いくつかのハイパーグラフ問題に対する Primal-Dual 近似アルゴリズムについて

竹下 和彦 † 藤戸 敏弘 †† 渡邉 敏正 ††

† 広島大学大学院工学研究科 情報工学専攻
†† 広島大学工学部 第二類 回路・システム工学講座
〒 739-8527 東広島市鏡山一丁目 4-1
(電話) 0824-24-7662 (渡邉), -7661 (藤戸，竹下) (ファクシミリ) 0824-22-7028
(電子メール) {hiko,fujito,watanabe}@infonets.hiroshima-u.ac.jp

あらまし

ハイパーグラフは，頂点集合とその部分集合 (ハイパー辺) 族から構成される．ハイパーグラフ問題はグラフ問題の一般化であるが，ハイパーグラフ問題に対する近似解法に関する研究はグラフ問題ほど進んでいない．本稿では，The generalized Steiner tree problem をはじめとするいくつかのグラフ問題をハイパーグラフ上に一般化し，これらの問題の近似解法について考える．具体的には，Goemans, Williamson[2] がグラフ問題に対して提案した主双対法に基づく近似アルゴリズムをハイパーグラフ問題に適用できるように拡張し，その近似解のコストが最悪の場合でも最適解のコストの k 倍以下であることを示す．ここで，k は入力ハイパーグラフ中のハイパー辺次数の最大値である．

キーワード　ハイパーグラフ，ハイパー辺，NP-困難性，主双対法，近似アルゴリズム

On Primal-Dual Approximation Algorithms for Several Hypergraph Problems

Kazuhiko Takeshita†, Toshihiro Fujito†† and Toshimasa Watanabe††

† *Graduate School of Engineering, Hiroshima University*
†† *Department of Circuits and Systems, Faculty of Engineering, Hiroshima University*
1-4-1, Kagamiyama, Higashi-Hiroshima, 739-8527 Japan
Phone: +81-824-24-7662 (Watanabe), -7661 (Fujito, Takeshita)
Facsimile: +81-824-22-7028
E-mail: {hiko,fujito,watanabe}@infonets.hiroshima-u.ac.jp

Abstract

A hypergraph consists of a vertex set and a family of its subsets. Although hypergraph problems are a generalization of graph problems, it seems that research results on approximation algorithms for hypergraph problems are much less than those for graph problems. In this paper, we propose approximation algorithms for several hypergraph problems including the generalized Steiner tree problem for hypergraphs : the primal-dual approximation algorithm provided by Goemans and Williamson[2] is adapted for solving these hypergraph problems. The main result is that the proposed algorithm outputs an approximation solution of cost at most k times the optimal, where k is the maximum size of hyperedges in a given hypergraph.

key words　hypergraphs, hyperedges, NP-hardness, the primal-dual method, approximation algorithms

1 はじめに

無向ハイパーグラフは，有限な空でない頂点集合 V と V の部分集合族 $E \subseteq 2^V$(但し，$E \neq \emptyset$) の組によって構成され，ここでは $H = (V, E)$ と表わす．E の要素をハイパー辺，E をハイパー辺集合という．ハイパー辺に含まれる頂点数をその次数という．すべてのハイパー辺の次数が 2 であるものは，通常のグラフ (以下，単にグラフという) と同じである．この様に，ハイパーグラフはグラフの一般化であり，数学的モデルとしての汎用性が高く，様々な局面で用いることができる．しかしながら，著者らの知る限りハイパーグラフ問題に対する近似アルゴリズムはグラフ問題ほど研究されていない．本稿では，ハイパーグラフ問題に対する近似アルゴリズムを提案することを目的とする．Goemans, Williamson[2] は，The generalized Steiner tree problem 等の様々なグラフ問題に対する一般的な近似解法を線形計画法の主双対法を利用して設計し，これらのグラフ問題に対してその近似解法が求める解のコストは最悪でもそれぞれの最適解のコストの 2 倍以内であることを示している．

