

曲率パターンを指定した曲線の生成法

渡辺 由美子 齊藤 剛
東京電機大学工学部
101, 千代田区神田錦町 2-2

黒田 満
豊田工業大学工学部
468, 名古屋市天白区久方 2-12-1

工業製品の外形形状には、ハイライトや写り込映像の歪まない高品位曲面が要求されている。このような曲面形状を構成するためには、曲面構成の基本となる特徴線や基本線を曲率変化の滑らかな高品位な曲線で生成する必要がある。本報では、そのような曲線生成を目的とし、曲率パターンを3次 Bézier 曲線の形式で表現し、その曲率パターンを持つ曲線の構成法を提案する。本法により、両端点での曲率だけでなく、曲率の変化率まで指定した曲線を生成することが可能となる。この曲率変化が制御できることを応用した、接続点での高次接続の実現法を示す。

A Method for Generation of Curves from Specified Curvature Profile

Yumiko WATANABE Tsuyoshi SAITOH
Tokyo Denki University, 2-2 Kanda-nisiki-cho, Chiyada-ku, Tokyo, 101, Japan
Mitsuru KURODA
Toyota Institute of Technology, 2-12-1 Hisaka, Tempaku-ku, Nagoya, 468, Japan

Abstract

Free form surfaces, on which reflected images and high-light lines are not deformed, are required for the outward forms of industry products such as car body. For generation of such high quality surfaces, curves whose curvature changes smoothly are needed as basic lines of the surfaces. In this paper, we propose a curve generation method in which the curvature profile of target curve is specified by Bézier form of degree 3. Using the method, we can control not only curvature but also its gradation.

Key Words:

Curve generation, Specification of curvature variation, Curvature profile, High order connection of curve segment

1 はじめに

デザイナーは、設計形状の特徴や設計意図を、レンダリング図中に表現する。特に、ハイライトや映像の映り込む位置およびその範囲や大きさなどにより意匠性を表現し、形状評価においては、それらを重要視する。このような曲面形状を構成するためには、曲面上の面法線の変化量である曲率、および、その変化を滑らかにする必要があり、曲面構成の基本となる特徴線や基本線を曲率分布から構成する必要がある。

筆者らは、曲面の構成曲線における曲率分布を直接規定することにより、曲率変化が滑らかな曲線を構成する方法を提案した。

まず、滑らかな曲率プロファイルを持つ曲線を生成する方法として、与えられた境界条件から、構成する曲線の曲率中心の軌跡である縮閉線を決定し、そこから得られる伸開線として目的の曲線を得る方法を提案した¹⁾。これにより、曲率変化が単調な曲線が比較的容易に構成できた。しかし、縮閉線による方法では、曲率が0となる部分や反転する部分を含む曲線を規定できない。また、縮閉線のみからでは曲率パターン(路長に対しての曲率の変化具合)を直観的に知ることは難しく、したがって、直接これを用いて曲率の制御を行うのは困難である。

一方、指定した点列を通過する補間曲線の生成法として、1スパン(隣り合う通過点間)の曲率パターンを、1および2次のBézier形式で構成し、そこから得られるクロソイド曲線を接続することにより曲線全体を構成する手法を提案した^{4),5),6)}。この方法により、 G^3 接続された滑らかな曲線は構成できる。しかし、その自由度の制限から、曲線構成後に局所的な形状制御を行うことができない。

そこで、曲率パターンを3次Bézier曲線の形式で表現し、その曲率パターンを持つクロソイドスプライン曲線⁴⁾として、目的とする曲線を構成する方法について提案する。これにより、両端点での曲率だけでなく、曲率の変化率まで指定した曲線を生成することが可能となる。また、通過点から、文献^{5),6)}等で述べられている方法により構成した曲率パターンを次数上げた後に本手法を適用することに

