ヒューマンインタフェース　101－5
（２００２．１１．２３）

置換パズルのメディア変換とパズル・ジェネレータの試作

前田篤彦[1]・杉山公造[1]・間瀬健二[2]

玩具が持つ豊かな世界をインタフェースに応用するための系統的なアプローチの一環として、ルービック・キューブ、メガリンクス、ピラミンクスなどの"置換パズル"を一般的に表す抽象モデルを作成し、CG を利用した新しい表現メディア(ラバー・バンド表現など)への変換方式を考案し、置換パズルのジェネレータを試作した。このジェネレータにより置換パズルの多くのバリエーションを生成することを通して、メディア変換の得失についての知見をまとめた。

Media Conversion of Permutation Puzzles and Development of Permutation Puzzle Generators

Atsuhiko Maeda[1], Kozo Sugiyama[1], Kenji Mase[2]

As a systematic approach to utilize toy worlds for human interfaces, “permutation puzzles” such as Rubik’s cube, Megalinx, and Pyraminx are expressed as an abstract model. Then, new media called rubber bands is devised for converting the puzzles on the media and a permutation puzzle generator is developed. Merits and demerits in introducing the new medial obtained through generating variations of the puzzles are summarized.

1. はじめに

最近、玩具を用いた遊び行為に対するモチベーションの高さや玩具の見た目の楽しさなどを利用するために、Toy インタフェースをそなえた学習教材や、低年齢ユーザの日常生活をサポートするシステムに関する研究が行われている[1,2.3.4]。このようなアプローチは、将来、例えば玩具的な性質が付加された学習教材などの新しいインタフェース分野を切り開く可能性が高いと考えられる。しかし現在では、ぬいぐるみの見た目の応用[3、4]や、積み木のような比較的簡単な玩具の構造の応用[2,5]に留まっており、本来玩具が持つ豊かな世界を応用するには至っていない。遊び行為に利用されている複雑で多様な玩具の性質を応用するには、より基礎的かつ系統的なアプローチが必要であると考えられる。

本稿では、数ある玩具の中から操作パズルを取り上げ、基礎的かつ系統的なアプローチを試みる。操作パズルを取り上げたのは、手に取って遊べる玩具として広く流布しており、様々な種類のものが存在することの他に、数理的な概念と相性がよく一般性があり、応用範囲が広いなどの特徴があるからである。ある実体を伴った操作パズルの構造を数理的なモデルで記述できると、その実現形態でしか成立しないものと思われていたものが、実はその本質を具現化した一表現形式でしかないことを再認識できる。抽象的なモデルを介して、今まで思いもかけなかった表現メディアに変換でき、新生面が切り開かれる可能性があり、また、そのモデルのパラメータの値を変えることにより、様々なバリエーションをつくることができる(図1参照)。

本研究では、"置換パズル"に関し、その抽象的表現を介して他の表現メディアに変換するという試みを行なうが、具体的な手順は次の通りである。

(1) 既存の操作パズルを分析し、それらをまとめて表現できるような数理モデルを考案する。モデルにおいては操作パズルの数理的構造とパラメータが重要である。
(2) 数理的構造を保存したまま、表現メディアを変換したり、パラメータの値を変えたりして、パズルの具現化を行い、既存パズルにない新しい効果の発現やパズルのバリエーションを求める仕組みを考察する。通常、パラメータを変えようとすると、既存の操作パズルが用いる表現メディアでは物理的な制約があり困難で

1北陸先端科学技術大学院大学, JAIST, {a_maeda, sugi}@jaist.ac.jp
2 名古屋大学, Univ. of Nagoya, mase@itc.nagoya-u.ac.jp