本稿では，The generalized Steiner tree problem をはじめとするいくつかのグラフ問題をハイパーグラフ問題として一般化し，Goemans, Williamson[2] が提案した近似解法をハイパーグラフ上に拡張して，その近似解が最悪でも最適解の k 倍以内であることを示す．ここで，k は入力ハイパーグラフ中のハイパー辺次数の最大値である．

2 諸定義

無向ハイパーグラフ $H = (V, E)$ のすべてのハイパー辺 $e \in E$ には非負のコスト $c_e \geq 0$ が付いており，ハイパー辺コストの総和を $c(E) = \sum_{e \in E} c_e$ と表わす．ハイパー辺 e の次数を d_e と表わす．任意のハイパー辺 $e \in E$ に対して $d_e \geq 2$ とする．H の最大なハイパー辺次数を $k_H = \mathrm{Max}\{d_e \mid e \in E\}$ と表わす．但し，H を固定して考えるときには単に k と表わす．

頂点集合 $V' \subseteq V$，ハイパー辺集合 $E' \subseteq E$ からなるハイパーグラフ $H' = (V', E')$ のことを H の部分ハイパーグラフ $H' \subseteq H$ という．ハイパー辺 e に含まれる頂点 v に対し，e は v に接続するという．2 頂点 v_s, v_t に対して，v_s と v_t に接続するハイパー辺をそれぞれ e_s, e_t としたとき，e_s と頂点を共有するハイパー辺 e_1 ($e_s \neq e_s \cap e_1 \neq e_1$)，$e_1$ と頂点を共有するハイパー辺 e_2，... なるハイパー辺の系列 $e_s, e_1, e_2, \ldots, e_t$ が存在することを v_s と v_t は連結であるという．頂点集合 $S \subseteq V$ の任意の 2 頂点が連結で，この性質に関して S が極大な頂点集合であるとき，S と S を連結にするハイパー辺集合からなる部分ハイパーグラフを連結成分という．以下では，S のことを単に，連結成分と呼ぶこともある．更に，$S = V$ のとき，H は連結なハイパーグラフであるという．あるハイパーグラフ $H = (V, E)$ において，任意のハイパー辺 $e \in E$ を取り除いたとき，H の連結成分が増えるならば，H はハイパー森といい，更に H が連結ならば，特にハイパー木という．

H のカットとは，任意の頂点集合 $S \subseteq V$ と S 以外のすべての頂点を含む頂点集合 $\overline{S}$ ($= V - S$) への頂点の 2 分割のことであり $(S, \overline{S})$ と表わす．S の頂点を少なくとも 1 つ含み，S または $\overline{S}$ の部分集合とならないハイパー辺 e ($\emptyset \neq S \cap e \neq e$) をすべて含むハイパー辺集合，即ち，カット $(S, \overline{S})$ を横切るすべてのハイパー辺の集合 $\delta(S)$ をカットセットという．以下では特に区別する必要のない限り，ハイパーグラフ，ハイパー辺，ハイパー森，ハイパー木を単に，グラフ，辺，森，木と呼ぶことがある．

3 整数線形計画問題への定式化

本研究では，無向グラフ $H = (V, E)$ と非負の辺コスト関数 $c : E \to \boldsymbol{Q}_+$，$H$ のすべての頂点集合に対する関数 $f : 2^V \to \{0, 1\}$ を入力としたときに，以下のような整数線形計画問題に定式化できるハイパーグラフ問題について考える：

$$
\begin{array}{llll}
 & \text{Min} & \displaystyle\sum_{e \in E} c_e x_e & \\
 & \text{subject to:} & & \\
\text{(ILP)} & & \displaystyle\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq f(S) & \emptyset \neq S \subseteq V \\
 & & x_e \in \{0, 1\} & e \in E
\end{array}
$$