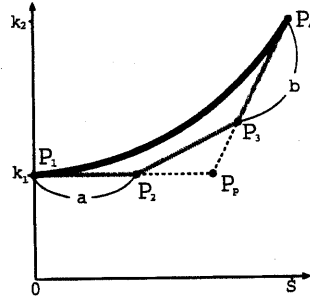


図1: 曲率プロットの指定

より、局所的な曲率制御も可能となる。

本報告は、まず、曲率パターンの3次Bézier形式での表現法を示し、その曲率パターンを持つ曲線の生成法について述べる。また、この曲率変化が制御できることを応用した、接続点での高次接続の実現法を示す。さらに、複数のセグメントからなる曲線の各々曲率パターンを与えることによって、 G^3 接続した曲線を生成する方法について述べる。

2 弧長による曲線表現

本報告では、曲線の弧長をパラメータとした曲率分布を規定し、それを基に曲線生成を行う。本節では、これらに関して次節以降で用いる記号と性質を簡単にまとめて示す。

始点から曲線に沿った距離(弧長) s をパラメータとする曲線 $r(s)$ において、これを s で微分すると単位接線ベクトルが得られる。

$$dr/ds = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)). \quad (1)$$

ここで、 $\theta(s)$ は、 x 軸と接線ベクトルとがなす角度である。したがって、曲線は、始点を (x_0, y_0) とすると、

$$(x(s), y(s)) = (x_0 + \int_0^s \cos \theta(\tau) d\tau, y_0 + \int_0^s \sin \theta(\tau) d\tau) \quad (2)$$

となる。また、 $\theta(s)$ は、曲率 $\kappa(s)$ を用いて、

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(\tau) d\tau \quad (3)$$

と表される。

3 曲率パターンの表現法と拘束条件

本節では、曲率パターンの表現法、および、生成する曲線の幾何条件（曲線セグメントの両端点の位置、接線方向、曲率、および曲率変化）を与えたときの曲率パターンの決定法を示す。本節での議論では、前記の条件を既知とするが、これらのいくつかは、曲線生成の過程で他の条件から決定される。この例は、4, 5 節で示す。

3.1 曲率パターンの表現法

曲率パターンは、横軸に路長を、縦軸に曲率を取った曲率プロットにより表現する。本法では、この曲率プロットを3次 Bézier 曲線の形式で表現する。

図1において、 κ_1, κ_2 は、それぞれ、両端点での曲率である。生成する曲線の路長を S とすると、曲率プロットの両端点の位置が、 $P_1 = (0, \kappa_1)$, $P_4 = (S, \kappa_2)$ と決定される。ここで、路長 S は既知の値ではなく、後に述べる方法で定まる値である。また、曲率プロットの両端点での傾きは、曲率変化として指定されるので、第1および第3 Bézier 辺の方向が定まる。それらの交点を P_p と置き、線分 $P_1 P_p$ を $a:1-a$ に、 $P_4 P_p$ を $b:1-b$ に分割した点を、それぞれ P_2, P_3 と置く。このように設定した各点を制御点とする3次 Bézier 曲線

$$\begin{aligned} P(t) &= (s(t), K(t)) \\ &= (t + (1-t)E)^3 P_0, \quad (4) \\ &\text{ただし, } EP_i = P_{i+1} \end{aligned}$$

により曲率プロットを表現する。

3.2 曲率プロットの決定

前述の曲率プロットを決定するためには、路長 S 、第1および第3 辺の長さに対応した a と b を定める必要がある。それらの決定法を次に示す。以下では、両端点の位置を $\{(x_0, y_0), (x_S, y_S)\}$ 、接線方向を $\{\theta_0, \theta_S\}$ で表す。

両端点での接線角の差は、曲率を全路長 S で積分したものに等しく、

$$\begin{aligned} \theta_S - \theta_0 &= \int_0^S \kappa(s) ds \\ &= \int_0^1 K(t) \cdot \frac{ds(t)}{dt} dt \quad (5) \end{aligned}$$

