解像度によらず位相を保つ平面曲線の表示

金澤 芳之　　金谷 健一

群馬大学工学部情報工学科

方程式で表される平面曲線を、区間評価と平均値形式とクラフチック形式を用いた区間解析による臨界点の検出と領域の再帰的分割とを併用することによって効率的に表示する。交差や分岐やループの判定のために終結式等の数式処理を用いると処理の負担のため低次の多項式にしか適用できないが、本方法はそのような処理が不要であるばかりでなく、曲線が代数方程式で表される必要さえない。そして、本方法では解像度をどのように指定しても曲線の位相 (接続関係) が正しく保たれる。これを実験的に確認するとともに、応用として曲面の縁と輪郭の描画が本システムで容易に実行できることを示す。

キーワード: コンピュータグラフィクス、平面曲線、臨界点、区間解析、曲面、輪郭線

Displaying Planar Curves with Correct Topology in All Resolutions

Yoshiyuki Kanazawa and Kenichi Kanatani

Department of Computer Science
Gunma University, Kiryu, Gunma 376-8515 Japan

We present an efficient method for displaying planar curves by detecting all critical points and recursively subdividing the domain. Critical points are detected by interval analysis involving interval evaluation, mean-value forms, and Krawczyk forms. Our system does not require any symbolic computation for judging intersections, branches, and loops, which can be applied only to low-dimensional polynomial curves due to its computational burdon; our system does not even require the curve to be algebraic. Also, the topology (connection) of the curve is always correct in whatever resolution. We demonstrate these by exaperiments and show that our system can be applied to draw brims and occluding contours of a curved surface in space.

Key words: computer graphics, planar curve, critical point, interval analysis, surface, occluding contour

謝辞: 区間解析について御教示頂いた中央大学の山村清隆助教授に感謝します。本研究の一部は文部省科学研究費基盤研究C (2) (No. 09680352) によった。

* 376-8515 桐生市天神町 1-5-1 群馬大学工学部情報工学科, Tel: (0277)30-1842, Fax: (0277)30-1801
E-mail: yosiyuki@ail.cs.gunma-u.ac.jp, kanatani@cs.gunma-u.ac.jp

1. 序論

曲線や曲面を視覚化して表示することはグラフィクスやCADの基本であるだけでなく、数学教育の教材作成にも欠かすことができない。本報では座標の関数の零点集合として定義される平面曲線を考える (空間曲線については次報 [6] で扱う)。数学教育で現われる曲線のほとんどはこのような陰関数で表現されている。座標値がパラメータによって陽に表現されている場合は単にパラメータを変化させながら軌跡を表示すればよいが、陰関数で表現されている場合は表示が容易ではない。

よく研究されているのは関数が座標の多項式で書かれる代数曲線である [15]。これはCADでよく用いられる曲線が代数曲線であることと [1, 14]、代数学の理論が数式演算に応用しやすいことのためと思われるが [13]、ここでは代数関数に限定せず、三角関数、逆三角関数、指数関数、対数関数なども含めた、いわゆる "式で書ける" 関数 (正式には "初等関数") で表せる曲線を考える。そして、これを輪郭線による曲面の表示に応用する。

2. 曲線の表示

2.1 追跡法

よく行なわれるのは、曲線上に初期点をとり、そこから曲線の方向を計算してはそれに沿って進むという「追跡法」である [2, 15]。追跡の方法には常微分方程式の数値解法に帰着させる方法や、ニュートン法を繰り返して適用する方法や、それらのいろいろな変形がある。しかし、次の問題が避けられない。

- 初期点を計算する一般的な方法がない。
- 複数の連結成分や孤立点や微小ループがあるとき、すべてが尽くされているかの判定が困難。
- 曲線の異なる部分が隣接しているとき、追跡が一方から他方へ飛び越すことがある。
- 分岐や交差を生じる特異点で計算が破綻する。

谷口ら [15] は手の込んだステップ幅の調整や終結式の数式処理などによってこれらを避けることを試みているが、計算量が膨大になり、実質的には 6 次以下の曲線しか扱えない。もちろん代数関数ではない初等関数で表される曲線には適用できない。