x_e は任意の辺 e が (ILP) の解に選ばれているとき $x_e = 1$，選ばれていないとき $x_e = 0$ となるような e の解に対する状態を表わす変数である．$\boldsymbol{x} = \{x_1, \ldots, x_{|E|}\}$ を (ILP) の解とし，$\boldsymbol{x}$ は (ILP) に対して求めた辺集合を表わす．$\delta(S)$ はカットセットである $(\delta(S) = \{e \mid \emptyset \neq e \cap S \neq e\})$．この様に定式化された (ILP) は，コストの総和が最小となる辺集合を求めるという問題である．但し，実行可能解を得るためには，任意の頂点集合 S に対するカットについて少なくとも $f(S)$ 本の辺をカットセット $\delta(S)$ から解として選ぶという制約条件を満たさなければならない．関数 f は入力されたグラフ上で取り得るす

べての頂点集合に対して与えられている．(ILP) は，上式のように定式化できるハイパーグラフ問題を一般化した問題であり，関数 f の性質によってそれぞれの問題に制限される．本稿では，f の取り得る値は 0 または 1 のみとする．(ILP) の解 (V,F) が森でない場合，ある $e \in F$ が存在して，$(V, F-\{e\})$ は (V,F) と同じ連結成分をもつ．すると，$(V,F-\{e\})$ も解となるはずである．結局，(ILP) の極小な解は必ず森になることがいえる．更に，f には以下のような性質があるものとする．

性質 3.1 任意の頂点集合 $S \subseteq V$ に対して，$f(S) = f(V-S)$ が成り立つ．この性質を *Symmetry* という．

性質 3.2 互いに素な 2 つの頂点集合 A, B に対して，$f(A) = f(B) = 0$ のとき $f(A \cup B) = 0$ である．この性質を *Disjointness* という．

ここでは，任意のグラフ $H = (V,E)$ に対して $f(V) = 0$ とする．以下では，この様な性質を持つ関数 $f: 2^V \to \{0,1\}$ からなる (ILP) のことを単に (ILP) といい，この問題に対して考えていく．

(ILP) を通常のグラフ上に制限した場合，この様に定式化される問題には，The minimum spanning tree problem，The shortest path problem や The Steiner tree problem 等の NP-困難問題がある．これらの NP-困難問題には，多くの近似アルゴリズムが提案されている．近似アルゴリズムの性能を理論的に評価するものとして Performance Ratio (PR)：近似解のコスト Z とそのときの最適解のコスト Z^* との比 (Z/Z^*) の最大値，がある．Goemans, Williamson[2] は，(ILP) として定式化できるグラフ問題に対する一般的な解法として Primal-Dual 近似アルゴリズムを提案し，その理論的解析により，(ILP) に対し，$PR \leq 2 - \frac{2}{|A|}$ を証明している (但し，$A = \{v \in V \mid f(\{v\}) = 1\}$)．計算時間は $O(\mathrm{Min}(n^2 \log n, mn\alpha(m,n)))$ である．ここで，n は頂点数，m は辺数，α はアッカーマン逆関数とする．この近似アルゴリズムは，他の多くのアルゴリズムの一般化であり，例えば，The minimum spanning tree problem に対しては Kruskal のアルゴリズム [4] と同じ解法になる．

本稿では，Goemans, Williamson[2] の Primal-Dual 近似アルゴリズムをハイパーグラフ上に拡張し，(ILP) に対する PR を理論的に解析する．

4 近似解法

4.1 Primal-Dual 近似アルゴリズム

ハイパーグラフ問題 (ILP) に対する Primal-Dual 近似アルゴリズム PDH (The Primal-Dual approximation algorithm for several hypergraph problems) について説明する．アルゴリズム PDH は，無向グラフ $H = (V,E)$，すべての辺 $e \in E$ に対するコスト $c_e \geq 0$，H 上に取り得るすべての頂点集合に対する関数 $f: 2^V \to \{0,1\}$ が入力として与えられたとき，(ILP) の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ に対応する辺集合 F を出力する．本アルゴリズムは，$f(S) = 1$ であるすべての頂点集合 S に対するカットセット $\delta(S)$ から少なくとも 1 本の辺を解の 1 部として選んでいく．ここで，$f(S) = 1$，且つ $\delta(S)$ に含まれるどの辺も解の 1 部として選ばれていない任意の頂点集合 $S \subseteq V$ の状態を *unsatisfied* といい，unsatisfied である頂点集合のなかで極小なものの状態を *active* という．$\delta(S)$ に含まれる辺がアルゴリズムによって解の 1 部として選ばれたとき，S は unsatisfied，active ではなくなる．アルゴリズム PDH の流れを以下に示す．

