

空間写像法による柔構造物体の変形

古川 貴雄 北川 志保 清水 義雄

信州大学繊維学部感性工学科

〒386 長野県上田市常田 3-15-1

furukawa@ted.shinshu-u.ac.jp

あらまし: 複数の粘弾性体から構成される柔構造物体は複雑な機械的性質を示すため、正確な変形挙動のモデリングが困難である。本稿では、柔構造物体の変形を視覚化するための空間写像法を提案し、布の変形に応用した結果を示す。空間写像法では、物体をポリゴンあるいは区分多項式で近似し、その頂点、制御点により形状を記述する。これらの点を含むベクトル空間を考え、このベクトル場についての規則を与えることにより、各点について移動規則を与えなくても物体の変形を表現できる。さらに、有限要素法を用いた点の移動方法と、計算の効率化についても述べる。

キーワード: 柔構造物体, 空間写像法, 制御点, 有限要素法

Deformation of Flexible Objects Based on Space Mapping

Takao Furukawa, Shiho Kitagawa and Yoshio Shimizu

Department of Kansei Engineering, Shinshu University

3-15-1 Tokida, Ueda-shi, Nagano 386, Japan

furukawa@ted.shinshu-u.ac.jp

Abstract: Precise modeling of deformation is difficult for flexible objects made by several visco-elastic bodies that show complex mechanical properties. This paper proposes space mapping to visualize the deformation of the flexible objects, and shows an application to woven fabric deformation. In space mapping, the objects are approximated by polygons or piecewise polynomials, thus, the vertices or the control points describe the shape. We consider vector space that includes these points, and give a rule for the vector field. Therefore, the deformation of the objects can be represented without the rules for each point. Moreover, movement of the points using finite element method and efficient calculation are described.

Keywords: flexible object, space mapping, control point, finite element method

1 まえがき

複数の粘弾性体から構成される柔構造物体は、剛体と異なり時刻に応じてその形状が変化するという性質をもつ。CGにおける柔軟な物体の表現方法としては、弾性理論に基づく手法が一般的であり、離散的な弾性要素を相互に接続した弾性ネットワークモデル [1-4] や数理モデルとしては連続的な有限要素法を用いた手法 [5, 6] が提案されている。

離散化された弾性ネットワークの場合、モデル自体を構築することは比較的容易である。しかし、構成要素の性質は複雑でなくても、これらの要素が相互に接続されたシステム全体の挙動は極めて複雑になり、初期条件や境界条件の影響を大きく受けて数値計算の安定性が問題となる。例えば、エネルギー関数が多峰性になり極小値に収束させにくいなどの問題である。一方、有限要素法では、線形モデルを用いた場合に近似解が真の解に最も近づくことが保証され、定常状態では連立一次方程式の解により近似解が与えられる [7]。しかし、要素として非線形特性を考慮したモデルを用いると、離散的な弾性ネットワークモデルと同様に数値計算が不安定になることが多い。

これらの手法は単一の弾性体を対象とするモデルであり、複数の弾性体から構成される柔構造物体では、その挙動を表す数理モデルの構築すら困難となる。一方、パーティクル [8] のように弾性理論を直接用いない手法も提案されているが、弾性体と比較すると直観的に変形操作を行いにくいという問題がある。

本稿では、柔構造物体として、複数の糸が交錯して3次元構造を形成する布の変形を視覚化する手法について述べる。このような柔構造物体の変形については、圧縮、伸張、せん断、交錯部分における摩擦など様々な要因が影響するが、全体としては連続体の変形とみなせることが多い。そこで、基本的には、粘弾性理論をもとに物体全体の変形を記述し、数値的に安定な線形要素を用いた有限要素法を適用する。以下では、柔構造物体における微細な構造変化を表現するための空間写像法について説明し、次に、複数の糸から構成される布の変形を対象とした空間写像法の応用について述べる。

2 空間写像法

形状表現方法には様々な方法が提案されているが、代表的な方法としては、多数のポリゴンによって複

雑な形状を多面体として表す方法と、ベジェ曲面やNURBS曲面のように区分多項式の係数を制御点として表す方法がある。これらの方法では、ポリゴン頂点、あるいは制御点の配置により形状を記述している。そのため、ポリゴン頂点や制御点を移動させることにより物体を変形させることができ、顔の表情生成 [9, 10] や衣服形状の生成 [11] に応用されている。

つまり、ポリゴン頂点や制御点を移動させる規則を生成することにより、物体の変形操作を表現できる。しかし、複雑な形状を扱う場合には点の数が増え、個々の点に対して変形操作を記述するのは困難となる。