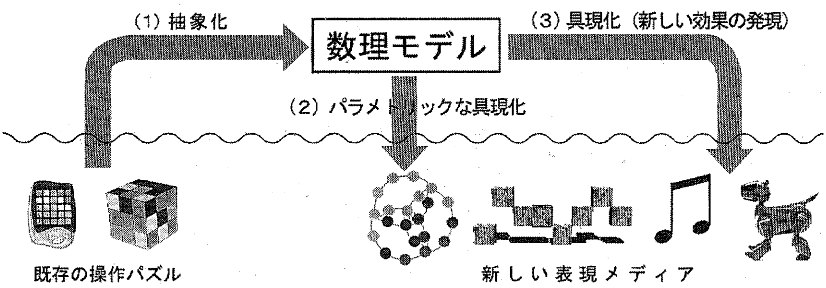


図1. 本稿でのアプローチ

(3) あることが多い。従って、パラメータの値に対して柔軟に対応できる表現メディアを新たに考案する必要があるが、パズルの具現化に対して次の二つを区別することが重要である。
   (a) **パラメトリックな具現化**：パズルの難易度の調整や変化を容易に達成することを目的としたメディア変換を行う。
   (b) **創造的な具現化**：元のメディアを離れ、意外性の高い、あるいは新たな特色が発現すると予想されるメディアへの変換を行う。創造性教育や音感教育などへの新しい効果の発現などを見出すことを目的とする。

(4) 新しいメディアでのパラメトリックなパズル・ジェネレータを開発する。そのために必要とされるパズルの定義機能、変更機能、表示機能、初期状態設定機能、操作機能、保存機能などを実現する。

以下において、2節と3節では、置換パズルを分析し、抽象モデルを作成し、新しいCGを用いた表現メディアの有効性や利点を検証し、パズル・ジェネレータの試作について述べる。4節ではまとめを行う。

2. 置換パズル

有名なパズルであるルービック・キューブ(RC) には、メガミンクス(MM)やピラミンクス(PM)などの類似なパズルがある（図2参照）。さらに2×2のRCも市販されている。これらのパズルは、形状、要素数、基本操作数などが異なるが、基本的に同様なアイデアで作られた操作パズルである。これらは全て、物理的に具現化され機械的なメカニズムを有している。このようなパズルをここでは置換パズルと呼ぶ。

置換パズルに関する既存研究として、Singmaster [7, 8]は、群論を用いてRCの数理モデルを考案している。RC上で操作される54個の要素を集合Xとし、プレイヤーが可能な操作の集合については、集合Xを全単射する群、すなわち置換群として捉えた。Turner ら[9]は、Singmaster によるRC（正六面体）のパラメータだけを変更したPM（正四面体）やMM（正十二面体）などの解法について述べている。これらの研究は主にパズルの解法に主眼を置いたものであるが、本稿では、メディア変換のための数理的構造やパラメータの明確化に主眼をおいている。

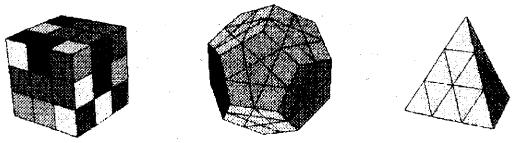


図2. ルービック・キューブ(左)、メガミンクス(中)、ピラミンクス(右)

2×2のルービック・キューブの分析

議論を簡単にするために、2×2のRCを取り上げ、その仕組みを考える。そのために図3に示したように、RCをx軸、y軸、z軸からなる直交空間に置き、各ブロックの面（以後、面要素と呼ぶ）に図のように1から24の番号をふる。許される操作は、x軸、y軸、z軸のそれぞれプラス側とマイナス側にある4つのブロックを時計回りあるいは反時計回りに90度の倍数だけ回転させることである。これらをどのような順序でも何度でも繰り返すことができる。ゴールは、正6面体の各面を同一の色にすることである（あるいは、各面が同一の色の状態から任意に操作を行った状態を初期状態とし、元の状態に戻すことである）。