が成り立たなければならない。また、生成曲線の終始点は、指定した両端点と一致しなければならないので、次の関係が成り立つ必要がある。

$$\begin{aligned} x_S - x_0 &= \int_0^S \cos \theta(s) ds \\ &= \int_0^1 \cos \Theta(t) (ds(t)/dt) dt, \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_S - y_0 &= \int_0^S \sin \theta(s) ds \\ &= \int_0^1 \sin \Theta(t) (ds(t)/dt) dt, \quad (7) \end{aligned}$$

ここで、

$$\Theta(t) = \int_0^t K(\tau) (ds(\tau)/d\tau) d\tau \quad (8)$$

である。

求めるべき変数は、 S, a, b であるので、上記3式（式(5)~(7)）を解くことにより求めることができ、曲率プロットが決定できる。これらは、mathematica を用いて、Newton 法により求めた。

4 曲線の生成例

与えられた幾何拘束を満たす曲率プロファイル $(s(t), K(t))$ が与えられると、式(2)および(3)から目的とする曲線が得られるが、本法では、

$$\begin{aligned} dx/ds &= \sin \theta(s), \\ dy/ds &= \cos \theta(s), \\ d\theta/ds &= \kappa(s) = K(t), \quad (9) \\ ds/dt &= ds(t)/dt \end{aligned}$$

の4つの微分方程式の数値解法を用いた。ここで、 (x, y) の初期値は目的曲線の始点 (x_0, y_0) 、 θ の初期値は、始点の接線方向 θ_0 である。図2は、 $\kappa_1 = 1, \kappa_2 = 2$ とした場合の異なる3種類の曲率パターンをもつ曲線の生成例である。生成曲線と曲率プロットを示す。