$H = (V,E)$ 上のすべての頂点集合 S に対するカットに変数 y_S (非負実数，初期値は 0) を与える．すべての active な頂点集合に対するカットの変数を同じ量だけ増やしていく．このとき，任意の辺 e のコスト c_e と e をカットセットに含むカットの変数の総和 $\sum_{S:e\in\delta(S)} y_S$ が最初に等しくなる ($c_e = \sum_{S:e\in\delta(S)} y_S$) ような e を辺集合 F' に加える．e を F' に加えたとき，e をカットセットに含むカットに対する頂点集合はすべて unsatisfied，active ではなくなり，active な頂点集合の族は更新される．この操作を active な頂点集合がある限り続ける．最後に，F' から unsatisfied な頂点集合ができないようにできるだけ辺を取り除いて，辺集合 F を得る．

Algorithm PDH

Input : 無向グラフ $H = (V,E)$，すべての辺 $e \in E$ に対するコスト $c_e \geq 0$，すべての頂点集合に対する関数 $f: 2^V \to \{0,1\}$．

Output : 辺集合 F．

Step 1. $F' \leftarrow \emptyset$，$F \leftarrow \emptyset$．

Step 2. H のすべての頂点集合 $S \subseteq V$ に対するカットの変数 y_S の初期値を 0 とする．

Step 3. active な頂点集合がある限り以下の操作を繰り返す．

(i) H の任意の頂点集合を S，active な頂点集合を A と表わしたとき
$\epsilon = \frac{c_e - \sum_{S:e\in\delta(S)} y_S}{\sum_{A:e\in\delta(A)} f(A)}$
が最小となるような辺 e を求める．

(ii) すべての active な頂点集合 A に対するカットの変数 y_A に対し $y_A \leftarrow y_A + \epsilon$ とする．

(iii) $F' \leftarrow F' \cup \{e\}$

Step 4. F' のすべての e に対して，加えられた逆の順番で 1 本ずつ $F' - \{e\}$ として，以下の操作を行なう．

if unsatisfied な頂点集合ができるならば，$F \leftarrow F \cup \{e\}$.

else $F' \leftarrow F' - \{e\}$.

Step 5. F を得る．

補題 4.1 アルゴリズム *PDH* で求めた辺集合 F は，(ILP) の実行可能解である．

証明： アルゴリズム Step 3. の実行中の辺集合 F' からなるグラフ $H'_F = (V, F')$ において，いくつかの成分 (頂点または連結成分) を含む頂点集合 S が unsatisfied ($f(S) = 1$，且つ $\delta(S)$ の辺が F' に含まれていない状態) であるとする．ここで，含まれているすべての成分 C が $f(C) = 0$ のとき，Disjointness より，$f(S) = f(\bigcup C) = 0$ となり，矛盾が生じる．よって，unsatisfied な S に含まれる成分のうち少なくとも 1 つは $f(C) = 1$ である．このとき，$f(C) = 1$ である成分 C に対する $\delta(C)$ の辺は F' に含まれていないので C は unsatisfied である．更に，C は成分であるから unsatisfied な頂点集合は含まない．よって，C は active な頂点集合である．従って，任意の unsatisfied な頂点集合には $f(C) = 1$ である成分 C が含まれていることが分かる．