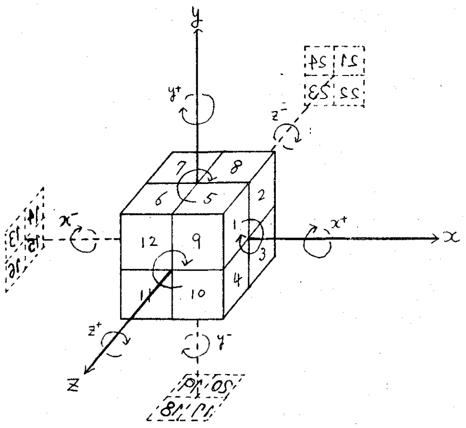


図3. 2×2のルービック・キューブと番号付け

各軸の周りに二つの操作が考えられるが、結局これらは相対的なものであり、各軸のプラス側（あるいはマイナス側）の3つの操作だけを考えれば十分である。3つの操作の選び方は8通りあるが、以下では、全て各軸のプラス側の操作を選択する。このように選択した場合、15、19、23の面要素をもつ1つのブロックは、操作に対して不動のブロックとなる。ただし、ここで**操作の冗長性**ということに関して注意すべきである。15、19、23の面要素をもつブロックを何らかの方法で固定して、3つの操作だけしか行えないようにすることは可能であるが、RCはもともと6つの操作が出来るように設計されていると考えられる。すなわち、操作の冗長性をどのようにパズルに導入し、パズルを複雑に見せるかは、パズルの重要な構成要素の一つであるとも考えることができる。冗長性を除去したものをパズルの本質としてモデル化すべきか、あるいは冗長性もパズルの一部であるとしてモデル化すべきか、モデル化に際して二つの道がある。ここでは、まず簡単化のために冗長性を除去したモデルとして考える。

また、ユーザーには、図3に示したように面要素を識別できる情報（異なる数字）が与えられているわけではなく、6色による塗り分け情報（各色4つの面要素）だけが与えられていることである。このようなユーザーへの**識別情報の与え方**は、パズルの重要な構成要素の一つである。

いま、x軸のプラス側にある4つのブロックを時計回りに90度回転する操作を考え、これをx^+で表す。すると基本操作x^+は、次のような3つの長さ4の巡回子の積として表される。

$$x^+ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 21 & 20 & 10 \\ 10 & 5 & 21 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 22 & 17 & 9 \\ 9 & 8 & 22 & 17 \end{pmatrix}$$

同様にして、y^+、z^+も巡回子により表現できる。ここで、$\{x^+\}=\{e、x^+、(x^+)^2、(x^+)^3\}$は位数4の巡回群となっている。$e$は恒等置換である。同様に、$\{y^+\}$、$\{z^+\}$も位数4の巡回群である。上式において、巡回子は置換の第一行だけを書けば十分なので、3つの基本操作を次のように書くことができる。これを4×4×4表現と呼ぶ。

$$x^+ = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 21\ 20\ 10)(8\ 22\ 17\ 9)$$

$$y^+ = (5\ 6\ 7\ 8)(1\ 12\ 14\ 21)(2\ 9\ 13\ 24)$$

$$z^+ = (9\ 10\ 11\ 12)(1\ 17\ 16\ 6)(4\ 18\ 13\ 5)$$

さらに、各操作は、長さ8や12の巡回子を用いて記述することもできる。各式の第一行の表現を4×8×8表現、第二行を12×12×12表現と呼ぶ。

$$\begin{aligned} x^+ &= (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 8\ 21\ 22\ 20\ 17\ 10\ 9)^2 \\ &= (1\ 5\ 8\ 2\ 21\ 22\ 3\ 20\ 17\ 4\ 10\ 9)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^+ &= (5\ 6\ 7\ 8)(2\ 1\ 9\ 12\ 13\ 14\ 24\ 21)^2 \\ &= (2\ 1\ 5\ 9\ 12\ 6\ 13\ 14\ 7\ 24\ 21\ 8)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^+ &= (9\ 10\ 11\ 12)(1\ 4\ 17\ 18\ 16\ 13\ 6\ 5)^2 \\ &= (9\ 1\ 4\ 10\ 17\ 18\ 11\ 16\ 13\ 12\ 6\ 5)^3 \end{aligned}$$

上式を見ると複数の操作に同時に含まれる要素が多くあり、操作が互いに交叉する複雑な構造になっていることが分かる。要素毎の操作**重複度**を見てみると、要素1、5、9が重複度3、要素2、4、6、8、10、12、13、17、21が重複度2、要素3、7、11、14、16、18、20、22、24が重複度1、要素15、19、23が重複度0である。この重複度は次節におけるレイアウトを求める際の対称性に関する重要な情報になる。以上から、置換パズルの抽象モデルを次のように表すことができる。