5 曲線の高次接続

曲率パターンの表現に自由度を加えたため、拘束条件を満たした上で、曲線形状の制御、および、曲線の高次接続が可能となった。その例を2つ示す。

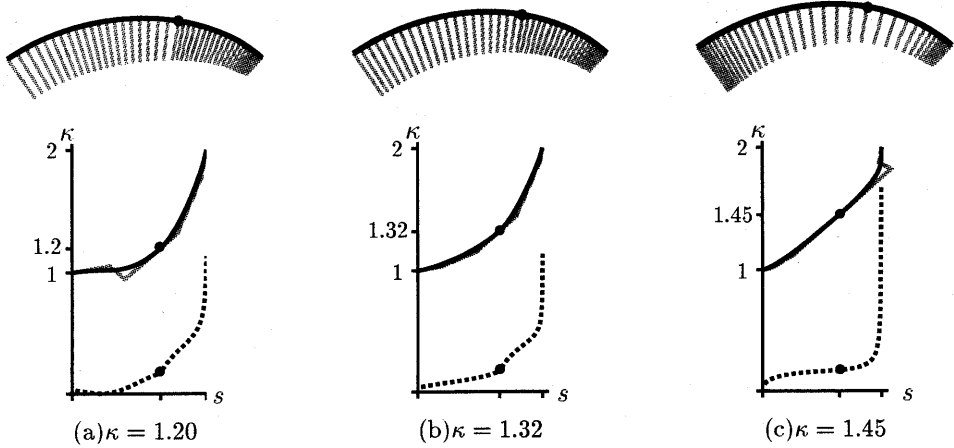


図 4: 曲率の制御例

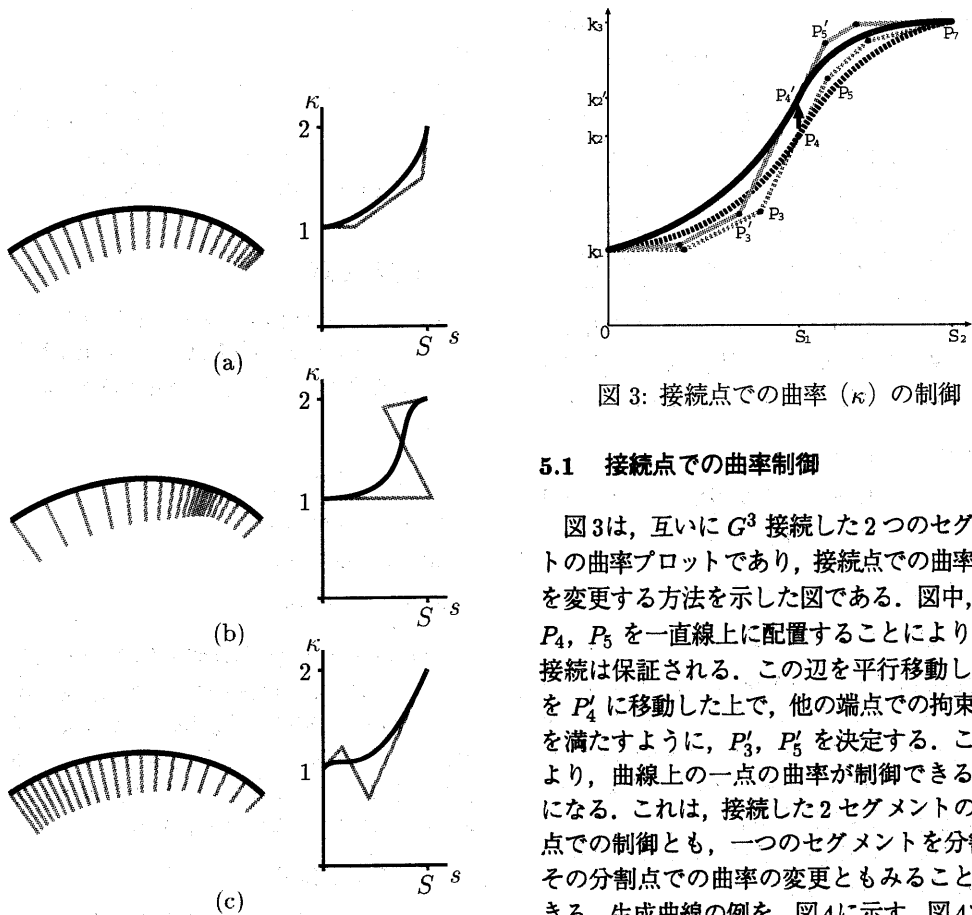


図 3: 接続点での曲率 (κ) の制御

5.1 接続点での曲率制御

図 3は、互いに G^3 接続した 2つのセグメントの曲率プロットであり、接続点での曲率のみを変更する方法を示した図である。図中、 P_3, P_4, P_5 を一直線上に配置することにより、 G^3 接続は保証される。この辺を平行移動し、 P_4 を P'_4 に移動した上で、他の端点での拘束条件を満たすように、 P'_3, P'_5 を決定する。これにより、曲線上の一点の曲率が制御できることになる。これは、接続した 2セグメントの接続点での制御とも、一つのセグメントを分割し、その分割点での曲率の変更ともみることができる。生成曲線の例を、図 4 に示す。図 4 では、接続点での曲率 κ を 1.20, 1.32, 1.45 とした例である。曲率プロット中の点線は $\kappa' = d\kappa/ds$ であり、これらも連続していることが分かる。