Step 3. では，active な頂点集合がある限り辺を F' に加えている．Step 3. 終了時は，F' からなる部分グラフ $H_{F'}$ には，active な頂点集合が存在しないので，$H_{F'}$ の任意の連結成分 N' は $f(N') = 0$ である．更に，Step 4. 終了時に得られる F からなる部分グラフ H_F には unsatisfied な頂点集合は存在しないので，H_F の任意の連結成分 N は $f(N) = 0$ である．以上のことから，F は入力グラフ H 上の $f(S) = 1$ であるすべての頂点集合 S に対する $\delta(S)$ の辺を 1 本以上含んでいることが分かる．従って，F は (ILP) の実行可能解である． □

4.2 Performance Ratio (PR) の解析

アルゴリズム PDH の PR を理論的に解析するために，(ILP) の変数 $x_e = \{0,1\}$ を $x_e \geq 0$ に緩和させた問題である線形計画問題 (LP) の双対問題 (Dual) の実行可能解を考える．(Dual) は以下のように定式化できる：

$$
\text{(Dual)}\quad
\begin{array}{ll}
\text{Max} & \displaystyle\sum_{S \subseteq V} f(S) \cdot y_S \\
\text{subject to:} & \\
& \displaystyle\sum_{S: e \in \delta(S)} y_S \leq c_e \quad e \in E \\
& y_S \geq 0 \qquad\qquad \emptyset \neq S \subseteq V
\end{array}
$$

(Dual) は，H の任意の辺 e を含むカットの変数の総和 $\sum_{S: e \in \delta(S)} y_S$ が，その辺コスト c_e より大きくならないという制約条件のもとで，$f(S) = 1$ となるカットの変数 y_S の総和を最大にするという問題である．ここで，すべてのカットの変数の列を $\boldsymbol{y}$ とする．

補題 4.2 アルゴリズム *PDH* 終了時に得られる $\boldsymbol{y}$ は，(LP) の双対問題 (Dual) の実行可能解である．

証明： グラフ上にあるすべてのカットの変数の初期値は 0 である．Step 3. 実行中の 1 ループごとに，すべての active な頂点集合に対するカットの変数を同じ量だけ増やす．このとき，最初に $c_{e'} = \sum_{S: e' \in \delta(S)} y_S$ となった辺 e' を辺集合 F' に加えていく．F' に加えられた e' をカットセット $\delta(S')$ に含むカットに対する頂点集合 S' は active，unsatisfied ではなくなる．従って，その後，S' に対するカットの変数 $y_{S'}$ は増えることはないので，e' をカットセットに含むすべてのカットの変数の総和が $c_{e'}$ よりも大きくならない．この様に，アルゴリズムでは H のすべての辺に対して $\sum_{S: e \in \delta(S)} y_S \leq c_e$ という制限のもとで，active な頂点集合に対するカットの変数をできるだけ大きくなるように増やしている．active な頂点集合がなくなったとき，Step 3. は終了する．Step 3. 以外では，H 上のすべてのカットの変数は増えることはない．従って，アルゴリズム終了時まで，H の任意の辺に対して $\sum_{S: e \in \delta(S)} y_S \leq c_e$ という制約条件は満たされている．ゆえに，$\boldsymbol{y}$ は (Dual) の実行可能解である． □

補題 4.2 より，アルゴリズム PDH が (ILP) に対する実行可能解 $\boldsymbol{x}$ を求めると同時に (Dual) の実行可能解 $\boldsymbol{y}$ が求まることが分かる．(Dual) の実行可能解 $\boldsymbol{y}$ を利用して，PDH の (ILP) に対する PR を理論的に解析する．(ILP) の最適解のコストを Z^*_{ILP}，(LP) の最適解のコストを Z^*_{LP}，(Dual) の最適解のコストを Z^*_D と表わし，PDH が求めた (ILP) の近似解のコストは $\sum_{e \in F} c_e$ $(= \sum_{e \in E} c_e x_e)$，(Dual) の近似解のコストは $\sum_{S \subseteq V} y_S$ と表わされる．これらのコストは，双対定理より以下のような関係がある．

$$\sum_{S \subseteq V} y_S \leq Z^*_D = Z^*_{LP} \leq Z^*_{ILP} \leq \sum_{e \in F} c_e$$