ここでは、制御点が含まれる空間に対する操作を記述する。これにより、形状を記述する個々の制御点に対する変形操作を記述する必要がなくなる。以下に空間写像法による柔構造物体の変形操作の概略を示す。

1. 物体形状を記述する制御点を抽出し、形状記述データを圧縮する。
2. 制御点を含む空間を考え、この空間の挙動を記述する数理モデルを与える。
3. 導入した数理モデルを用いて制御点を移動させる。
4. 移動した制御点から変形した物体形状を再構成する。

柔構造体の変形として、複数の糸から構成される布の変形を表現する方法について述べる。変形操作の概略を図1に示す。最初に布の構成要素である糸を複数のベジェパッチを用いて近似し、糸の表面形状を記述する制御点を求める。次に、制御点を含む空間の挙動が弾性体の運動方程式により表せるものと仮定すると、制御点の移動は運動方程式を表現する微分方程式の解により与えられる。最終的に、移動した制御点からベジェパッチを再構成して、変形した糸および布のモデルを得る。

3 ベジェパッチによる幾何モデルの近似

布を構成する糸の幾何モデルとしては図2に示すクリンプモデルが提案されている [12]。このモデルでは、糸の断面には円形を仮定して、直線部分と円弧部分から一つの構成単位を形成している。よこ糸断面とたて糸の屈曲、および、たて糸断面とたて糸

Approximation using Bézier patches

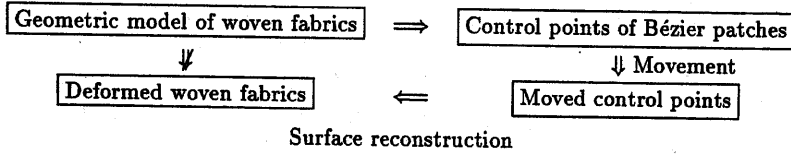


図 1: 布の変形モデル

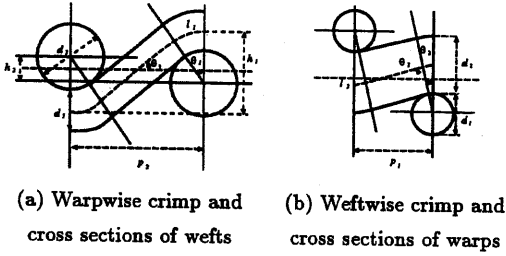


図 2: 布を構成する糸の幾何モデル

の屈曲を図 2 (a) (b) に示す。記号の添字 1, 2 はたて糸とよこ糸に対応し、これらの記号を以下にまとめる。

- d : 糸の直径
- p : 糸間の距離
- θ : 布面に対する糸の傾斜角
- l : 交錯点間の糸の長さ
- h : 布面からの最大変位

ここで、よこ糸のクリンプ係数を

$$c_1 = l_1/p_2 - 1$$

と定義し、

$$D = d_1 + d_2$$

とおくと次の関係が得られる。

$$\begin{cases} p_2 = (l_1 - D\theta_1) \cos \theta_1 + D \sin \theta_1 \\ h_1 = (l_1 - D\theta_1) \sin \theta_1 + D(1 - \cos \theta_1) \end{cases} \quad (1)$$

c_2, p_1, h_2 についても同様の関係式が与えられるため、糸の直径、交錯点間の距離と布の厚さを表す 5 つの変数 d_1, d_2, p_1, p_2, h_1 を与えると、布の幾何モデルが決定される。

図 2 の幾何モデルを近似するために、双 3 次ベジェパッチを用いることにする。双 3 次ベジェパッチ $f(u, v)$ は次式で表せる。

$$f(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_{i,3}(u) B_{j,3}(v) b_{ij} \quad (2)$$

$$(0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1),$$

ここで $B_{i,3}$, ($i = 0, 1, 2, 3$) は次式で定義される Bernstein 多項式である。

$$B_{i,3}(u) = \binom{3}{i} (1-u)^{3-i} u^i \quad (3)$$

b_{ij} を制御点とする 1 枚の双 3 次ベジェパッチは 16 の制御点から定まる。ここでは、図 3 のように糸の屈曲部分を 2 つの円弧部分と 1 つの直線部分に分け、各部分を 4 枚のベジェパッチで近似することにした。

