

## スロットを用いた有限バッファループ ネットの packets 棄却率の上下限の解析

照屋 健  
(琉球大学)

白鳥 則郎  
(東北大学 電気通信研究所)

野口 正一

1. はじめに 近年、オフィスオートメーション等が進展するにつれて、ローカルネットの研究が盛んである。ローカルネットは大別してバス形とリング形に分けられ、リング形の中ではトークン・リング方式とスロット方式とに別けられる。両方式はそれぞれ長所と短所があり、それぞれに特徴があって優劣はつけがたい。筆者らは、これまでスロットを用いたループネットにおける問題を取り上げてきた。[1][2] スロットを用いたループネットではノード間の相互依存性もあり、スロット方式の本質的な問題である。からみ合いがシステムパフォーマンスに与える影響を究明し、設計問題との関連、わけてもバッファサイズの決定、棄却率の決定等を研究することは大切なことである。本稿では、バッファサイズが有限の場合の packets の棄却率の上限と下限について解析した。

2. ループネットのモデル ループネットのモデルにおいて、packets は一方向（時計方向）に伝送されるものとする。ノード  $i$  からノード  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, N-1$ ) へ送られる packets の生起率を  $d_{ij}$  とし、この生起率を宛先分配率と呼ぶ。ここで  $\sum d_{ij} = 1$  ( $i \neq j$ )、 $N$  はループに連結されているノードの数を表す。解析において考慮された条件は次の通りである。

(a) packets は固定長の単一構成とする。(b) packets は各ノードのバッファレジスタへ到着率  $\lambda$  [packet/sec] のポアソン分布に従って到着する。バッファサイズは有限で  $m$  とし、バッファ内に収容されないであふれた packets は棄却される。(c) packets は図1のように上流から下流へ単一方向（時計方向）にのみ伝送される。(d) 発生地ノードで生じた packets は誤りなく目的地ノードにおいて確実に受信される。(e) packets の宛先は宛先分配率に従って決定される。本稿では packets の宛先分配率  $d_{ij}$  はノードに関係なく、すべて等しい分布をとる対称の場合を考え、これらの宛先分配率を  $d_1, d_2, \dots, d_{N-1}$  とする。宛先分配率の添字の小さい順に特定のノードから他の最も隣接する下流のノードから始まって順に他のノードへ宛てられることを表す。

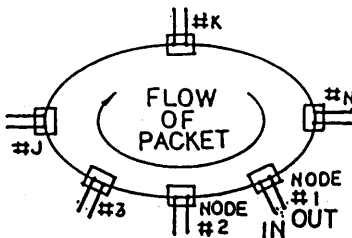


図1 ループネット

3. 棄却率の解析 状態方程式を構成する際に二つの異なる時点  $a$ 、 $b$  において解析を行なう。第1の方法では、スロットがステーションに到着する直前の時点  $a$  に着目して考え、第2の方法では、スロットがステーションに到着した直後の時点  $b$  に着目して考える。この場合、前者は棄却率の上限値を与え、後者は棄却率の下限値を与える。第1の方法による状態方程式の導出を考える。今考えている時点  $a$  で、バッファ中に  $i$  個の packets の存在する定常確率を  $P_i$  とする。 $i$  個の packets がバッファ中に存在し、 $T$  [sec] 後の、次の時点  $a$  で packets の数が  $j$  個となる確率を  $S_{ij}$  とすれば、状態遷移の図より、状態  $i$  以外の他の状態へ出る確率を  $P_i(\text{out})$ 、状態  $i$  へ入る確率を  $P_i(\text{in})$  とすれば、次の関係式が成立する。状態  $i$  はバッファ中に  $i$  個の

パケットが存在する状態を意味する。

$$P_i(\text{out}) = S_{i,i-1} + S_{i,i+1} + S_{i,i+2} + \dots + S_{i,j} + \dots + S_{i,m} \quad (1)$$

$$P_i(\text{in}) = S_{i,i+1} + S_{0,i} + S_{1,i} + \dots + S_{i,j} + \dots + S_{i-1,i} \quad (2)$$

