

拡散システムを用いた、形状の対話的局所変形モデル

栗山 繁

豊橋技術科学大学 情報工学系

〒441-8580 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1の1

ポリゴンで構成される曲面をその頂点（または頂点群）を移動させて変形する際には、形状の連続性を保つことが望ましい。本研究では、局所的で滑らかな変形を実現するために、形状の変形前後の差分を表すオフセット曲面を、B-スプラインの性質を模倣するように構成する。このオフセット曲面は、隣接する頂点の変数の値を参照して離散的に計算されるので、変形の対象となる面上の領域は、ポリゴンのメッシュの網のパターン、位相、および詳細度に関係なく、任意の形で指定できる。

Interactive Local Shape Deformations Using a Diffusion System

Shigeru Kuriyama

Department of Information and Computer Sciences,
Toyohashi University of Technology,

Tenpaku-cho, Toyohashi, Aichi, 441-8580, Japan

A method is proposed for deforming a shape of a polygonal mesh by moving a vertex (or a cluster of vertices) of the mesh while preserving its continuous shape. An offset surface is generated as a difference through deformations so as to imitate the features of B-splines in order to realize local and smooth deformations. The offset surface is determined on the basis of discrete calculations that refer variables of nearby vertices, and therefore deformed regions can be specified with arbitrary shapes on a mesh, regardless of the mesh's net pattern, topology, and resolution.

1 はじめに

ポリゴンの集合で構成される曲面（以後、ポリゴンメッシュ）は、CGやCADのシステムで用いられる曲面の形状を線形に近似した表現形式であり、その幾何的および位相的なデータは、ポリゴンを構成する頂点の座標値と頂点間の隣接関係で構成される。ポリゴンメッシュは形状の数学的な連続性に関する制約条件を持たないので、柔軟な形状の構成と変形を可能とする反面、変形の際に形状の視覚的な滑らかさを保つためには頂点相互の位置関係の微妙な調節が必要とされる。

ポリゴンメッシュを滑らかに変形する手法の代表例として、ポリゴンを含む空間を変形させる手法 [1, 2, 3] が数多く提案されている。これらの変形は、3次元配列状の制御点で定義される局所的な座標空間内にポリゴンの各頂点を埋め込み、その制御点を移動させて定義される空間写像によりポリゴンの頂点の座標を変換する。従って、直観的で柔軟な変形操作が可能となるが、変形の対象となる曲面上の領域を陽には指定できないので、複雑な形の領域に対する局所的な変形には、制御点の配置に熟練を要する。

ポリゴンメッシュに対してエネルギー関数を導入し、その関数の値を最小化して形状を滑らかにする手法 [4] は、変形領域外の頂点の位置を固定させることにより局所的な変形が可能である。しかしながら、エネルギー関数には形状の連続性に関する制約条件が陽には含まれていないので、変形領域の境界における連続性が保証されないという問題点が指摘される。また、エネルギー関数の最小化には頂点の総数の自乗に比例する計算量を必要とするので、実時間での変形操作には適していない。

本研究では、これらの問題点を改良する一手法として、以下の特徴を有する変形手法を提案する。

- 曲面上の任意の点（あるいは閉領域内の点群）を直接移動させて変形する。
- 形状は移動後の点（あるいは閉領域内の点群）を含むように変形する。
- 変形後の形状は、その滑らかさと連続性を保つ。

2 オフセット面による変形モデル

ポリゴンメッシュの各頂点 v_i の変形後の位置座標 \tilde{P}_i を、変形前の位置 P_i に対し基底 B_i の定数倍で表されるオフセット面を加えたものとして、

$$\tilde{P}_i = P_i + T_m B_i \quad (1)$$

と表す。ただし、3次元ベクトル T_m は変形のために操作される頂点 v_m の移動量とし、変形後の形状が頂点 v_m を含むように $B_m = 1$ を満たすものとする。