<u>置換パズルの抽象モデル</u> (X, C, φ, R, s, t)

(1) 要素集合： $X=\{1,2,\ldots,n\}$
(2) 識別マッピング：$\varphi: X \to C=\{c_1, c_2, \ldots, c_p\}$、ここで$C$は識別子集合。
(3) 操作集合： $R=\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$

$$r_i = p_{i1}^{\,q_{i1}}\, p_{i2}^{\,q_{i2}} \ldots p_{ik_i}^{\,q_{ik_i}} \quad (i=1,2,\ldots,m)$$

ここで、p_{ij}は置換を表す巡回子、k_iは巡回子の数、q_{ij}は**多重度**である。

(4) 初期状態 s: 最終状態から任意に上記操作を何回か繰り返した状態を初期状態とする。
(5) 最終状態 t: ある特定の要素集合の要素全体からなる順列、例えば、$(1,2,\ldots,n)$。

ここまでは、2×2 の RC の抽象モデルを考察してきたが、3×3RC、MM、PM などにもこの考察の手順は適用でき、類似の抽象モデルを作ることができる。

3．柔軟な表現メディアへの変換とパズル・ジェネレータ

最初にも述べたように、RC に代表される置換パズルは、物理的、機械的に具現化されている。従って、それ自身が作品として完成されており、手に取って楽しめるという魅力がある反面、パズルの本質に沿ってそれを変形するという点では柔軟性に欠ける。例えば、前節の抽象モデルにおいて、要素の付加・削除、巡回子の付加・削除、巡回子の長さの変更、重複要素の変更、多重度の変更などができると、パズルの難易度を調節しながら、多くのバリエーションによりパズルをパラメトリックに楽しむことができる。例えば、3×3 の RC などは一般の人には難しすぎるという声をよく聞くが、パズルの本質を変えないでその人の持つ時間や能力にあったパズルを作り出すことができることが望ましい。

我々は、コンピュータ・グラフィックスにより、パラメトリックに柔軟な対応ができる置換パズルの表現メディア（ラバー・バンド表現と呼ぶ）を考案した。

ラバー・バンド表現

(1) 各置換 p_{ij} は、Bezier 曲線による伸び縮みするゴム輪として表される。同じ操作 r_i に属する輪はすべて同一色とする。
(2) 各置換に属する要素は、輪の上に載った①、②、…といった数字記号で表される。
(3) 最終状態は、各○印の左肩付近に表記されている小さな数字により表される。従って、パズルを解いた状態は、^{1}①、^{2}②、…というように全ての要素に関し、数字記号とその左肩に表記された小さな数字の番号が一致した状態である。
(4) 上記では、各要素には異なる識別子（数字）が割り振られているとして説明しているが、一般的には識別マッピングにより各要素は塗り分けられており、左肩の数字の代わりに解となるべき色がベースとして指定される（例えば、要素を納める色リングとして）。

ラバー・バンド表現に基づき、置換パズルのジェネレータを開発した。どのように組み替えても、パズルとして成立する性質を生かし、この表現メディアをつかって、ユーザが自由に置換パズルを作製し、解くことに挑戦できるソフトウェアである。その機能は次のようである。