2.2 分割法

対照的な方法は表示領域を分割し、各領域での関数の符号と値を調べて関数値が 0 になると思われるセグメントを生成する「分割法」である。一律に分割する例としては、ディジタル画像の濃淡値が一定の曲線を生成するためによく用いられ、特に物体と背景を分離するエッジをラプライアンフィルタをかけた画像の値 0 の曲線として求める方法 (「零交差法」 [8]) がよく知られている。再帰的に分割する例としては、CAD形状モデラにおいて 4 分木、8 分木から境界表現を得る方法としてよく知られている [10, 11]。この手法によれば上述の追跡法の困難は解消されるが、次のような欠点がある。

- 分割サイズ (解像度) 以下の位相 (接続関係) が正確には表せない。交差や孤立点や微小ループが見逃されることがある。
- 分割した各部分を正しく接続して全体の表現を作るのが複雑になる。
- 領域を細かく分割するには多くの計算時間を要する。

本論文の目的は、追跡法の前述の欠点が本質的なものであって回避困難であるのに対し、分割法の上述の欠点は克服可能であることを示すことにある。第 2 点はCADのような設計が目的の場合に問題となるが、数学教材のように単に表示が目的な場合は大域的な表現は必要ではない。第 3 点は分割を粗くすれば解決する。最大の障害は第 1 点であるが、本論文の提案は、どんなに粗く分割しても位相が保たれるように表示することである。

2.3 臨界点の抽出

曲線の位相を定めるのは臨界点と特異点である。曲線 $f(x,y)=0$ の「臨界点」とは

$$f_x(x,y)=0, \qquad f_y(x,y)=0 \tag{1}$$

を満たす点であり、さらにその点で $f(x,y)=0$ となれば「特異点」と呼ぶ。曲線が交差、分岐する点は特異点であり、ループがあればその内部に臨界点が存在する。曲線の二つの部分が非常に近接しているか交差しているかを判定するには谷口ら [15] のようにな複雑な数式処理は必要なく、またそれを判定できるだけ解像度を上げる必要もない。単に特異点が存在するかどうかを調べればよい。存在すれば交差し、存在しなければ交差しない。孤立点や微小ループについても同様である。ある分割領域の内部に臨界点が存在しないことがわかれば孤立点も微小ループも存在しないことが保証される。

表示領域内のすべての臨界点を抽出することは非線形連立方程式のすべての解を検出することに帰着する。これは電子回路の解析に関してよく研究され、代表的なものは平均値の定理と縮小写像の不動点定理を組み合わせた区間解析を用いながら空間を再帰的に分割して調べる「クラフチックの方法」およびその変形である [3, 4, 12, 16, 17, 18]。これらは数百、数千の変数の方程式を対象とするものであるが、平面曲線の表示では 2 変数であり、非常に効率的に実行できる。

本論文ではクラフチックの方法によってすべての臨界点を検出し、それらが格子点となるように分割を行

う。格子内部に臨界点の存在しないことが保証されているから、内部では交差も分岐も孤立点もループも存在しない。これによって位相を保つ折れ線表示が可能となる。曲線に滑らかさを要求するなら必要なだけ分割を細かくすればよい。

3. 区間解析

3.1 区間代数

区間解析とは関数の各引数のとる範囲を区間として指定したとき、その関数値が取り得る値を含む区間を計算することである [9, 12]。区間演算は、例えば四則演算であれば $+, -, \times, /$ を $\circ$ と書くとき、区間 I, I' に対して

$$I \circ I' = \{x \circ x' | x \in I, x' \in I'\} \tag{2}$$

と定義される。具体的にはそれぞれの区間の端点同士の演算によって得られる値の内の最大値と最小値を計算すればよい。実数に $+\infty, -\infty$ を付加した数体系を定義すれば常に値が常に定まる。このような区間演算は単項演算や三角関数、逆三角関数、指数関数、対数関数、その他の種々の演算に容易に拡張できる。

3.2 非零判定

関数 $f(x,y)$ の x, y のそれぞれの範囲を区間 I_x, I_y とするとき、関数 $f(x,y)$ を定義する演算をすべて区間演算に置き換えて得られる区間を $f(I_x, I_y)$ と書く。このとき $0 \notin f(I_x, I_y)$ なら曲線 $f(x,y) = 0$ は領域 $I_x \times I_y$ を通過しないことが保証される。$0 \in f(I_x, I_y)$ なら領域をさらに細分すれば曲線 $f(x,y) = 0$ の通過範囲をより限定することができる。