ポリゴンメッシュが変形を施される局所的な領域（以後、 R_D とする）は、基底 B_i の台に相当する変数区間によって設定されるが、本手法ではこの変形領域をポリゴンメッシュの網のパターンや位相、および詳細度とは無関係に任意の形状で指定する。ここで、変形領域内の頂点は基底の値によって移動するので $\forall v_i \in R_D, B_i \neq 0$ であり、その領域外（以後、 R_F とする）での頂点の位置は固定されるので $\forall v_i \in R_F, B_i = 0$ となる（ただし、 $v_i \in R_X$ は頂点 v_i が領域 R_X 内の頂点の集合に含まれることを意味する）。

以後の節において、変形後の形状がその連続性や滑らかさを保つように、基底 B_i の値を計算する手法を述べる。

2.1 基底の平滑化

基底 B_i によって離散的に近似される数学モデルとして、スプライン曲面を局所的に制御する際に用いられる、3次のB-スプライン $B(x)$ のテンソル積の基底 $B(u, v) = B(u)B(v)$ を考える。この基底で構成される曲面を等温面と仮定すると、その平均曲率 H は以下の関係式で表される。

$$\begin{aligned} 2H &= \frac{\partial^2 B(u, v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 B(u, v)}{\partial v^2} \\ &= \frac{\partial^2 B(u)}{\partial u^2} B(v) + B(u) \frac{\partial^2 B(v)}{\partial v^2} \quad (2) \end{aligned}$$

本手法で用いる基底の値はテンソル形式を考慮しない（すなわち、各頂点は面上で定義される2次元座標系 (u, v) に埋め込まれない）ので、変数 B_i の値はB-スプライン $B(u), B(v)$ に相当するもの

とし、変数 B_i の2次微分量を表す新たな変数 R_i を導入して、

$$H = R_i B_i \quad (3)$$

の関係を仮定する。

ここで隣接する頂点の番号の集合を C_i とし、 j 番目の頂点と i 番目の頂点間の変数間隔を $\delta_{j,i}$ とすると、基底 B_i の平均曲率を離散的に近似した値 \tilde{B}_i は、離散ラプラシアン (または、拡散オペレータ) Δ を用いて以下の式で計算される。

$$\tilde{B}_i = \frac{\sum_{j \in C_i} \delta_j^{-1} \Delta B_i}{\sum_{j \in C_i} \delta_j} = \frac{1}{k_i} \Delta B_i,$$

$$\Delta B_i = \frac{1}{\sum_{j \in C_i} \delta_j^{-1}} \sum_{j \in C_i} \left(\frac{B_j - B_i}{\delta_j} \right)$$

ただし、表記を簡略化するために変数間隔の添字の i が自明な場合 $\delta_{j,i} \rightarrow \delta_j$ のように略記する。変数間隔 $\delta_{j,i}$ の値は任意に設定できるが、全ての間隔を一定値で設定すると、隣接する頂点間の距離が他と比較して短い箇所において不自然な突起や折り返しが生じてしまうので、変形前の頂点の幾何学的な距離 $\delta_{j,i} = \|\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i\|$ (ただし、 $\|\cdot\|$ は、ベクトルの長さを表す) で設定する。

式(3)の関係より、領域内部での基底の平均曲率 \tilde{B}_i の値が B_i 、 R_i の値に収束するように、以下の式で基底の値を B'_i に更新する。

$$B'_i = B_i + \lambda k_i (\tilde{B}_i - R_i B_i)$$

$$= B_i + \lambda \Delta B_i - \lambda k_i R_i B_i \quad (4)$$

ここで、 λ は拡散定数を表し、収束の必要条件として0から1の範囲の値をとる [6]。また、計算が自明な解 $\forall v_i \in \mathbf{R}_D, B_i \equiv 0$ に収束するのを避けるために、領域 \mathbf{R}_D と \mathbf{R}_F の基底の値の初期値を各々 $B_i = 1$ および $B_i = 0$ とする。

