+s} \sum_{j=0}^{n+r+s} B_i^{m+p+q}(u) B_j^{n+r+s}(v) (u^p(1-u)^q + v^r(1-v)^s)} \Rightarrow \frac{\sum_{i=0}^{m+p+q+n+r+s} \sum_{j=0}^{n+r+s} B_i^{m+p+q}(u) B_j^{n+r+s}(v) w_{i,j} P_{i,j}^x + \sum_{i=0}^{m+p+q+n+r+s} \sum_{j=0}^{n+r+s} B_i^{m+p+q}(u) B_j^{n+r+s}(v) w_{i,j} P_{i,j}^y}{\sum_{i=0}^{m+p+q+n+r+s} \sum_{j=0}^{n+r+s} B_i^{m+p+q}(u) B_j^{n+r+s}(v) w_{i,j}} \end{aligned}$$

この結果、 $m \times n$  次の一様 Gregory パッチは、 $(m+p+q) \times (n+r+s)$  次有理 Bézier パッチに変換可能である。有理形式の一様 Gregory パッチも同様に変換できることは明らかである。従って、(双 3 次) 一様 Gregory パッチは双 5 次有理 Bézier パッチに、(双 3 次) 有理境界一様 Gregory パッチは双 7 次有理 Bézier パッチにそれぞれ変換できる。

しかし、このように変換された結果生成される有理 Bézier パッチには、制御点、重みの四隅に 0 行列が存在することになる。これは元々 Gregory 系の曲面式ではパッチの四隅に特異点が存在することの結果といえる。

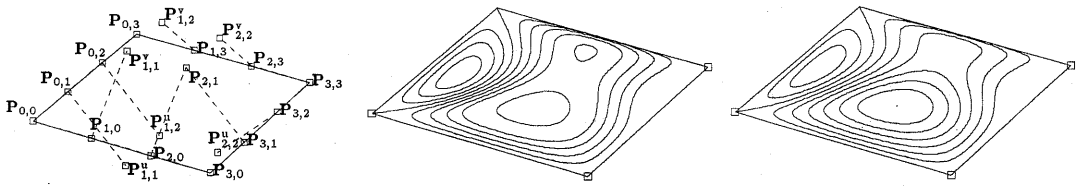


図4: 同じ制御点で定義される Gregory パッチ(左)と位数 1 の Brown パッチ(右)

#### 5.4 Gregory 系パッチの形状の比較

Gregory 系のパッチは、同じ制御点  $P_{i,j}^v, P_{i,j}^u$  であっても、制御点の合成式が異なれば、曲面の内挿のされ方が異なるので、曲面の形状が微妙に違うようになる。図 3 に、同じ制御点  $P_{i,j}^v, P_{i,j}^u$  で定義される二つの Gregory 系パッチの形状の違いを曲面の等高線によって示す。図から分かるように同じ制御点をもつものでも、制御点を表現する関数が異なれば微妙に曲面の形状が異なる。一般的には、局所的な制御点の合成式を用いた方が、一様な合成式を用いるよりも制御点が形状に及ぼす影響が大きいいえる。

### 6 まとめ

Gregory 系の曲面について、その表現式や性質について示した。Gregory 系の曲面を利用すれば、境界における接続問題を Bézier パッチあるいは有理 Bézier パッチ間の接続問題に帰着できる。このため各境界ごとに Bézier 曲面間の接続条件[10]さえ満たされれば、その後は Gregory 系の曲面を利用すれば境界での連続性を保ったまま境界間で滑らかに曲面が内挿される。

一様 Gregory パッチは有理 Bézier パッチに容易に変換できることから、Gregory パッチは単なる接続問題を解決するための手段として利用するだけで、曲面としては有理 Bézier 曲面のみを採用するシステムを構築することも可能である。しかし、通常 0 の要素を持つ曲面式は許されないことが多いことが、他システムとのデータ交換上障害になるという問題がある。

境界において同じ連続性の条件を満たす曲面であっても、いくつかの形式で表現可能なこと明らかになった。また本研究で示した形式以外にもさまざまな形式が可能である。どの形式の曲面が最適なものであるかは、システムの実現方法や実際の応用に依存して決定されるであろう。特に、同じ制御点で定義されるが合成式が異なるいくつかの曲面間の形状の違いについては、曲面形式の変換や曲面形状の近似等に影響を及ぼすものであるので、更に検討を進める必要がある。

### 参考文献

- [1] R. E. Barnhill: Representation and Approximation of Surfaces, *Mathematical Software III*, pp. 69-120, Academic-Press (1977)
- [2] R. E. Barnhill, J.H. Brown and I. M. Kluczewicz: A New Twist in Computer Aided Geometric Design, *Computer Graphics and Image Processing*, Vol. 8, pp. 78-91 (1978)
- [3] R. E. Barnhill: Computer Aided Surface Representation and Design, *Surfaces in Computer Aided Geometric Design*, pp. 1-24, North-Holland (1983)
- [4] R. E. Barnhill, G. Farin, L. Fayard and H. Hagen: Twist, Curvatures and Surface Interrogation, *Computer Aided Design*, Vol. 20, no. 6, pp. 341-346, (1988)
- [5] H. Chiyokura and F. Kimura: Design of Solids with Free-form Surfaces, *Computer Graphics*, Vol. 17, No 3 pp. 289-298 (1983)
- [6] H. Chiyokura, T. Takamura, T. Konno and T. Harada:  $G^1$  Surface Interpolation over Irregular Meshes with Rational Curves, *Frontiers in Geometric Modeling*, SIAM (1990)
- [7] S. A. Coons: Surfaces for Computer Aided Design of Space Form, *Report MAC-TR-41, Project MAC, MIT* (1967)
- [8] J. A. Gregory: Smooth Interpolation Without Twist Constraints, *Computer Aided Geometric Design*, pp. 71-87, Academic-Press (1974)
- [9] J. A. Gregory:  $C^1$  Rectangular and Non-rectangular Surface Patches, *Surfaces in Computer Aided Geometric Design*, pp. 25-33, North-Holland (1983)
- [10] J. Kahmann: Continuity of Curvature Between Adjacent Bezier Patches, *Surfaces in Computer Aided Geometric Design*, pp. 65-75, North-Holland (1983)
- [11] J. Peters: Local Smooth Surface Interpolation: a Classification, *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 7, pp. 191-195 (1990)
- [12] K. Takai and K. K. Wang: Curvature Continuous Gregory Patch: a Modification of Gregory Patch for Continuity of Curvature, *Japan-U.S.A. Symposium on Flexible Automation* (1990)
- [13] T. Takamura, M. Ohta, H. Toriya and H. Chiyokura: A Method to Convert a Gregory Patch and a Rational Boundary Gregory Patch to a Rational Bezier Patch and Its Applications, *CG International '90 - Computer Graphics Around the World*, pp. 543-562, Springer-Verlag (1990)