置換パズル・ジェネレータ

(1) パズルの定義機能、変更機能
ダイアログ・ボックスを開き、置換パズルの抽象モデルに沿って、要素集合、識別マッピング、操作集合を簡単に定義できる。また修正も容易である。図 4(a)にダイアログ・ボックスによる定義例を示す。
(2) レイアウト機能
巡回子を表わす輪にはスプリング・モデルと呼ばれるグラフの自動レイアウト・アルゴリズム[10]を実装している。このアルゴリズムによって輪の上で隣り合う数字記号の間には、距離が開いても常に自然長に戻ろうとするスプリングの挙動を模倣した計算が行われている。図 4(b)にそのイメージを示す。しかし、これだけでは十分綺麗にレイアウトすることは不可能なことがあるので、ユーザ自身が、スプリング・モデルのパラメータを調整したり、マウス・ドラッグで好きなように輪を配置することができるようにもなっている。これらの機能を併用すると、輪ゴムの長さを変えたり、本当に引っ張っているような自然な印象をユーザに与える。
(3) 組み換え機能
図 4(c)に示すように、直接操作により表示されたパズルの要素を重ね合わせたり、分離して順次パズルを組み換えていくことができる機能を用意した。
(4) 初期状態設定機能
最終状態にランダムに操作を加えるシャッフル機能を実装し初期状態を与えることができる。
(5) 操作機能
各操作を実行するには、輪の上に載っている要素のどれか一つを、その輪の上で置換したい方向の隣接要素に、マウスでドラッグ＆ドロップすると、その輪の上の要素全体が時計回りか、あるいは反時計回りに多重度に対応するステップだけ進み、輪上の要素が置換される様子がアニメーション表示される。この場合、同一色の輪の内のどれかを回転させると他の輪も同時に回転する。
(6) 保存機能、呼び出し機能
作製したパズルを保存し、呼び出す機能を実装した。保存に際しては、名前付け、自分のパズルとしての評価も記録できるようにした。

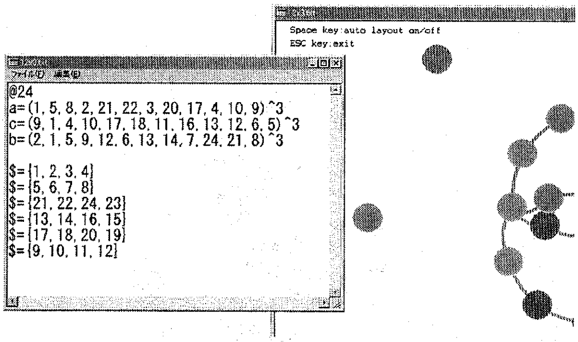
4．ジェネレータによるパズル生成例と得られた知見

図 5 に、2×2 の RC のラバー・バンド表現を示す。4

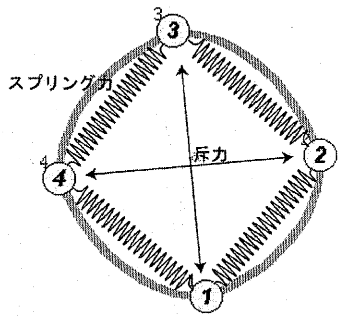
×4×4、4×8×8、12×12×12 の 3 通りが示されている。4×4×4 表現では、長さ 4 の 3 つのバンドが一操作で 1 ステップずつ動く。4×8×8 表現では、長さ 4 のバンドひとつと長さ 8 のバンドひとつが一操作でそれぞれ 1 ステップと 2 ステップずつ動く。12×12×12 表現では、長さ 12 のバンド一つが一操作で 3 ステップ動く。また、同様な考察と変換により求めた PM のラバーバンド表現を図6に示す。

実際の RC や PM とそれらのラバー・バンド表現との比較をまとめると次のようになる。

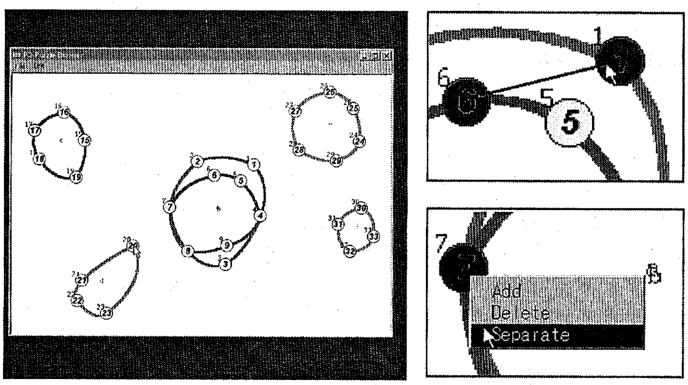
(1) RC や PM では 3 次元的な美しい対称性があったが、ラバー・バンドによる 2 次元表現でも全てきれいな対称性を持ち、表示させることができる。
(2) RC や PM では全体の様子を一覧できなかったが、ラバー・バンド表現では一覧性が達成されている。
(3) RC においては一つの表現であったものが、ラバー・表現では 4×4×4 表現、4×8×8 表現、12×12×12 表現などいくつものバリエーションをとることができる。難易度は 12×12×12 表現が一番低いように思われるが、これに関してはもう少し厳密な評価が必要である。