変数 R_i の値は3次のB-スプライン $B(x)$ の2次微分量の離散的な近似値なので、領域内部での値は線形に補間される必要がある。従って、 R_i の平均曲率 \tilde{R}_i の値が0に近付くように、以下の拡散システムを用いて R'_i の値に更新する。

$$R'_i = R_i + \lambda k_i \tilde{R}_i = R_i + \lambda \Delta R_i \quad (5)$$

式(4)、(5)の更新計算は、変形領域内の全ての頂点に対して基底の値の変動量が閾値 ϵ 以下: $\forall v_i \in$

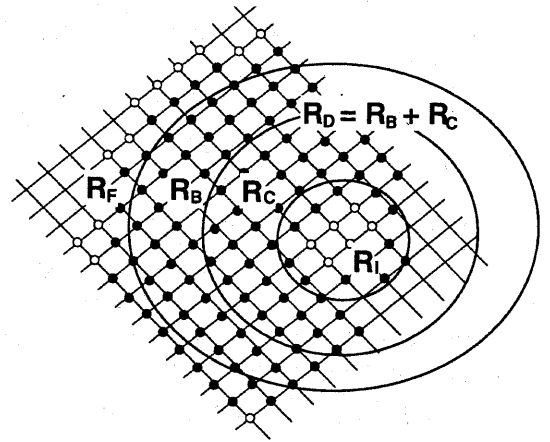


図 1: 変形領域とその部分領域の模式図

$\mathbf{R}_D, \|B'_i - B_i\| < \epsilon$ になった際に繰り返しを打ち切る。ただし、閾値 ϵ の値は曲面の大きさの 0.1 % 程度に設定する。また、更新計算が収束した後、変形を受けたポリゴンメッシュが移動する頂点 v_m を含む (補間する) ようにするために、変形領域における基底の値を正規化: $\forall v_i \in \mathbf{R}_D, B_i = B_i / B_m$ する。

2.2 境界での連続性制御

前節における式(5)だけでは、変数 R_i の値は一意には定まらないが、この値を単純に $\forall v_i \in \mathbf{R}_D, R_i = 0$ と設定して式(4)によって基底を計算した場合、図3の例で示されるように、変形領域の境界における形状の連続性が損なわれてしまう。ゆえに、平均曲率の近似値 \tilde{B}_i が境界において0の値に補正されるように、境界での変数 R_i の値を以下のように更新する。

$$R'_i = R_i + \mu \tilde{B}_i = R_i + \mu \frac{\Delta B_i}{k_i}$$

ただし、定数 μ の値は0から1の間に設定される。

一つの頂点 v_m を移動させる場合、基底関数はその点で最大値を取るように生成するのが望ましいので、変数 R_m の値を0に固定することが考えられる。しかしながら、スプライン曲面のモデルとなる薄膜をある1点を固定しながら張ることは出来ない。図4の例が示すように、基底の形状は移動点

v_m において尖鋭化してしまう。従って、本手法では変形領域 R_D を2つの副領域 R_B と R_C に分割し (図1参照。ただし、領域 R_I は一つの点のみを含むものとする)、変数 R_i は外側の領域 R_B でのみ拡散され、内側の領域 R_C では一定値 $R_i = 0$ とする。このとき、基底 B_i で構成される面の領域 R_C での基底は平均曲率の値が0となる極小曲面を近似するように生成されるので、オフセット面は変形後の面積の増分が最小となるように平滑化される。一方、領域 R_B は変形後の形状の境界での連続性を制御するための緩衝領域と見なせる。

以上に述べた点を要約すると、以下の拡散システムが導かれる。

$$R'_i = \begin{cases} R_i + \mu \Delta B_i / k_i, & v_i \in R_F \\ R_i + \lambda \Delta R_i, & v_i \in R_B \\ 0, & v_i \in R_C \end{cases} \quad (6)$$

$$B'_i = \begin{cases} 0, & v_i \in R_F \\ B_i + \lambda \Delta B_i - \lambda k_i R_i B_i, & v_i \in R_B \\ B_i + \lambda \Delta B_i, & v_i \in R_C \end{cases} \quad (7)$$