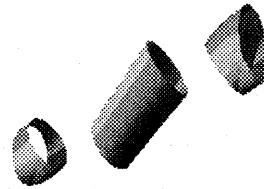


図 3: ベジェパッチを用いた糸の屈曲部分の近似

4 粘弾性理論に基づく制御点の移動方法

制御点の配置により物体形状が記述されるため、制御点の移動により物体の変形が表せる。つまり、物体の変形を記述するためには、制御点の移動についての規則を設定すればよい。ここでは、複数の糸から構成される布を対象としているが、布全体の変形は弾性体の変形とみなすことにする。そこで、屈曲した糸の形状を表す制御点を含む空間をベクトル場 $u(x, y, z)$ と仮定し、 $u(x, y, z)$ に粘弾性体の性質を与えることにする。粘弾性体の挙動は偏微分方程式

により記述されるが、これを数値的に解くため有限要素法を適用すると次の微分方程式系が得られる。

$$M\ddot{\mathbf{u}} + C\dot{\mathbf{u}} + K\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (4)$$

ここで、 M, C, K はそれぞれ質量行列、粘性行列、剛性行列を示し、 $\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, \mathbf{f}$ はそれぞれ加速度、速度、変位、外力に相当するベクトルである。3次元の弾性体を対象とする場合に、ベクトル \mathbf{u} は分割された有限要素の頂点における x, y, z 方向の変位を表している。要素として線形モデルを用いる場合、すなわち、外力に対して変位が線形となるモデルの場合には M, C, K の要素はすべて定数となり、式(4)の解を物体の固有振動の重ね合わせで表現できる(付録参照)。この方法を用いると、時間を変化させた場合の物体の変形 \mathbf{u} を求める場合に差分近似を行う必要がなく、数値計算が不安定にならずに計算効率も改善される [13]。

5 有限要素法を利用した制御点の位置決定

複雑な形状を表現するためには多くのポリゴンやパッチが必要になり、結果として多くの制御点を扱うことになる。これらの制御点を要素の頂点に対応させれば、変形を与える制御点の変位を求めることができるが、しかし、要素数が多くすることで計算量が膨大になる。ここでは、次の方法により少数の要素で制御点の変位を与えることにする。

1. 制御点を含む空間の要素分割を行う。
2. 各制御点が含まれる要素を決定する。
3. 要素の変形を計算する。
4. 要素の変形から各制御点の変位を与える。

以下では、説明を簡略にするために2次元の問題について考えることにする。この場合の要素は平面上の3角形要素となる。まず、制御点が含まれる要素を決定する方法について述べる。図4に三角形要素と制御点の関係を示す。図4のように制御点が三角形 ABC の内部に存在する場合には、3辺に対応する直線を求め、

$$a_i x + b_i y + c_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5)$$

次の不等式を調べれば、三角形と制御点の関係が決定される。

$$a_i x + b_i y + c_i < 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6)$$

しかし、係数 a_i, b_i, c_i が有限の値をとるとは限らないため、数値計算は不安定なものとなる。ここでは、三角形 ABC と三角形頂点と制御点から定義される三角形 ABD, BCD, CAD を考え、それぞれの面積を S, S_1, S_2, S_3 とする。制御点が三角形 ABC の内部に存在する場合には

$$S = S_1 + S_2 + S_3 \quad (7)$$

が成立する。しかし、制御点が三角形 ABC の外部に存在する場合には

$$S < S_1 + S_2 + S_3 \quad (8)$$

となる。いま、ある三角形の頂点座標を $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ とするとその面積は

$$S = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} / 2 \quad (9)$$

で求まる。したがって、三角形の面積 S と頂点と制御点から定義される三角形の面積 S_1, S_2, S_3 の比較により、制御点が存在する三角形要素を決定できる。

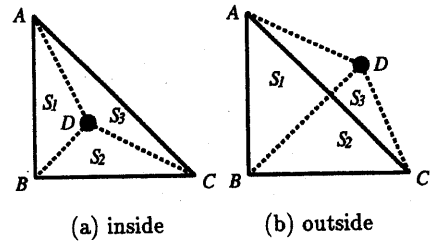


図4: 三角形要素と制御点の関係

次に、三角形要素内に存在する制御点の変位について考える。いま、図5のように三角形 ABC が三角形 $A'B'C'$ に変形し、制御点 D が D' に移動したとする。ここで、各頂点の変位を $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ と表し、図4と同様に三角形の面積を S_1, S_2, S_3 とする。このとき、制御点 D の変位 \mathbf{u} を3頂点の変位ベクトルを線形補間したものとするれば、次式により変位が与えられる。

$$\begin{cases} \mathbf{u} = (S_2 \mathbf{u}_1 + S_3 \mathbf{u}_2 + S_1 \mathbf{u}_3) / S \\ S = S_1 + S_2 + S_3 \end{cases} \quad (10)$$