この式より，PDH で求まる (Dual) の近似解のコストは (ILP) の解のコストの下界値となることが分かる．この関係を利用して，ある数 λ に対して次の式を導くことができる．

$$\sum_{e\in F} c_e \le \lambda \cdot \sum_{S\subseteq V} y_S \le \lambda \cdot Z^*_{LP} \le \lambda \cdot Z^*_{ILP} \tag{1}$$

(ILP)，(Dual) のそれぞれの解のコストに対して式 (1) が成り立つような λ の最小値は PDH の (ILP) に対する PR であるといえる．

定理 4.1 アルゴリズム *PDH* の *PR* は k である．

証明： PDH が求めた辺集合 F に含まれる任意の辺 e は，辺コスト c_e と e を含むカットの値の総和とが必ず等しいので，$c_e = \sum_{S:e\in\delta(S)} y_S$ という式が成り立つ．F のコストは $c(F) = \sum_{e\in F} c_e = \sum_{e\in F}\sum_{S:e\in\delta(S)} y_S$ と表わされる．これは，F の辺を $\delta(S)$ に含む任意のカットの値 y_S を，$\delta(S)$ に含まれる F の辺の数 $|F\cap\delta(S)|$ 倍した総和であると考えられる．よって，F のコストは更に，$c(F) = \sum_{e\in F}\sum_{S:e\in\delta(S)} y_S = \sum_{S\subseteq V} y_S|F\cap\delta(S)|$ と表わすことができる．式 (1) より次の式が導かれる．

$$\sum_{S\subseteq V} y_S|F\cap\delta(S)| \le \lambda \cdot \sum_{S\subseteq V} y_S \tag{2}$$

以下では，式 (2) が成り立つ λ の最小値を求める．

アルゴリズム開始時は式 (2) の両辺とも 0 である．Step 3. の操作のときだけカットの変数が増える．ここで，Step 3. の任意の 1 ループでの active な頂点集合の族を S_{ACT}，active なカットの変数の増加分を ϵ と表わす．このとき，(ILP) の近似解のコスト $\sum_{e\in F} c_e$ の任意の 1 ループにおける増加分は $\sum_{S\in S_{ACT}} \epsilon\cdot|F\cap\delta(S)|$，(Dual) の近似解 $\sum_{S\subseteq V} y_S$ のコストの 1 ループにおける増加分は $\epsilon\cdot|S_{ACT}|$ である．よって，Step 3. の任意のループでの増加分に対し，以下の式が成り立つような λ の最小値を求めたとき，その値は式 (2) に対しても成り立つといえる．

$$\sum_{S\in S_{ACT}} \epsilon\cdot|F\cap\delta(S)| \le \lambda\cdot\epsilon\cdot|S_{ACT}| \tag{3}$$