ただし、接続関係にある全ての頂点が領域 R_F 内に含まれている場合は、変形後の形状に影響を与えない点として更新計算の対象から除外される (図1の白丸を参照)。

図5と図6に異なる領域 R_C に対する基底の生成例を示す。

2.3 閉領域内の頂点群の移動

一つの頂点の選択と移動による変形操作は簡略で直観的であるが、点を用いた変形のパターンには限りがある。ゆえに本節では、面上の閉領域 R_I (図1を参照) 内の頂点群を同時に移動させる変形を導入する。ただし、補間の条件: $\forall v_i \in R_I, B_i = 1$ の下で変数 B_i と R_i の値を式 (6) と (7) で計算するだけでは、領域 R_I の境界における連続性が考慮されていないので、その境界での連続性を制御する新たな変数 S_i を導入する。

ここで変数 S_i は変形のために区分される領域に関して R_i と双対な変数であり、 S_i の領域 R_I と R_C での値の更新方法は、 R_i の領域 R_F と R_B での更新方法と同様に定義される。また、基底 B_i の

平均曲率は、領域 R_B においては $R_i B_i$ の値に、領域 R_C においては $S_i B_i$ の値に収束するように、以下のように計算される。

$$S'_i = \begin{cases} 0, & v_i \in R_B \\ S_i + \lambda \Delta S_i, & v_i \in R_C \\ S_i + \mu \Delta B_i / k_i, & v_i \in R_I \end{cases}$$

$$B'_i = \begin{cases} 0, & v_i \in R_F \\ B_i + \lambda \Delta B_i - \lambda k_i R_i B_i, & v_i \in R_B \\ B_i + \lambda \Delta B_i - \lambda k_i S_i B_i, & v_i \in R_C \\ 1, & v_i \in R_I \end{cases}$$

ただし、変数 R_i の値は式 (6) を用いて計算され、隣接する全ての頂点が領域 R_I 内に存在する場合には計算の対象外となる。

図7で示される、頂点群の移動による変形の例により、領域 R_I の境界でのポリゴンメッシュの形状の連続性が確認できる。また、図8と図9に異なる網パターンのメッシュに対する変形の類似性を示す。ただし、図8は四辺形ポリゴンのみで構成される規則的なメッシュを、図9は3辺から6辺を有するポリゴンで構成される不規則なメッシュを対象とした変形の例である。ただし、矢印は移動ベクトル T_m を表す。

3 おわりに

本研究で提案した拡散システムに基づくポリゴンメッシュの変形手法は、以下の利点を有する:

- メッシュ上の任意の頂点 (あるいは頂点群) を選択し移動させるだけで直観的に変形できる。
- 変形領域が、メッシュの網パターン、位相、および詳細度に関係なく任意の形で設定できる。
- 変形後の形状は3次のスプライン関数の滑らかさおよび連続性を模倣する。

拡散システムの数値的な振舞いは、拡散定数 λ と μ の値に大きく依存するが、計算の効率性や安定性等を考慮してこれら定数の値を最適化する必要がある。

基底の値 B_i は形状の変形領域を指定した際に前処理として1度だけ計算すれば良く、頂点の移動に

よる対話的な変形の際には、式(1)において T_m の値のみが変化するので、その計算コストは変形領域内の頂点の総数に比例したものとなる。しかしながら、変形領域を対話的に変更する場合には基底の値は絶えず更新しなければならないが、ポリゴンメッシュを階層的に構成して B_i の更新計算を段階的に進めていけば、収束までの計算量を大幅に軽減でき、変形領域内の頂点の総数にほぼ比例する計算量で基底の値が計算できる [5]。