(a)パズル定義のダイアログボックス（順に要素数、バンド、カラーリングを定義）

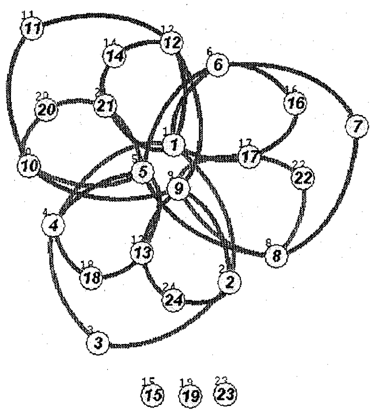


(b)スプリング・モデルのイメージ

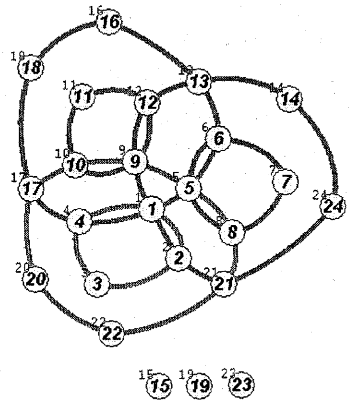


(c)パズルの組換え．二つの要素を重ねるところ（右上）、重なっている要素を分離するところ（右下）

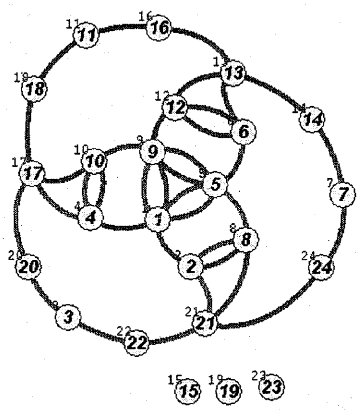
図 4．置換パズル・ジェネレータのインタフェース



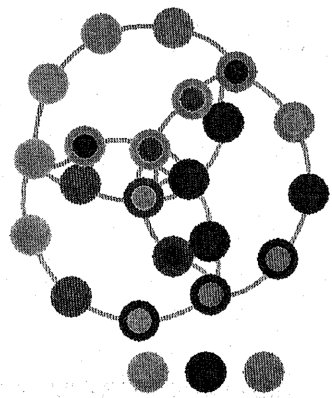
(a) 4×4×4 表現（数字ラベル）



(b) 4×8×8 表現（数字ラベル）



(c_1) 12×12×12 表現（数字ラベル）



(c_2) 12×12×12 表現（色ラベル）

図5. 2×2 の RC のラバー・バンド表現

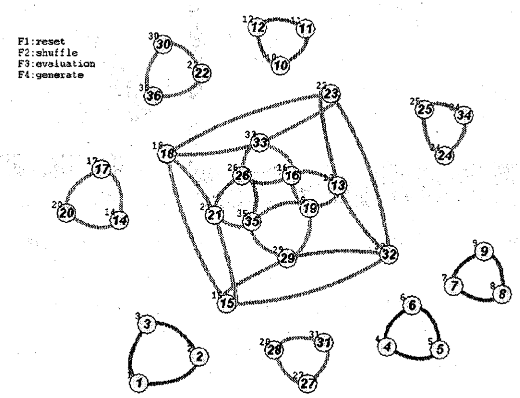


図6. PM のラバー・バンド表現

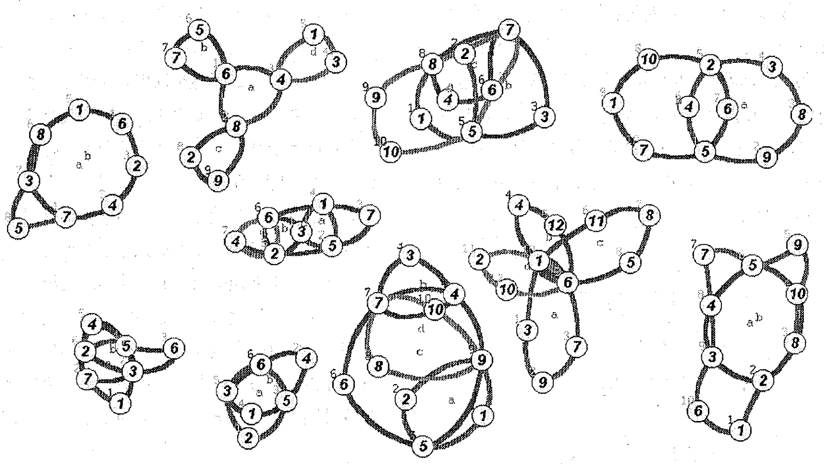


図7. 置換パズルのバリエーション

(4) RC の各面に同一色の要素がまとめられていたが、ラバー・バンドではそれらのまとまりが必ずしもよくない。同一色のベースは、{1, 2, 3, 4}、{5, 6, 7, 8}、{9, 10, 11, 12}、{13, 14, 15, 16}、{17, 18, 19, 20}、{21, 22, 23, 24} である。ラバー・バンドの場合は、RC における色マッピングを離れて、例えば同一バンド上のベースは同一色にするなどラバー・バンドに適したマッピングを行うのがよいと思われる。

(5) 図5は2×2のRCに対応するラバー・バンドであり、それほど複雑ではない。しかし、3×3 になるとかなり複雑となり、ラバー・バンドの利点が発揮されにくくなる。ラバー・バンド表現は比較的小規模のパズルにおいて多くのバリエーションをつくるのに適した方法である。