従って，式 (3) が成り立つような λ の最小値を求める．式 (3) は以下のように書き換えることができる．

$$\frac{\sum_{S\in S_{ACT}} |F\cap\delta(S)|}{|S_{ACT}|} \le \lambda$$

この式より，λ の最小値は，Step 3. の任意のループにおける active な $S\in S_{ACT}$ に対する $\delta(S)$ に含まれる F の辺数の平均値といえる．Step 3. の任意のループにおいて，成分 (頂点または連結成分) $C\in\boldsymbol{C}$ と F からなるグラフ $W=(\boldsymbol{C},F)$ を考える．このとき，λ の最小値は W 中の active な成分の平均次数と考えられる．ここで，W の 1 本の辺だけに接続している成分を葉ということにする．いくつかの葉 $C_1,\ldots,C_k$ に接続している辺 e_0 を W から取り除いたとき，分割された葉がすべて $f(C_i)=0\ (i=1,\ldots,k)$ であると仮定する．分割される前に C_i を含んでいた W の連結成分を N とすると，N は補題 4.1 より $f(N)=0$ である．ここで，Disjointness と Symmetry より $f(N-\bigcup_{i=1}^{k} C_i)=0$ が導かれる．このことから，e_0 をカットセットに含むすべての頂点集合 S は $f(S)=0$ であることになる．しかしながら，これは，アルゴリズムの解の極小性に矛盾する．従って，W では，同じ辺に接続している葉のうち少なくとも 1 つは $f(C)=1$ である成分が存在する．W は $f(C)=1$ の成分に対するカットセットの辺を少なくとも 1 本は含む極小なハイパー森である．ここで，W の頂点集合 $\boldsymbol{C}$ は，active な成分の集合 S_{ACT} と $f(C)=0$ である成分の集合の和集合であるが，S_{ACT} の成分の平均次数を小さくすることなく，W を S_{ACT} だけを頂点集合とするハイパー森に変換することができる (詳細な説明は紙面の都合上省略する)．以上のことから，λ の最小値はハイパー森の頂点の平均次数と考えられる．任意のハイパー森 $H_f=(V_f,E_f)$ の辺数 $|E_f|$ は高々$|V_f|-1$ である．ここで，ハイパーグラフの最大な辺次数を $k=\mathrm{Max}\{d_e \mid e\in E\}$ と表わすと，ハイパー森の頂点の平均次数は高々$\frac{k(|V_f|-1)}{|V_f|}$ であり，λ の最小値は k 以下であるといえる．従って，アルゴリズム PDH の PR は k である．□

4.3 計算時間

グラフ H の頂点数を n，辺数を m とする．任意の頂点集合が active であるかを判定する計算時間は $O(n)$ である．Step 3. の操作では，set union algorithm[7] を適用すると $O(kmn\alpha(m,n))$ である．一方，[2] の方法を適用すると $O(kn^2\log n)$ である．Step 4. は $O(n^2)$ である．従って，アルゴリズム PDH の計算時間は $O\big(\mathrm{Min}(kmn\alpha(m,n), kn^2\log n)\big)$ である．

5 個別問題への応用例

ここでは，(ILP) で定式化できる具体的ハイパーグラフ問題を 2 つ説明する．各問題は，補題 4.1 よりアルゴリズム PDH で近似解を求めることができ，定理 4.1 よりその近似比は高々最大ハイパー辺次数である．

5.1 The generalized Steiner tree problem in hypergraphs (GSTH)

GSTHとは，辺コスト付き無向グラフ $H=(V,E)$ と複数の指定点集合の族 $\boldsymbol{T}=\{T_1,\ldots,T_p\}$ (pは非負整数) が与えられたとき，任意の指定点集合 $T_i \subseteq V$ $(i=1,\ldots,p)$ に含まれている指定点がすべて連結となり，且つ辺コストの総和が最小となるような部分グラフ H' を求めるという問題である．GSTHを通常のグラフに制限したとき The generalized Steiner tree problem (GST) という問題になる．更に，与えられる指定点集合が1つのときは一般によく知られている The Steiner tree problem (ST) となる．STはNP-困難である [3]．ST, GSTには多くの近似アルゴリズムが提案されている [5][1][2]．

GSTHを (ILP) のように定式化したときの関数 f は，任意の頂点集合 S が任意の T_i 内の指定点 u を含みながら，u 以外の指定点 $v \in T_i$ を含んでいない $(\emptyset \neq S\cap T_i \neq T_i)$ ならば $f(S)=1$，それ以外の場合は0となる．上の $f(S)=1$ の状況では $V-S$ は $v \in T_i$ を含んでいるが $u \in T_i$ を含んでいないので $f(V-S)=1$ であり，$f(S)=0$ の状況では $S\cap T_i=0$ のとき $V-S\cap T_i=T_i$ となり，逆も同様であるので $f(V-S)=0$ である．この性質は Symmetry である．また，互いに素な頂点集合 A,B が $f(A)=f(B)=0$ のとき，$\emptyset=A\cup B=T_i$ となるので $f(A\cup B)=0$ である．この性質は Disjointness である．