今後は、頂点群の回転移動を取り入れ、曲げや捻りの変形を実現する予定である。

参考文献

- [1] SEDERBERG, T. W. AND PARRY, S. R. Free-Form Deformation of Solid Geometric Models. In *Proceedings of SIGGRAPH '86*, in *Comput. Graph.*, 20, 4 (1986), 151-160.
- [2] COQUILLART, S. Extended Free-Form Deformation: A Sculpting Tool for 3D Geometric Modeling. In *Proceedings of SIGGRAPH '90*, in *Comput. Graph.*, 24, 4 (1990), 187-196.
- [3] MACCRACKEN, R. AND JOY, K. I. Free-Form Deformations with Lattices of Arbitrary Topology. In *Proceedings of SIGGRAPH '96*, in *Comput. Graph. Proceedings, Annual Conference Series* (1996), 181-188.
- [4] WELCH, W. AND WITKIN, A. Free-Form Shape Design Using Triangulated Surfaces. In *Proceedings of SIGGRAPH '94*, in *Comput. Graph. Proceedings, Annual Conference Series* (1994), 247-256.
- [5] KURIYAMA, S. AND TACHIBANA, K. Polyhedral Surface Modeling with a Diffusion System. In *Proceedings of Eurographics '97*, in *Comput. Graph. Forum* 16, 3 (1997), 39-46.
- [6] SENETA, E. In *Non-Negative Matrices, An Introduction to Theory and Applications*, John Wiley & Sons (1973).

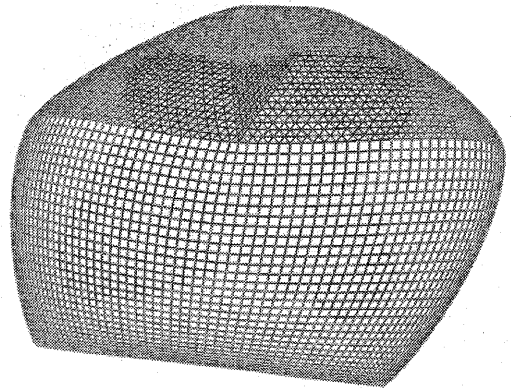


図 2: 変形前のポリゴンメッシュ

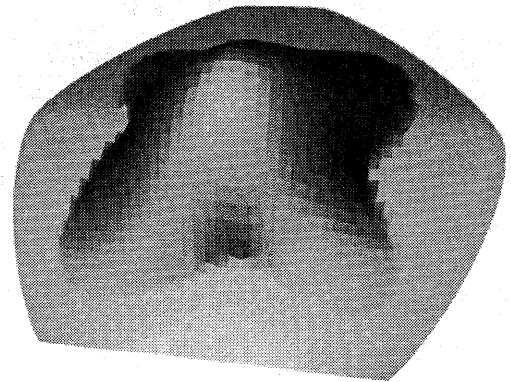


図 3: 境界での連続性を考慮しない変形

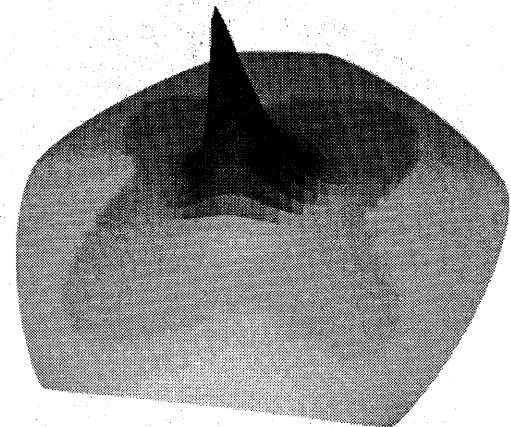


図 4: 固定点のみの指定による変形

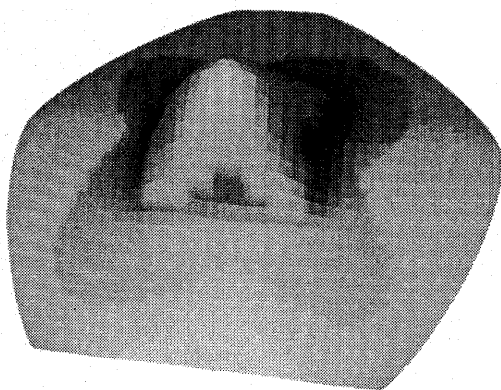


図 5: 極小曲面の領域を導入した変形 (その1)