しかし、単に各変数を区間に置き換えて区間評価したのでは範囲が過大評価になることが多い。これを改良する方法としてよく知られているのが導関数の利用である。区間 I の中点を $I_{.m}$ と書き、関数 $f(x,y)$ の「平均値形式」を次のように定義する (実数は幅 0 の区間とみなして区間との演算を定義する)。

$$\begin{aligned} M_f = f(I_{x.m}, I_{y.m}) + f_x(I_x, I_y)(I_x - I_{x.m}) \\ + f_y(I_x, I_y)(I_y - I_{y.m}) \end{aligned} \tag{3}$$

このとき $0 \notin M_f$ なら $0 \notin f(I_x, I_y)$ が保証される [9, 12, 16]。

3.3 解の検出

領域 $I_x \times I_y$ 上の連立方程式

$$f(x,y) = 0, \quad g(x,y) = 0 \tag{4}$$

を考える。区間評価および平均値形式によってこの領域で $f(x,y) \neq 0$ または $g(x,y) \neq 0$ と判定されれば解は存在しない。「クラフチック形式」を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{x.m} \\ I_{y.m} \end{pmatrix} - \boldsymbol{L} \begin{pmatrix} f(I_{x.m}, I_{y.m}) \\ g(I_{x.m}, I_{y.m}) \end{pmatrix} \\ + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}\mathcal{D}) \begin{pmatrix} I_x - I_{x.m} \\ I_y - I_{y.m} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

ただし $\boldsymbol{I}$ は 2×2 単位行列であり、$\mathcal{D}$ は次のように定義した「区間勾配行列」である。

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} f_x(I_x, I_y) & f_y(I_x, I_y) \\ g_x(I_x, I_y) & g_y(I_x, I_y) \end{pmatrix} \tag{6}$$

$\boldsymbol{L}$ は区間勾配行列の各要素区間の中点からなる行列の逆行列である。

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} f_x(I_x, I_y)_{.m} & f_y(I_x, I_y)_{.m} \\ g_x(I_x, I_y)_{.m} & g_y(I_x, I_y)_{.m} \end{pmatrix}^{-1} \tag{7}$$

このとき $K_x \cap I_x = \emptyset$ または $K_y \cap I_y = \emptyset$ なら領域 $I_x \times I_y$ に解が存在しないことが保証される [12, 16]。

一方、$K_x \subset I_x$ かつ $K_y \subset I_y$ のときは

$$\|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}\mathcal{D}\|_\infty < 1 \tag{8}$$

ならこの領域内に唯一の解が存在し、ニュートン法がその点に収束することが保証される [12, 16]。ただし、区間 I_{ij} を要素とする行列 $\mathcal{I} = (I_{ij})$ の「ニュートンノルム」 $\|\mathcal{I}\|_\infty$ を

$$\|\mathcal{I}\|_\infty = \max_i \sum_j \mathrm{maxabs}(I_{ij}) \tag{9}$$

と定義する ($\mathrm{maxabs}(I)$ は区間の端点の絶対値の大きいほうである)。どちらとも判定できない場合は領域をさらに細分して調べる。

4. 平面曲線の表示

曲線 $f(x,y) = 0$ を表示するには、まず指定された表示領域内部の式 (1) を満たす臨界点を前節の区間解析によってすべて検出する。ユーザが希望する格子間隔を「解像度」として指定すると、格子間隔がそれ以下になるまで領域を各方向に再帰的に 2 分割し、内部に臨界点をもつ格子は臨界点が頂点となるようにさらに分割する。この分割の各ステップにおいて区間評価および平均値形式による区間解析を行い、曲線が通過し得ないものは除外する。これによって分割が曲線の近傍に限定されるので、計算が極めて効率的である。

このようにして定めた曲線の通過し得る各長方形領域に対して、それを囲む 4 本の辺上で $f(x,y) = 0$ となる点をすべて計算する。これは 1 変数関数の零点の

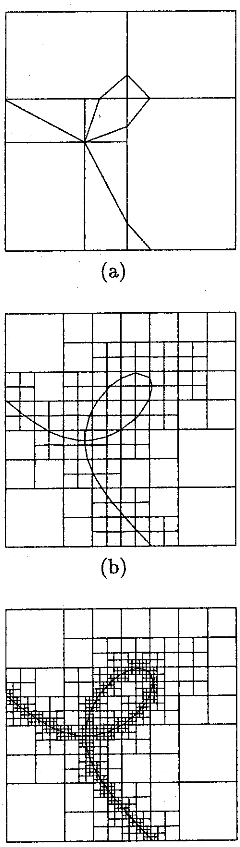


図 1: 曲線 $x^3+y^3-3xy=0$ の表示とその格子分割。(a) 解像度が 1 辺の長さ。(b) 解像度が 1 辺の 1/8 の場合。(c) 解像度が 1 辺の 1/64 の場合。