定常状態では、状態  $i$  への入力と状態  $i$  からの出力は等しいので、これらの両式を等号で結びそれらを整理すると方程式が導びかれる。この導出方法を第2の方法にも適用して、上限値の場合と下限値の場合の式が次のように得られる。

上限値式の場合、

$m=1$  のとき

$$P_1 = (1 - k_0) P_0 / (k_0 v) \quad (3)$$

$m \geq 2$  のとき

$$P_1 = (1 - k_0) P_0 / (k_0 v) \quad (i=0) \quad (4)$$

$$P_{i+1} = [P_i (1 - k_0 + (k_0 - k_1) v) - P_0 k_i - \sum_{j=1}^{i-1} P_j (k_{i-j+1} v + k_{i-j} (1 - v))] / (k_0 v) \quad (1 \leq i \leq m-1) \quad (5)$$

$$P_m = [P_0 (1 - \sum_{j=0}^{m-1} k_j) + P_1 (1 - k_{m-1} v - \sum_{j=0}^{m-2} k_j) + \dots + P_{i-1} (1 - k_{m-i} v - \sum_{j=0}^{m-i-1} k_j) + \dots + P_{m-2} (1 - k_2 v - k_0 - k_1) + P_{m-1} (1 - k_1 v - k_0)] / (k_0 v) \quad (i=m) \quad (6)$$

下限値式の場合、

$m=1$  のとき

$$P_1 = (1 - k_0) (1 - v) P_0 / v \quad (7)$$

$m \geq 2$  のとき

$$P_1 = P_0 ((1 - k_0) (1 - v) + \sum_{j=2}^m k_j v) / (k_0 v) \quad (i=0) \quad (8)$$

$$P_{i+1} = [(k_0 v + (1 - k_0) (1 - v) + \sum_{j=2}^{m-i} k_j v) P_i - \sum_{j=0}^{i-1} P_j (k_{i-j+1} v + k_{i-j} (1 - v))] / (k_0 v) \quad (1 \leq i \leq m-2) \quad (9)$$

$$P_m = [P_{m-1} (k_0 v + (1 - k_0) (1 - v)) - \sum_{j=0}^{m-2} P_j (k_{m-j} v + k_{m-j-1} (1 - v))] / v \quad (i=m-1) \quad (10)$$

ここで、 $k_j$  は単位時間  $T$  [sec] 中に  $j$  個のパケットが到着する確率を表わし、 $v$  はステーションにきたスロットが空で使用可能である割合を表わす。 $\gamma$  を棄却のない場合 (バッファサイズが無限大の場合) の単一方向伝送における伝送路のトラフィック密度とすると、そのときのトラフィック密度は次式として導かれている。[4]

$$\gamma = \lambda \sum_{k=1}^{N-2} k d (k+1) \quad N \geq 3 \quad (11)$$

ここで  $d(k+1)$  は宛先分配率の一般形である。 $\gamma$  を棄却がある場合の単一方向伝送における伝送路のトラヒック密度とし、 $\lambda$  を到着率  $\lambda$  で到着して、そのうち棄却されずにバッファ内に入ったパケットの到着率、 $C_p$  を伝送路の回線容量とすると、次の関係式が導かれる。

$$\begin{aligned} v &= 1 - \gamma / C_p = 1 - \lambda \sum_{k=1}^{N-2} k d(k+1) / C_p \\ &= 1 - \lambda (1 - P_m) \sum_{k=1}^{N-2} k d(k+1) / C_p \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 $c_2 = \lambda \sum_{k=1}^{N-2} k d(k+1) / C_p$ 、 $c_1 = 1 - \lambda \sum_{k=1}^{N-2} k d(k+1) / C_p$  とおくと

$$v = c_1 + c_2 P_m \quad (13)$$

これらの式と正規化条件  $\sum_{i=0}^m P_i = 1$  を用いて  $v$  と  $P_0$  を消去すると次のような  $m$  元 2 次非線形連立方程式が得られる。