(6) PM のラバー・バンド表現では、長さ3の8つのバンドが分離しており、PM においては物理的に結合されていたものが、実は論理的には分離されていることがよく分かり、パズルの本質をよく表していると考えられる。

図7に、RC や PM を離れ、我々が作製した置換群パズルのバリエーションの一部を示す。図中では、我々の経験からパズルとして難易度が高いと思えたものほど右側にくるように並べた。

このソフトウェアを使ってモデルを様々なパラメータの値で具現化し、解くことを試みた結果、次のような経験的知見を得た。

(1) 全体の要素数が極端に少なく取り得る状態が少ない場合を除いて、トリビアルでないパズルが生成される。

(2) RC では、置換される要素の数は54個だが、それよりかなり少ない 10 個程度でも、大抵の人は解けずに諦めてしまうような難易度の高い操作パズルが何通りも生成できる。

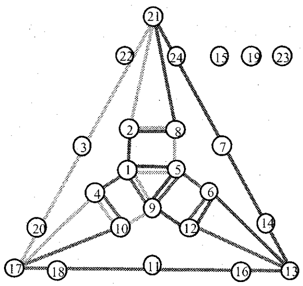
(3) 実際に挑戦してみるまで、作製したパズルがどの程度の難易度を持っているのか予想することは困難である。置換される要素の数や輪の数、さらには輪の重なり具合を増やしつづけたり、減らしつづけたりしても、難易度が段階的に変化するということはないように思われる。従って、ユーザが使う場合、前もって想定した難易度の操作パズルを作ろうとするのではなく、「このように組み立てると、 どの程度の難易度のパズルになるだろう？」といった、探索的な使い方になることが予想される。

(4) ラバー・バンド表現ではコンピュータ・グラフィックスを使っているが、実世界では不可能な四次元化などをおこなっているわけではないため、パッチシンセのようにケーブルや液晶等を利用した**実体化**も可能である。面白いパズルが作製できたら物理的な具現化を行うは有効であろう。