計算であり、その辺上で区間評価、平均値形式、およびクラフチック形式を適用する。これは前節の区間解析の 1 次元版であり、1 変数関数 $f(x)$ の区間 I 上の平均値形式およびクラフチック形式はそれぞれ次のように定義される。

$$M_f = f(I_{.m}) + f'(I)(I - I_{.m}) \tag{10}$$

$$K_f = I_{.m} - \frac{f(I_{.m})}{f'(I)_{.m}} + \left(1 - \frac{f'(I)}{f'(I)_{.m}}\right)(I - I_{.m}) \tag{11}$$

そして $0 \notin f(I)$ または $0 \notin M_f$ または $K_f \cap I = \emptyset$ なら区間 I に解が存在しないことが保証され、$K_f \subset I_x$ のとき $|1 - f'(I)/f'(I)_{.m}| < 1$ ならならこの区間に唯一の解が存在し、ニュートン法がその点に収束することが保証される [12, 16]。しかし、実際の解の計算には解の非存在が保証されない区間の両端での関数の符号を調べては区間を細分する「はさみ打ち法」のほうが簡便であり、本システムではこちらを採用している。

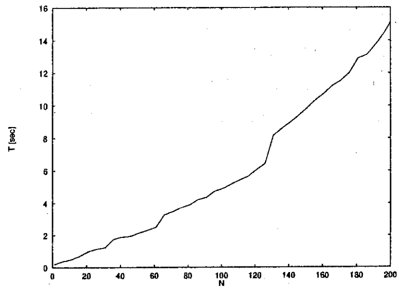


図 2: 解像度が 1 辺の $1/N$ の表示の計算時間 (単位は秒)。

次に、このようにして得られた点を結んで線分を生成する。格子内部には交差も分岐も孤立点もループも存在しないことが保証されているから、孤立点でない特異点以外は他の 1 点のみと結ばれ、かつどれも交差しないものを候補とし、複数の候補がある場合は候補線分上で値が 0 に近いかを判定して選択する。そして、得られた線分を平面上に描画する。

上記の実行のために、あらかじめ臨界点を特異点とそうでないものに分類し、特異点をさらに孤立点と連結点とに分類しておく。それには特異点を中心とし、ユーザが指定し得る最小の解像度を半径とする円を考え、その円周上の偏角 θ の点での $f(x,y)$ の値をとる 1 変数関数 $f(\theta)$ を定義する。そして区間 $[0, 2\pi]$ 上で区間評価、平均値形式、およびクラフチック形式を適用し、$f(\theta) = 0$ の解が存在するものを連結点、しないものを孤立点と判定する。

図 1は交差とループのある曲線

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0 \tag{12}$$

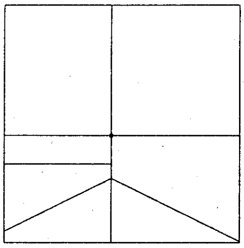
を領域 $[-2.5, 3.2] \times [-2.5, 3.2]$ に表示した例である。(a) は最も粗い解像度、すなわち表示領域の辺そのものを解像度とする表示であり、(b), (c) はそれぞれ解像度が 1 辺の 1/8, 1/64 の場合である。同時に格子分割の様子も示している。これから、区間解析により曲線の近傍のみが分割されていることがわかる。図 2は解像度を 1 辺の $1/N$ とした場合の計算時間を N に対してプロットしたものであり、ほぼ $O(N)$ であることがわかる (区間解析を用いないと $O(N^2)$ となる)。図 3, 4はそれぞれ孤立点のある曲線

$$x^3 + x^2 + y^2 = 0 \tag{13}$$

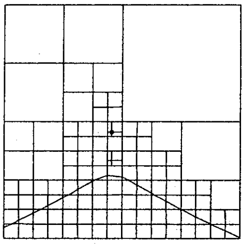
および結び目状の曲線 [15]

$$x^4 - 2y^3 - 3y^2 - 7x^2 + 1 = 0 \tag{14}$$

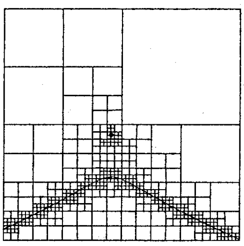
を図 1と同様に表示した例である。



(a)