5.2 The multi-point connection problem in hypergraphs (MCH)

MCHとは，辺コスト付き無向グラフ $H=(V,E)$ と大きさが等しい複数の接点集合の族 $\boldsymbol{A}=\{A_1,\ldots,A_p\}$ $(|A_i|=q,\ i=1,\ldots,p,\ p,q$ は有限な非負整数) が与えられ，すべての接点集合から任意に1頂点ずつ含む頂点集合をコネクション集合としたとき，すべての接点集合内のすべての頂点を含むコネクション集合族 $\boldsymbol{T}=\{T_1,\ldots,T_q\}$(但し，$\boldsymbol{T}$ 内のコネクション集合は互いに素) において，任意のコネクション集合 T_i を連結とし，且つ辺コストの総和が最小となるような部分グラフ H' を求めるという問題である．MCHは，コネクション集合を固定している場合 (fixed-case) と固定していない場合 (nonfixed-case) が考えられる．fixed-caseは，前節5.1のGSTHと同じ問題になる．MCHを通常のグラフに制限し接点集合数を2とした場合，The point-to-point connection problem (PC) という問題となる．PCは，fixed-case，nonfixed-caseのどちらの場合もNP-困難である [6]．従って，PCの一般化であるMCHもNP-困難である．

nonfixed-caseのMCHを (ILP) のように定式化したときの f は，任意の頂点集合 S がすべての接点集合内の頂点を同数含んでいない $(|S\cap T_1| \neq \ldots \neq |S\cap T_p|)$ ならば $f(S)=1$，それ以外の場合は0となる．更に，$f(S)=1$ のときは $V-S$ もすべての接点集合の頂点を同数含んでいないので $f(V-S)=1$，$f(S)=1$ のときは $V-S$ は接点集合の頂点を同数含んでいるか空集合かのどちらかであるので $f(V-S)=0$ である．この性質は Symmetry である．また，互いに素な頂点集合 A,B が $f(A)=f(B)=0$ のとき，$A\cup B$ は接点集合の頂点を同数含んでいるか空集合かのどちらかであるので $f(A\cap B)=0$ である．この性質は Disjointness である．

6 まとめと今後の課題

いくつかのハイパーグラフ問題を整数線形計画問題として定式化し，主双対法に基づく近似解法を適用し，PRがハイパー辺次数の最大値 k であることを示した．今後の課題として，関数 f の取り得る値の範囲を広くした場合の問題に対して Primal-Dual 近似アルゴリズムを適用し，PRを理論的に解析することが挙げられる．

謝辞 本研究の一部は文部省科学研究費補助金特定領域研究 (B)No.10205219 の援助を受けたことを記し，謝辞を表する．

参考文献

[1] A. Agrawal, P. Klein and R. Ravi, When trees collide: An approximation algorithm for generalized Steiner problem on networks, Prec. 23rd Annual ACM Symp. on Theory of Computing, pp. 134–144, 1991.

[2] M. X. Goemans and D. P. Williamson, A general approximation technique for constrained forest problems, Proc. 3rd Annual ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms, pp. 307–315, 1992.

[3] R. M. Karp, Reducibility among combinatorial problems, in R. E. Miller and J. W. Thatcher (edu.), Complexity of Computer Computations. Plenum Press, New York, pp.85–103, 1972.

[4] J. Kruskal, On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem, Proc. American Math. Society, 7, pp. 48–50, 1956.

[5] M. Karpinski and A. Zelikovsky, New approximation algorithms for the Steiner tree problems, J. Combinatorial Optimization, 1, pp. 47- 65, 1997.

[6] C. L. Li, S. T. McCormick and D. Simichi-Levi, The point-to-point delivery and connection problems: Complexity and algorithms, Discrete Applied Mathematics, 36, pp. 267–292, 1992.

[7] R. E. Tarjan, Efficiently of a good but not linear set union algorithm, Journal of ACM, 22, pp. 215–225, 1975.