図 2: 曲率パターンを変えた生成例

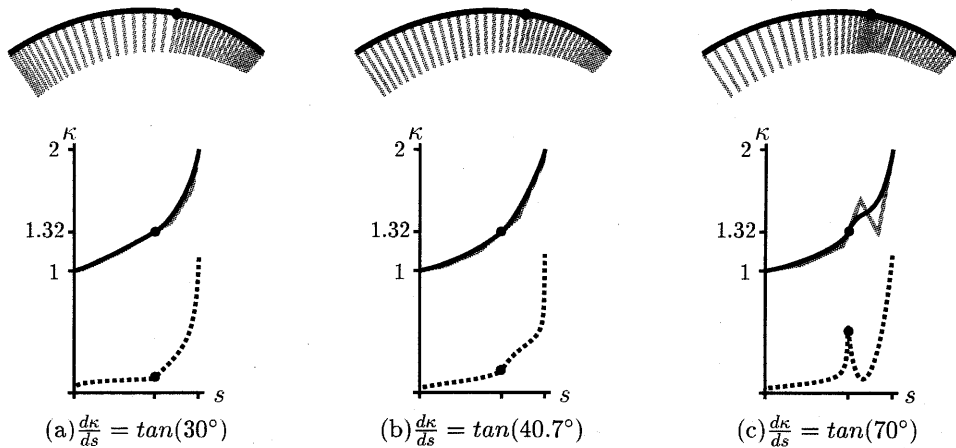


図 6: 曲率変化の制御例

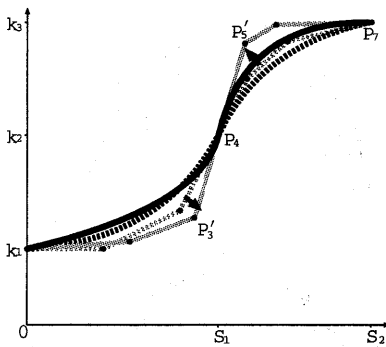


図 5: 接続点での曲率変化 (κ') の制御

5.2 接続点での曲率変化の制御

本法では、セグメントの両端点での曲率変化 κ' が指定できる。図 5 は、曲率プロット上での κ' の制御方法を図示したものである。接続辺 P_3, P_5 を、 P_4 を中心に回転することにより曲率 κ を変えずに、その変化 κ' のみを変えることができる。 P_3', P_4', P_5' は、他の条件より定まる。図 6 は、 κ' を、 $\tan(30^\circ)$ 、 $\tan(40.7^\circ)$ 、 $\tan(70^\circ)$ としたときの曲線生成例である。図 4 と同様に、曲率プロット中の点線より、 κ' の連続性が確認できる。

6 通過点での曲率を指定した曲線生成

曲率プロットの接続点での自由度を用いて、通過点での曲率変化を指定した曲線を生成す

ることができる。図 7 は、通過点列（生成曲線中の黒点）とその点での曲率（曲率プロット中の黒点）を指定した曲線を構成し、さらに接続点での κ' を変更した例である。曲率プロット中には、曲率を規定する Bézier 辺および κ' （点線）を書き加えた。図 7 において、通過点の位置と接続点での曲率は全て同じであるが、最初の接続点での曲率の傾き κ'_1 は、(a),(c) では $\tan(60^\circ)$ 、(b),(d) では、 $\tan(70^\circ)$ である。また、 κ'_2 は、(a),(b) では $\tan(-45^\circ)$ 、(c),(d) では $\tan(-60^\circ)$ である。図 7 より、曲率の変化も滑らかであることから、3セグメントの曲線が G^3 接続していることがわかる。

7 おわりに

本報告では、曲率パターンを 3 次 Bézier 曲線で表すことにより、両端点の位置、接続、曲率半径、さらに両端点での曲率の傾きを指定した曲線を生成する方法を述べた。これにより、高次接続と接続点での曲率制御が出来るようになった。

今後は、傾斜スプラインの解法への応用、生成曲線の性質の解明、空間曲線生成への応用などが課題である。

参考文献

- 1) 齊藤, 渡辺, 東:「縮閉線に基づく曲率変化の滑らかな曲線の生成」, 情報処理学会春期大会, 1994-3.