上限値式、 $m=1$  のとき

$$k_0 c_2 P_1^2 + (1 - k_0 + k_0 c_1) P_1 - (1 - k_0) = 0 \quad (14)$$

$m \geq 2$  のとき

$$\sum_{j=1}^m U_{i,j} P_j + \sum_{k=1}^1 U_{i,m+k} P_k P_m + U_{i,m+1} = 0 \quad (1 \leq i \leq m) \quad (15)$$

下限値式、 $m=1$  のとき

$$\begin{aligned} k_0 c_2 P_1^2 - (1 + c_2 + k_0 (c_1 - c_2 - 1)) P_1 \\ - (1 - k_0) (1 - c_1) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$m \geq 2$  のとき

$$\sum_{j=1}^m L_{i,j} P_j + \sum_{j=1}^m L_{i,m+j} P_j P_m + L_{i,2m+1} = 0 \quad (1 \leq i \leq m) \quad (17)$$

ここで、 $U_{i,j}$ 、 $L_{i,j}$  は方程式の係数で次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} U_{1,1} &= 1 - k_0 + k_0 c_1 \\ U_{1,j} &= 1 - k_0 \quad (2 \leq j \leq m) \\ U_{1,m+1} &= k_0 c_2 \\ U_{1,m+2} &= -1 + k_0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} U_{i,j} &= k_{i-1} - k_{i-j-1} + (k_{i-j-1} - k_{i-j}) C_1 \quad (1 \leq j \leq i-2) \\ U_{i,i-1} &= k_{i-1} + 1 - k_0 + (k_0 - k_1) C_1 \\ U_{i,i} &= k_{i-1} - k_0 C_1 \\ U_{i,i+1} &= U_{i,i+2} = \dots = U_{i,m} = k_{i-1} \\ U_{i,m+j} &= (k_{i-j-1} - k_{i-j}) C_2 \quad (1 \leq j \leq i) \\ U_{i,m+i+1} &= -k_{i-1} \end{aligned} \right\} \quad (2 \leq i \leq m-1) \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned}
 U_{m,j} &= \begin{cases} k_{m-1} - k_{m-j-1} + (k_{m-j-1} - k_{m-j}) C_1 & (1 \leq j \leq m-2) \\
 k_{m-1} + (k_0 - k_1) C_1 + (1 - k_0) & (j = m-1) \\
 k_{m-1} - k_0 C_1 & (j = m) \end{cases} \\
 U_{m,m+j} &= (k_{m-j-1} - k_{m-j}) C_2 \quad (1 \leq j \leq m) \\
 U_{m,2m+1} &= -k_{m-1}
 \end{aligned} \right\} (20)$$

$$\left. \begin{aligned}
 L_{1,1} &= (1 - 2k_0 - \sum_{i=2}^m k_i) C_1 - 1 + k_0 \\
 L_{1,2} = L_{1,3} = \dots = L_{1,m-1} &= (1 - k_0 - \sum_{i=2}^m k_i) C_1 - 1 + k_0 \quad (m \geq 3) \\
 L_{1,m} &= (1 - k_0 - \sum_{i=2}^m k_i) C_1 - (1 - k_0 - \sum_{i=2}^m k_i) C_2 - 1 + k_0 \\
 L_{1,m+1} &= (1 - 2k_0 - \sum_{i=2}^m k_i) C_2 \\
 L_{1,m+2} = L_{1,m+3} = \dots = L_{1,2m} &= (1 - k_0 - \sum_{i=2}^m k_i) C_2 \\
 L_{1,2m+1} &= -(1 - k_0 - \sum_{i=2}^m k_i) C_1 + 1 - k_0
 \end{aligned} \right\} (21)$$