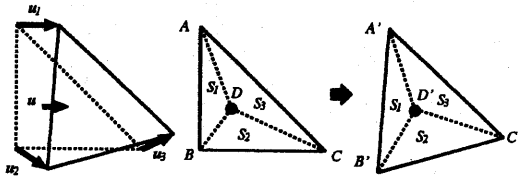


図 5: 三角形要素の変形と制御点の変位

6 実験

実験には、たて糸とよこ糸が交互に交差する平織りの布の変形を扱うことにする。対象とするのは 7×7 の基本単位から構成される領域である。3の方法で糸表面を近似する双3次ベジェパッチの制御点を求め、制御点を含む3次元の領域を決定する。ここでは、制御点を含む外接直方体を対象領域とし、この領域に粘弾性を与えることにする。有限要素法を適用するために、この領域を 5×5 の6面体に分割し、さらに各6面体を5つの4面体要素に分割している。重複する頂点を除いた4面体要素の頂点数は $6 \times 6 \times 2$ となる。

図6(a)には実験で用いた6面体要素のワイヤフレームを示す。なお、図では左から右に時刻が進行している。境界条件として領域の上端部分を固定しているため、変位する頂点数は $6 \times 5 \times 2$ となる。各頂点の自由度は3であるので、式(4)の行列とベクトルの大きさはそれぞれ 180×180 , 180×1 となる。4で述べたように、差分法を用いずに固有振動パターンを重ね合わせて頂点の変位を求めるため、任意時刻における変形を実時間で求めることができる。

図6(b)には空間写像法によって生成した布の動的な変形を示す。糸の表面形状を表すベジェパッチの制御点の変位は図6(a)の結果から決定している。5で述べた制御点を含む要素の決定と変位の計算は3次元の4面体要素に拡張している。簡単な線形モデルの粘弾性体であるがその変形挙動は複雑であり、提案する空間写像法により柔構造物体の複雑な変形が表現されている。

7 むすび

本稿では、複数の弾性体から構成される柔構造物体の変形を表現するための、空間写像法について述べ、実験では、複数の糸が交錯して3次元構造を形

成している布の変形アニメーションに応用した。制御点の変位は線形性の粘弾性体を用いているが、複雑な布の変形挙動が表現できている。画像データを写像するテクスチャマッピングでは2次元的な変形にしか対応できないが、提案手法では厚み、奥行き方向を含めた3次元的な変形を扱うことができる。また、有限要素法における要素分割パターンを利用した、制御点の変位計算の効率化についても述べた。

パッチ接続部分での導関数が連続となるBスプラインパッチ、NURBSパッチへの応用や、制御点の変位を与える支配方程式の拡張などについて検討する必要がある。さらに、柔構造物体に対する切断操作などへの対応が今後の課題である。

参考文献

- [1] 坂口 嘉之, 美濃 淳彦, 池田 克夫: “仮想服飾環境 PARTY — 衣服形状計算における, 衣服と人体との衝突計算方法 —”, 信学論 (D-II), Vol. J78-D-II, No. 3, pp. 481-491 (1995-03).
- [2] 宮崎 慎也, 安田 孝美, 横井 茂樹, 島脇 純一郎: “柔軟な弾性物体を対象として仮想空間操作システム”, 1995年信学全大, D-653 (1995-03).
- [3] P. Volino, M. Courchesne and N. M. Thalmann: “Versatile and Efficient Techniques for Simulating Cloth and Other Deformable Objects,” Proc. SIGGRAPH'95, pp. 137-144 (Aug. 1995).
- [4] T. Kaneko and K. Hirota: “Simulation of Surgical Operation onto Soft and Transforming Tissues,” Proc. VSM'96, pp. 283-287 (Sep. 96).
- [5] D. Terzopoulos, J. Platt, A. Barr and K. Fleischer, “Elastically Deformable Models,” Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH), Vol. 21, No. 4, pp. 205-214 (July 1987).
- [6] H. Okabe, H. Imaoka, T. Tomiha and H. Niwaya, “Three Dimensional Apparel CAD System,” Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH), Vol. 26, pp. 105-110, (1992).
- [7] 森 正武: “有限要素法とその応用”, 岩波書店, (1983)
- [8] David E. Breen, Donald H. House and Michael J. Wozny: “Predicting the Drape of Woven Cloth Using Interacting Particles,” Proc. SIGGRAPH '94, pp. 365-372 (July 1994).
- [9] 坂口 竜己, 森島 繁生, 大谷 淳, 岸野 文郎: “3次元計測に基づく顔表情変化の分析と合成”, 信学技法, HC93-74 (1994).
- [10] 向川 康博, 中村 裕一, 大田 友一: “複数の顔画像の組合せによる任意方向・任意表情の顔画像の生成”, 信学論 (D-II), Vol. J80-D-II, No. 6, pp. 1555-1562 (1997-06).
- [11] 古川 貴雄, 福山 智子, 佐藤 裕, 清水 義雄: “骨格運動に基づく人体と衣服形状の生成法” 1997年信学全大, D-12-181 (1997-03).