(b)



(c)

図 3: 曲線 $x^3 + x^2 + y^2 = 0$ の表示とその格子分割。(a) 解像度が 1 辺の長さ。(b) 解像度が 1 辺の 1/8 の場合。(c) 解像度が 1 辺の 1/64 の場合。

関数 $f(x,y)$ に対して曲線 $f(x,y) - c = 0$ を表示し、c を変化させれば曲面 $z = f(x,y)$ の等高線が表示できる (臨界点は c の値によらないから一度だけ計算すればよい)。図 5はこの方法によって曲面

$$z = x^3 - 3x^2 + 3y^2 \qquad (15)$$

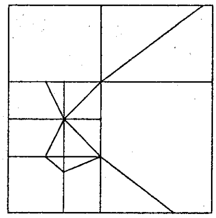
の等高線を領域領域 $[-2.5, 3.2] \times [-2.5, 3.2]$ に表示した例である。

5. 曲面の表示

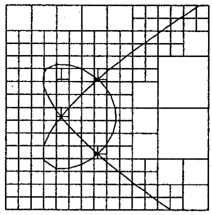
曲面

$$z = f(x,y) \qquad (16)$$

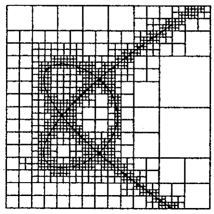
の輪郭線と縁による表示を考える。縁は表示領域の周上を解像度の幅に刻み、それに高さ z を付与した点を結んで空間に折れ線で描画すればよい。輪郭線は次のように表示される。視点$v : (v_1, v_2, v_3)$から見たときに、この曲面上の点$P : (x,y,z)$が輪郭母線上にある必要十分条件は、点 P における接平面が視点 V を含むことであり、次のように書ける [5]。



(a)



(b)



(c)

図 4: 曲線 $x^4 - 2y^3 - 3y^2 - 2x^2 + 1 = 0$ の表示とその格子分割。(a) 解像度が 1 辺の長さ。(b) 解像度が 1 辺の 1/8 の場合。(c) 解像度が 1 辺の 1/64 の場合。

$$(x - v_1)f_x + (y - v_2)f_y - (f - v_3) = 0 \qquad (17)$$

したがって xy 面上の表示領域においてこの式の定義する曲線の線分を生成し、両端に z 座標を付与した空間の線分を定義し、視点 v から見た像を表示すればよい。

図 6(a) は曲面

$$z = xy + y^3 \qquad (18)$$

を、図 6(b) は曲面

$$z = x^2 - x^2y + y^3 \qquad (19)$$

をこのようにして表示したものである。これらはそれぞれ視点を「くさび」および「くちびる」と呼ばれる

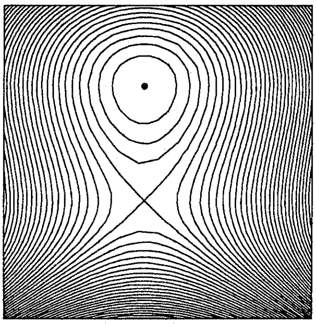
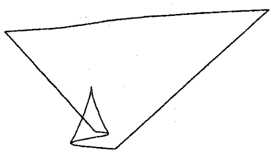
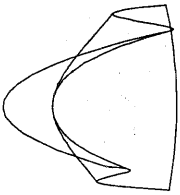


図 5: 関数 $z = x^3 - 3x^2 + 3y^2$ の等高線。



(a)



(b)

図 6: (a) 曲面 $z = xy + y^3$ の表示。(b) 曲面 $z = x^2 - x^2y + y^3 = 0$ の表示。

特異点が輪郭上に現われる位置の近傍に置いたものである [5, 7]。ともに解像度は定義域の一辺の 1/8 であるが、特異点の部分の位相が正しく表示されている。

6. まとめ

本論文では方程式で表される曲線を表示する従来の追跡法の問題点を指摘した。そして、それが区間評価、平均値形式、クラフチック形式を用いた区間解析による臨界点の検出と空間の再帰的分割とを併用することによって解決することを示し、任意に指定した解像度において位相が正しく保たれることを実験的に確認した。