$$\left. \begin{aligned}
 L_{i,j} &= k_{i-1} - k_{i-j-1} - (k_{i-1} - k_i + k_{i-j-1} - k_{i-j}) C_1 \quad (1 \leq j \leq i-2) \\
 L_{i,i-1} &= k_{i-1} - (k_{i-1} - k_i) C_1 + 1 - k_0 \\
 &\quad + (-1 + 2k_0 + \sum_{i=2}^{m-1} k_i) C_1 \\
 L_{i,i} &= k_{i-1} - (k_{i-1} - k_i + k_0) C_1 \\
 L_{i,i+j} &= k_{i-1} - (k_{i-1} - k_i) C_1 \quad (1 \leq j \leq m-i-1) \\
 L_{i,m} &= k_{i-1} - (k_{i-1} - k_i) C_1 + (k_{i-1} - k_i) C_2 \quad (2 \leq i \leq m-1) \\
 L_{i,m+j} &= (k_{i-j-1} - k_{i-j} - k_{i-1} + k_i) C_2 \quad (1 \leq j \leq i-2) \\
 L_{i,m+i-1} &= (-1 + 2k_0 + \sum_{i=2}^{m-1} k_i - k_{i-1} + k_i) C_2 \\
 L_{i,m+i} &= -(k_{i-1} - k_i + k_0) C_2 \\
 L_{i,m+i+j} &= -(k_{i-1} - k_i) C_2 \quad (1 \leq j \leq m-i) \\
 L_{i,2m+1} &= -k_{i-1} + (k_{i-1} - k_i) C_1
 \end{aligned} \right\} (22)$$

$$\left. \begin{aligned}
 L_{m,j} &= k_{m-1} + (-k_{m-1} + k_m + k_{m-j-1} - k_{m-j}) C_1 - k_{m-j-1} & (1 \leq j \leq m-2) \\
 L_{m,m-1} &= k_{m-1} + 1 - k_0 + (-1 + 2k_0 - k_{m-1} + k_m) C_1 \\
 L_{m,m} &= k_{m-1} + (-1 - k_{m-1} + k_m) C_1 + (k_{m-1} - k_m) C_2 \\
 L_{m,m+j} &= (-k_{m-1} + k_m + k_{m-j-1} - k_{m-j}) C_2 & (1 \leq j \leq m-2) \\
 L_{m,2m-1} &= (-1 + 2k_0 - k_{m-1} + k_m) C_2 \\
 L_{m,2m} &= (-1 - k_{m-1} + k_m) C_2 \\
 L_{m,2m+1} &= -k_{m-1} + (k_{m-1} - k_m) C_1
 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

4. 宛先分配率とトラヒック密度 宛先分配率については三つのケースについて解析した。これらのケースについてトラヒック密度  $\gamma$  は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 (\text{case 1}) \quad d_1 / d_2 = d_2 / d_3 = \dots = d_{N-2} / d_{N-1} = 2 \quad \text{のとき} \\
 \gamma = \lambda (2^{N-1} - N) / (2^{N-1} - 1) \quad (24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{case 2}) \quad d_1 = d_2 = d_3 = \dots = d_{N-2} = d_{N-1} \quad \text{のとき} \\
 \gamma = \lambda (N / 2 - 1) \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{case 3}) \quad d_1 / d_2 = d_2 / d_3 = \dots = d_{N-2} / d_{N-1} = 1 / 2 \quad \text{のとき} \\
 \gamma = \lambda (2^{N-1} (N - 3) + 2) / (2^{N-1} - 1) \quad (26)
 \end{aligned}$$

ケース1は特定のノードからその最も隣接する下流のノードへより多く配分する場合、ケース2はすべてのノードに均等に配分する場合、ケース3は特定のノードから最も隣接する下流のノードへより少く配分する場合である。ケース1、2、3を宛先配分の方法としてそれぞれ type A、type H、type S と呼ぶ。