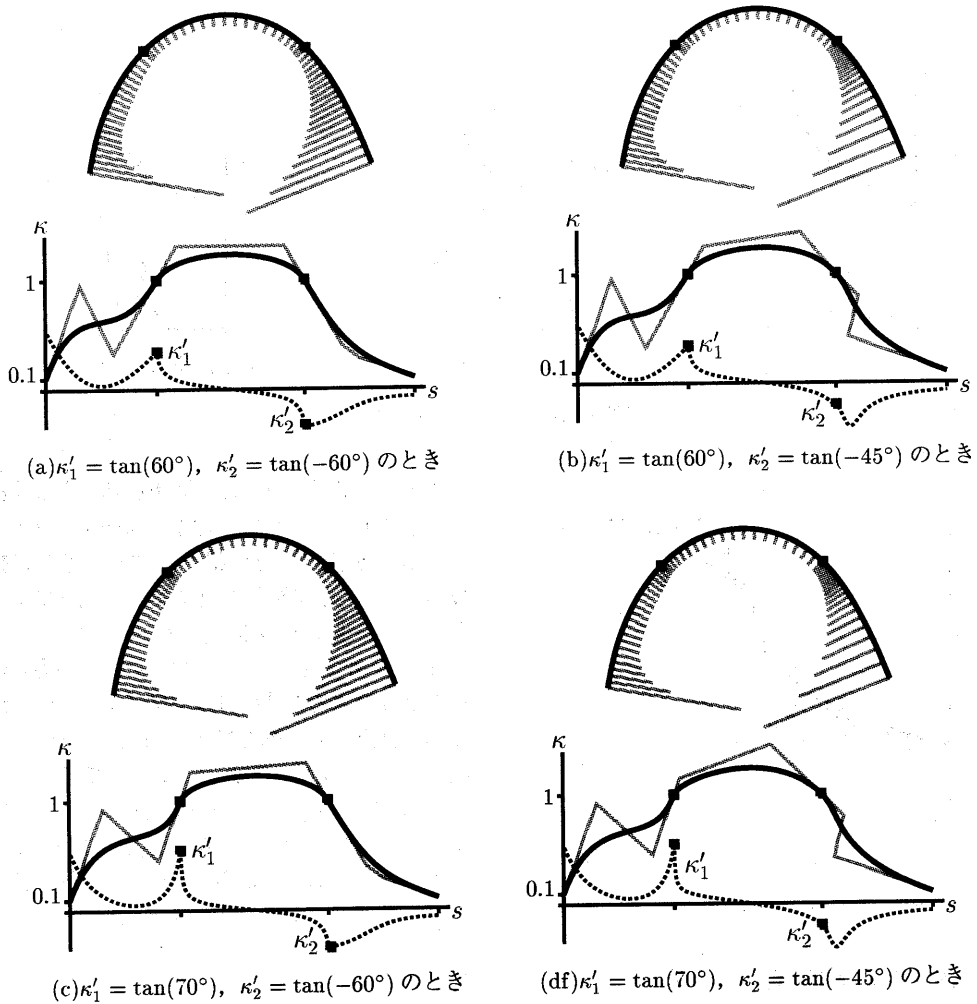


図 7: 通過点での曲率変化の制御例

- 2) 渡辺, 斉藤, 東: 「曲率変化の滑らかな曲線の生成」, 第 52 回情報処理学会春期大会, 1996-3.
- 3) 渡辺, 斉藤, 東, 黒田: 「曲率変化の滑らかな曲線の構成法」, 第 53 回情報処理学会秋期大会, 1996-9.
- 4) 黒田, 東, 斉藤, 渡辺: 「数式処理システムによるクロソイドスプライン補間曲線」精密工学会論文誌, 1996-12.
- 5) 黒田, 斉藤, 渡辺, 東: 「曲率が弧長の区分 2 次関数となる G^3 補間曲線」情報処理学会論文誌, 1997-3.
- 6) 黒田, 斉藤, 渡辺, 東: 「曲率連続な双クロソイド/第 2 クロソイドスプライン補間曲線」精密工学会論文誌, 1997-6.