本論文のシステムでは C++ 言語により区間オブジェクトとその演算を定義している。その結果、変数の型を区間と指定すればあたかも実数演算であるかのように計算が実行される。また数式処理によって導関数の導出を自動化し、それから区間導関数のプログラムを生成している。

谷口ら [15] のように交差や分岐やループの判定のために終結式等の処理を用いると、この処理の負担のため低次の多項式にしか適用できない。本方法はそのような処理が不要であるばかりでなく、曲線が代数方程式で表される必要さえなく、曲線の記述に依存しない一律な計算が可能である。そしてこれを縁と輪郭による曲面の表示は縁に応用した。次報 [6] では同様の手法を空間曲線に適用した例を報告する。

参考文献

[1] G. Farin, *Curves and Surfaces or Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide*, Second Edition, Academic Press, San Diego, CA, U.S.A., 1990; 木村文彦 (監), 山口泰 (監訳), 「CAGD のための曲線・曲面理論」, 共立出版, 東京, 1991; Third Edition, Academic Press, San Diego, CA, U.S.A. 1993.

[2] M. Hosaka, *Modeling of Curves and Surfaces in CAD/CAM*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1992; 東正毅, 斉藤剛, 久志本琢也 (訳), 「CAD/CAM における曲線曲面のモデリング」, 東京電機大学出版局, 東京, 1996.

[3] 神沢雄智, 大石進一, 精度保証付き数値計算法を用いた非線形方程式の解曲線の存在検証法, 電子情報通信学会論文誌 A, Vol. J80-A, No. 6 (1997), pp. 907–919.

[4] 神沢雄智, 柏木雅英, 大石進一, パラメータ依存非線形方程式のすべての解を精度保証付きで求めるアルゴリズム, 電子情報通信学会論文誌 A, Vol. J80-A, No. 6 (1997), pp. 920–925.

[5] 金谷健一, 「形状CADと図形の数学」, 共立出版, 東京, 1998.

[6] 金澤芳之, 金谷健一, 直観的に正しい空間曲線と曲面の表示, 電子情報通信学会研究報告 AI/KBSE98, 1999-3.

[7] J. J. Koenderink, *Solid Shape*, MIT Press, Cambridge, MA, 1990.

[8] D. Marr, *Vision: A Computational Investigation into the Human Representation and Processing of Visual Information*, W. H. Freeman, San Fransico, CA, 1982; 乾敏郎, 安藤広志 (訳), 「ビジョン — 視覚の計算論と脳内表現 —」, 産業図書, 東京, 1987.

[9] R. E. Moore, *Methods and Applications of Interval Analysis*, SIAM, Philadelphia, 1979.

[10] 森本経宇, 山口和紀, 再帰的空間分割法と部分空間分類 — 微小空間の曲線の近似への拡張 —, 電子情報通信学会論文誌 D-II, Vol. J80-D-II, No. 2 (1997), pp. 569–578.

[11] 西尾孝治, 小堀研一, 久津輪敏郎, 拡張型オクトリーを用いた空間分割モデラから境界表現への変換, 情報処理学会論文誌, Vol. 38, No. 8 (1997), pp. 1554–1565.

[12] 大石進一, 非線形減少の解析的手法 [I]— 非線形現象の精度保証付き数値解析, 電子情報通信学会誌, Vol. 79, No. 2 (1996), pp. 162–168.

[13] 佐々木建昭, 元吉文男, 渡辺隼郎, 「数式処理システム」, 昭晃堂, 東京, 1986.

[14] 杉原厚吉, 「グラフィクスの数理」, 共立出版, 東京, 1995.

[15] 谷口行信, 杉原厚吉, 検出もれのない代数曲線の追跡法, 情報処理学会論文誌, Vol. 33, No. 10 (1992), pp. 1245–1253.

[16] 山村清隆, 非線形現象の解析手法 [V]— 非線形方程式の数値解法 —, 電子情報通信学会誌, Vol. 79, No. 7 (1996), pp. 740–745.

[17] 山村清隆, 徳江愛, 川田仁美, 区間解析を用いた非線形抵抗回路のすべての解を求めるアルゴリズム, 電子情報通信学会論文集 A, Vol. J79-A, No. 10 (1996), pp. 1692–1699.

[18] 山村清隆, 牛田明夫, 堀内和夫, Kevorkian 分割法を用いた区間解析の効率化について, 電子情報通信学会論文集 A, Vol. J74-A, No. 8 (1991), pp. 1142–1150.