5. 数値解析と棄却率  $m = 1$  の場合は、 $P_1$  を変数とする二次方程式であるので、容易に解くことができる。 $m \geq 2$  の場合はこの方程式の完全解は得られないので電子計算機の数値解析を用いてその近似根を得た。得られた  $P_m$  が棄却率である。グラフにおいて、縦軸は棄却率、横軸は入力の負荷率（あるいはノード数かまたはバッファサイズ）を表わし、 $m$  はバッファサイズ、 $N$  はノードの数を表わす。upper の記号は棄却率の上限値を意味し、lower の記号は棄却率の下限値を意味する。また、H は宛先分配率の種類 (type) を表わす。図2 (a) はノードの数が4で宛先分配率がHの上限値を示し、図2 (b) はノードの数が8で宛先分配率がおなじくHの上限値の場合を示す。図2によればノードが2倍に増加すれば棄却率は負荷率が0.3以上のトラヒックでは高い値を示して、バッファサイズ増減による効果はあまり期待出来ないが、0.3以下の低いトラヒックではバッファサイズ増減の効果は大きい。図4によれば、ノード数が3の場合は負荷率が低ければ低いほどバッファサイズ増減の効果は大きい。一般的に負荷率の低いところではバッファサイズ増減の効果は大きい、負荷率が0.3を超えるトラヒックではノード数