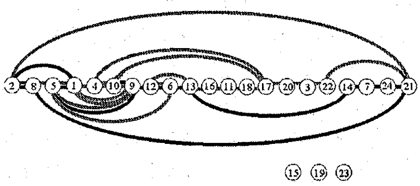
5. レイアウトのバリエーション

前節までのラバー・バンドのレイアウトには、スプリング・アルゴリズムを用いた。しかし置換パズルのラバー・バンド表現を無向グラフと捉えるとき、様々なグラフ描画アルゴリズムを用いることができる[10, 11, 12]。例えば、図5(c_1)のような平面グラフであれば、直線描画（図 8(a)）が可能であり、特に3-連結平面グラフは凸描画可能であるこ

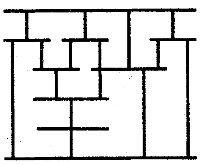
とが証明され、アルゴリズムが開発されている。また、平面グラフは,L-mapping（図8(b)）や可視性表現（図8(c)）が可能であり、線形アルゴリズムが与えられている。その他、直交格子描画（図8(d)）もある。スプリング・アルゴリズムはフレキシブルで使いやすいものであるが、その他のアルゴリズムを用いることにより、より豊かにパズルを表現することが可能になる。



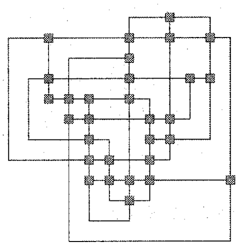
(a)図5(c_1)を直線描画したもの



(b)図5(c_1)をL-mappingしたもの



(c)可視性表現の例



(d)直交格子描画の例

図8 レイアウト法のバリエーション

6. まとめ

本稿では、置換パズルの抽象モデルを求め、ラバー・バンド表現へのメディア変換の方式を考案し、置換パズル・ジェネレータを試作した。このジェネレータによりRCやMMなどの本質的構造を保持しながら、解くのがやさしいものから難しいものまで連続的に置換パズルを生成することが可能となり、ユーザはその力量に応じてパズルを楽しむことが可能となった。多くのパズルのバリエーションを生成し解くことを通して、ラバー・バンド表現へのメディア変換の得失についての知見をまとめて示した。本稿で扱ったメディア変換は第一節で述べた具現化のうち、パラメトリックな具現化に近いものであるが、12×12×12表現の発現、一覧性の発現など創造的な具現化の側面も持っている。今後、明らかになった抽象モデルをロボットなどのより意外性のあるメディアへ変換することを試みていきたい。

参考文献

[1] 間瀬健二: Toyインタフェース、ヒューマンインタフェース学会誌、Vol. 3, No.1 (2001).

[2] 蓼沼眞・田中昭二・中尾恵子: Cypher-ブロックで構築した仮想世界と実写との融合システム、画像電子学会第6回VMA研究会(2001).

[3] Strommen, E.: When the interface is a talking dinosaur: Learning Across Media with Actimates Barney, CHI'98 (1998).

[4] 間瀬健・Clarkson, B.・米澤朋子: 幼児期からのウェアラブルとtoy型インタフェース、情報処理学会研究報告HI92-1 (2000).

[5] 伊藤雄一・北村喜文・岸野文郎: ActiveCube:ブロック組み立てによるリアルタイム3次元形状モデリングとインタラクション、画像電子学会第6回VMA研究会(2001).

[6] 前田篤彦・杉山公造・間瀬健二: 巡回パズルのメディア変換とパズル・ジェネレータの試作、情報処理学会第101回ヒューマンインタフェース研究発表会、(2002).

[7] Singmaster, D.: Notes on Rubik's Magic Cube (1978).

[8] Alexander, H., Frey, J. and Singmaster, D.: Handbook of Cubik Math, Enslow Publishers (1982).

[9] Turner, E. C. and Gold, K. F.: Rubik's Groups, American Mathematical Monthly, Vol.92, No.9 (1982).

[10] Eades, P.: A heuristics for graph drawing, Congress Numerantium, Vol.42, No.9 (1984).

[11] 杉山公造: グラフ自動描画法とその応用、計測自動制御学会学術図書、コロナ社 (1993).

[12] Sugiyama, K.: Graph drawing and applications for software and knowledge engineers, World Scientific (2002).

[13] Kaufmann, M. and Wagner, D. (Eds.): Drawing graphs – Methods and models, Springer, LNCS 2025 (2001).