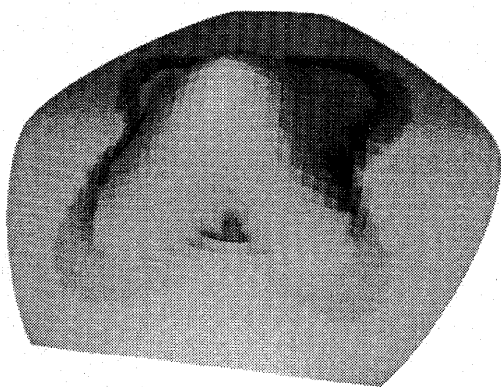


図 6: 極小曲面の領域を導入した変形 (その2)

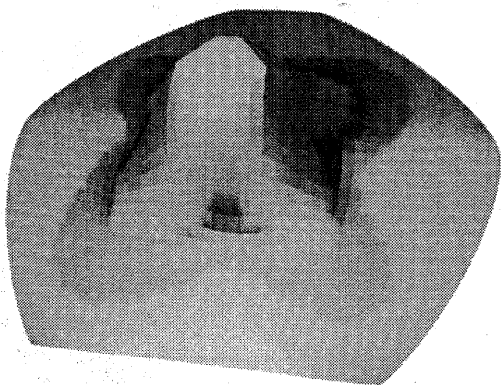


図 7: 閉領域での頂点群を移動させた変形

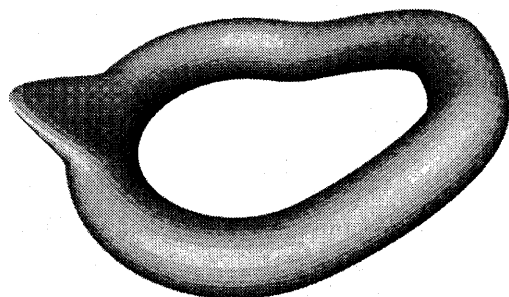
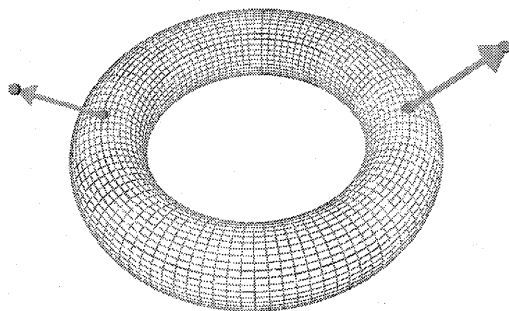


図 8: 規則的なメッシュに対する変形操作例

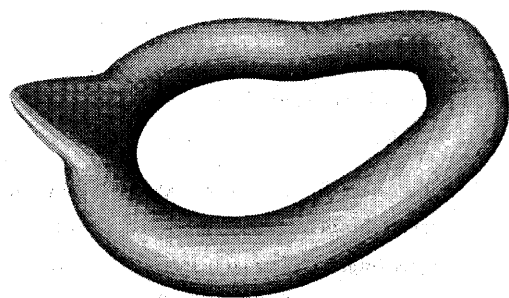
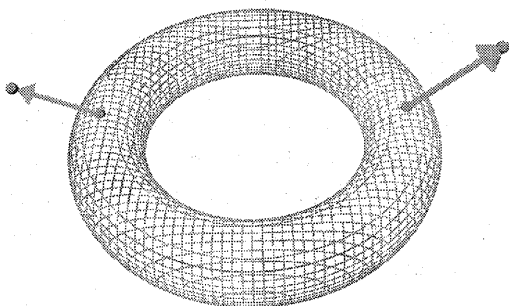


図 9: 不規則なメッシュに対する変形操作例