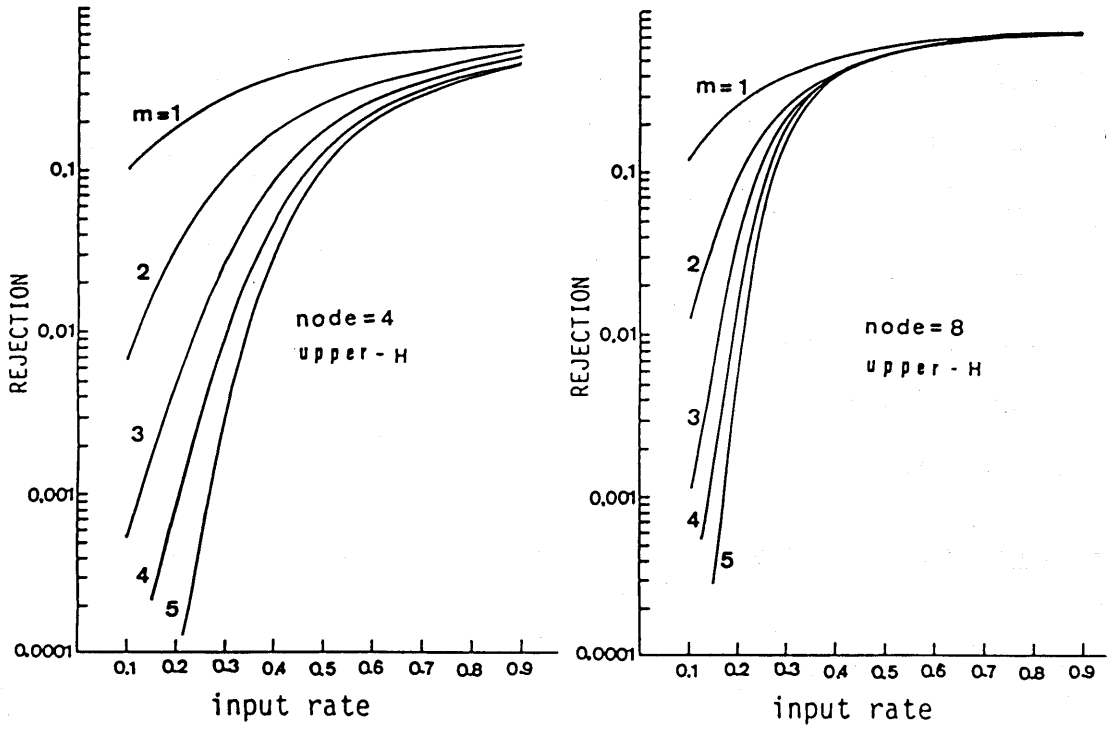


図2 入力と棄却率

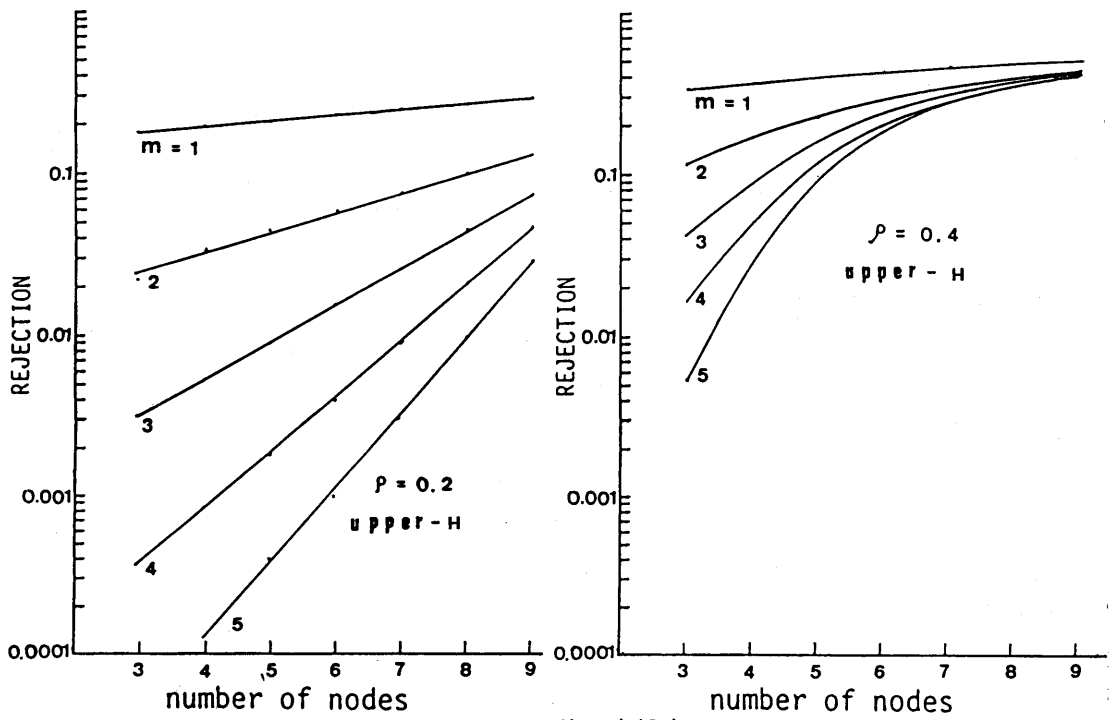


図3 ノード数と棄却率

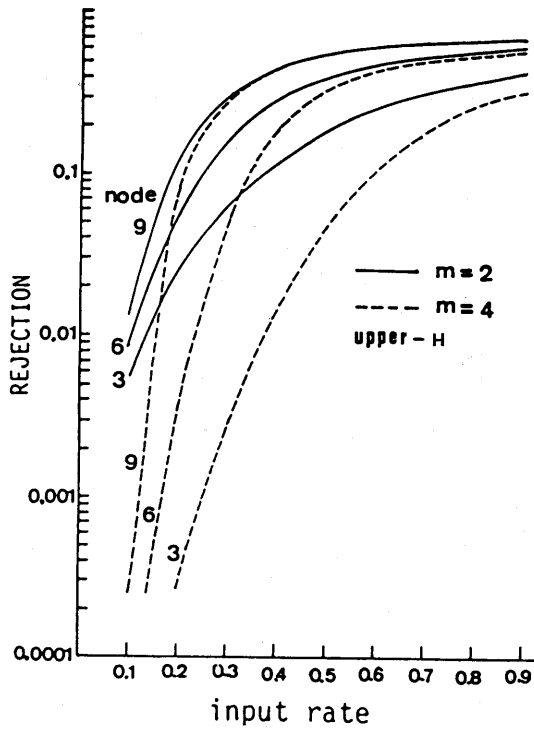