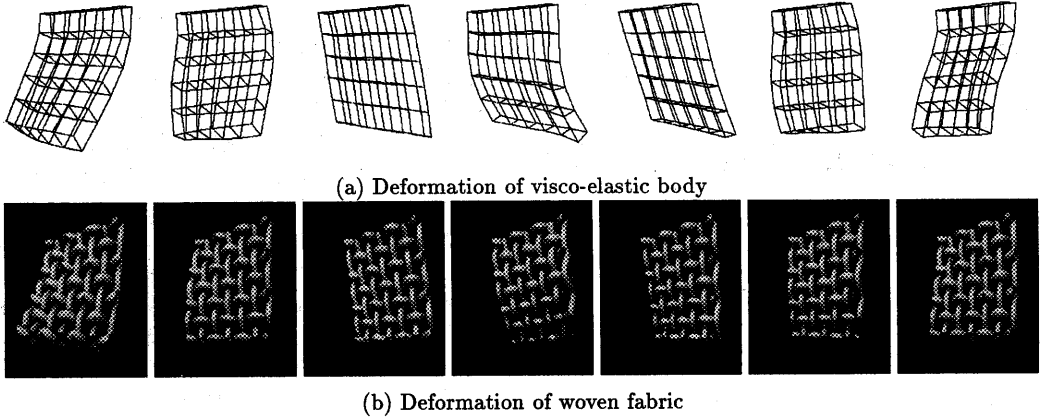


図 6: 布の変形アニメーション

- [12] F. T. Peirce: "The Geometry of Cloth Structure,"
Journal of Textile Institute, Vol. 28, pp. 181-192
(1937).
[13] O. C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method,"
McGraw-Hill UK (1977).

付録 離散化された運動方程式の解法

粘弾性体の運動方程式 (4) を解くために粘弾性体の固有振動を用いる方法について述べる。まず、粘性行列 C が次式で表せると仮定する。

$$C = \alpha M + \beta K \quad (11)$$

次の一般固有値問題を考える。

$$Ks = \lambda Ms \quad (12)$$

式 (12) は次の関係を満たすことにす。

$$\begin{cases} S^T M S = I \\ S^T K S = \Lambda \end{cases} \quad (13)$$

ここで、 T は行列の転置を表し、 I は単位行列を表す。行列 Λ および S は

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$S = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n], \quad (15)$$

とする。行列の要素である λ_i と s_i はそれぞれ固有値と固有ベクトルである。

ここで、 w を

$$w = S^T u, \quad (16)$$

と定義すると、式 (4) は式 (11), (13) を用いて

$$\begin{cases} I\dot{w} + (\alpha I + \beta\Lambda)\dot{w} + \Lambda w = q \\ q = S^T f \end{cases} \quad (17)$$

と書き直すことができる。式 (17) は独立した常微分方程式であるので

$$\dot{w}_i + (\alpha + \beta\lambda_i)w_i + \lambda_i w_i = q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

と書ける。現実の粘弾性体では式 (18) の解は必ず収束するので、次の関係成立する。

$$\{(\alpha + \beta\lambda_i)/2\}^2 - \lambda_i < 0 \quad (19)$$

したがって、式 (18) は次式で表せる。

$$\begin{cases} w_i = c_1 e^{\mu_i t} \cos \omega_i t + c_2 e^{\mu_i t} \sin \omega_i t \\ \mu = (\alpha + \beta\lambda_i)/2 \\ \omega_i = \sqrt{\{(\alpha + \beta\lambda_i)/2\}^2 - \lambda_i} \end{cases} \quad (20)$$

式 (20) の c_1 と c_2 は積分定数であり、初期条件

$$u(t)|_{t=0}$$

を与えると定まる。解 u は式 (20) の固有振動を重ね合わせることによって表現される。