図4 入力と棄却率

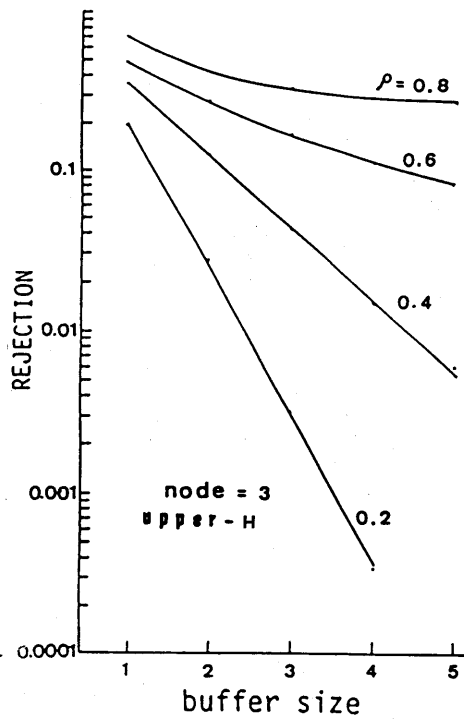


図5 a バッファサイズと棄却率

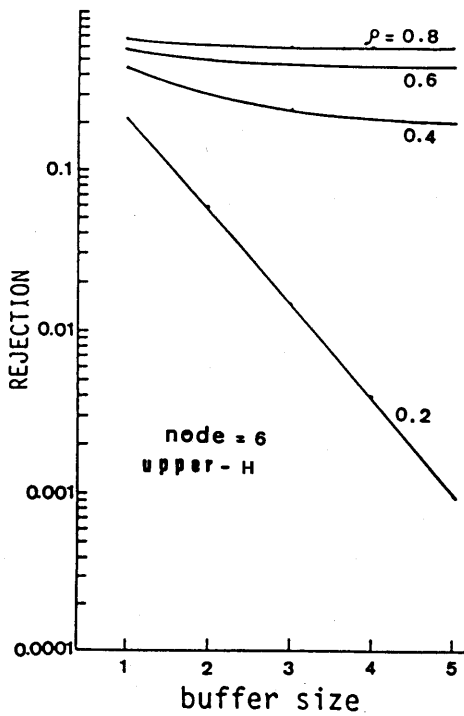
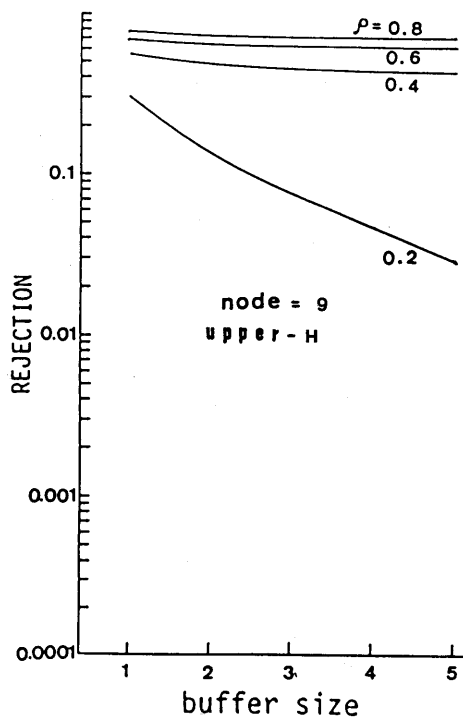


図5 b,c



バッファサイズと棄却率

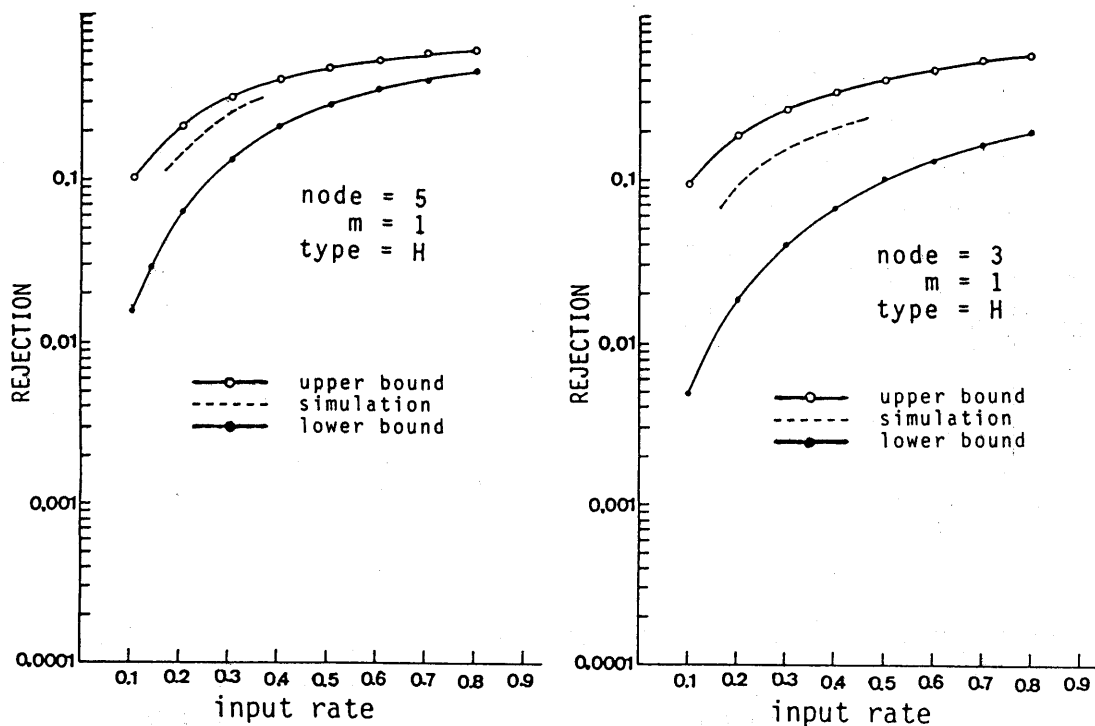


図6 入力と棄却率の上下限值

が大きくなるにつれて棄却率はほぼ同一の値を示す傾向にあり、バッファサイズ増減の効果は期待出来ない。また、負荷率が大きくなれば、ノード数、バッファサイズに関係なく同一の棄却率になる傾向にある。図3によれば、負荷率が2倍になれば棄却率は高くなることが分る。図5によれば、負荷率が0.3以下の低いトラフィックではバッファサイズ増減の効果は大きい、ノード数が増えると棄却率は負荷率、バッファサイズに関係なくほぼ同一の値になる。図6は棄却率の上限値、下限値およびシミュレーション値を示したものである。いずれの場合もシミュレーション値は上限値と下限値の中間に位置している。

**6. むすび** 棄却率の上限値は worst case の値を与えるので設計の際のいわゆる保証値となりまた下限値は best case の値を与えるので、最良の極限の値を推測するのに役立つものと思料される。

**謝辞** 日頃、研究について熱心に御討論下さる野口研究室の皆様から感謝いたします。

**参考文献** (1) 照屋、白鳥、野口：“スロットを用いた有限バッファループネットにおける棄却率の解析”、情報処理学会分散処理システム研究会資料、21-6、1984 (2) 照屋、白鳥、野口：“スロットを用いたループネットにおけるノード相互依存性について”、情報処理学会分散処理システム研究会資料、19-2、1983 (3) 照屋、白鳥、野口：“ループネットワークにおけるトラフィックの輻輳と動特性”、情報処理学会第25回全国大会講演論文集、167、1982

(4) 白鳥、野口、大泉：“ループコンピュータネットワークにおけるバッファリングについて”、信学誌、Vol. 59-D、No. 6、1976