数理モデル化と問題解決　24－5
（1999．5．14）

経済現象に見られる決定論的性質と確率論的性質の両義性

中島義裕 † 郡司 P 幸夫 ‡
† 大阪工業大学 ‡ 神戸大学

経済時系列解析では、決定論的カオスか確率論かの議論が続いている。本研究では、この枠組みから離れ、進化的理解という視座から経済現象を捉える可能性と必然性を問う為に、相関次元分析を行った。高次元への埋め込みと、埋め込み次元の対数表示を行った結果、TOPIX は決定論と確率論の中間の性質を持ち、スケール則を満たす事がわかった。また、３つのモデルを比較分析した。GARCH モデルは確率的、Langevin 方程式は決定論的性質を持つ事が分かった。一般内部観測モデルからは確率論的性質、決定論的性質、そして、TOPIX 的性質を持つ時系列を得た。前の２つのモデルは確率モデルである事から、TOPIX の持つ複雑さを理解するには、確率モデルではなく進化的発想が必要である事が分かった。

The Equivocal Property Found in The Economic Phenomena :Deterministic Process and Stochastic Process

Yoshihiro Nakajima†, Gunji P Yukio‡
†Osaka Institute of Thechonology, ‡Kobe University

There is a problem which economical time series can be recognized as among deterministic chaos, stochastic process, or evolutionary process. In this study, we estimate TOPIX and 3 models by correlation dimension analysis. By embedding into high dimensional spaces, and by plotting embedding axis by logarithmic scale, we find that TOPIX have complexity power low, and state between stochastic and deterministic property. Garch model has the property of stochastic, and Langevin equation has that of deterministic. We can find that we need the idea of evolution to understand the complexity of TOPIX.

1 Introduction

従来、株式価格は自己回帰モデルによって説明されていたが、株式価格がベキ則分布を持つ事が指摘されて以来、様々な提案がなされている。

現在、株式価格や経済変動などの不規則な現象を説明するために、大別すると３つの方向で研究が進められている。確率論的に捉える立場と決定論的カオスによると考える立場、そして進化論的に捉える立場である。

株式市場価格の実証分析を行い経済現象が決定論と確率論という枠組の中で、どの様に位置付けられるかについて調べる。

市場価格データとしては TOPIX(東証株価指数)、分析方法としては相関次元分析を用いる[1]

[1] 相関次元分析については、[6] を参照。

相関次元分析は決定論的カオスが存在するか否かを判別する為に用いられて来た。本論では、飽和しない場合においても時系列によって相関次元の上昇の仕方に違いがある事に着目する。この様な定性的な性質を調べる為に、今までなされていなかった「高次元への埋め込み」と「埋め込み次元の対数表示」を試みる。

更に、同様の方法で株価変動のモデルとして提案されている自己回帰モデルの拡張モデルを分析し、それらのモデルの持つ性質を TOPIX との比較によって考察したい。比較分析には確率モデルとして GARCH モデル、離散 Langevin 方程式、進化的モデルとして一般内部観測モデルを用いる。

2 TOPIXの相関次元分析

実証分析として東京証券市場の株式1部の全銘柄から算出されたTOPIX（東証株価指数）を用いる[2]。定常性を確保するために、実際のデータの差分 ($x_t - x_{t-1}$) をとった。

相関次元分析の結果は、図1である。特徴を見る為、x軸を対数表示する。相関次元分析では埋め込みの際のラグとデータ数に注意を払う必要がある事から、ランダムな時系列 (N(0,1) の疑似乱数) と決定論的カオス (レスラー系) から得られた時系列を同じ条件で分析し、それらの比較によって議論する。

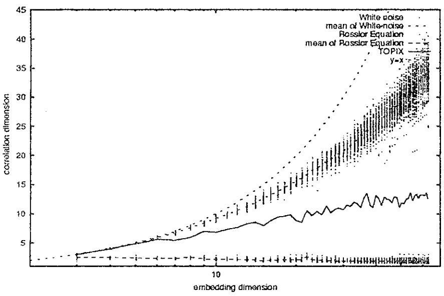

図 1: x 軸は埋め込み次元、y 軸は相関次元。左上から順に、y = x(ホワイトノイズの理論値)、ホワイトノイズ、TOPIX、レスラー系の結果である。以下の相関次元分析の結果の図は、全て x 軸を対数表示する

定性的にはx軸を対数表示した時相関次元が下に凸である場合 (確率論)、上に凸である場合 (決定論)、そして直線 (両義性) である場合に分類できる。

x軸を対数表示した時に、相関次元が直線的に上昇するという事は時系列の構造と埋め込み次元の間にスケール則が成り立っている事を示す。これは、埋めこまれた各々の次元の空間上で時系列が構造を持ち、埋めこむ次元が高くなるに従って、その構造が精緻化されている事を意味する。その一方で、TOPIXは飽和していない。この事は、時系列が持つ固有の構造は捉えられないという事を示唆する。構造を捉える際の埋め込みの有効性と無効性より、TOPIXが決定論的な記述の有効性と無効性の両義性を持つと考えられる[3]。

3 モデル

株価のモデルとして2つの確率型モデルと1つの内部観測型モデルを分析する。これらは、全て1次の自己回帰モデルの改変モデルとして捉える事ができる。ここでは自己回帰モデルを中心に各モデルを説明する。

$$AR(1) : x(t) = e(t) + bx(t-1)$$

近年、ARモデルの変更が試みられている。1次のARモデルを基準に、その拡張の方向を眺めると、大きく分けて係数bについての仮定を拡張したものと、ノイズ項 e についての仮定を拡張したものの二つに分類できる。前者としてはLangevin方程式、後者としてはGARCHモデルが代表的である[4]。

離散型Langevin方程式の標準系は以下の様に与えられる。

$$x(t) = b(t-1)x(t-1) + e(x-1)$$

b は分散1.5のPoisson分布、e はN(0,0,86)のホワイトノイズを用いる。

ノイズ項 $e(t)$ の分散に不均一性を持たせ、大きな変動と小さな変動が連続して起こりやすくなるように工夫したものとして、GARCH(generalized auto regressive conditional heteroskedastic) モデルが良く知られている。GARCHによるノイズ項の最も基本的な定義式は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} &C(t+1) = s(t)e(t) \\ &s(t)^2 = f_0 + \textstyle\sum_i (f_i C(t-i)^2) + \sum_j (g_j s(t-j)) \\ &i = 1, 2, \ldots N, j = 1, 2, \ldots M \end{aligned}$$

$f_0 = 1.0$、$f = 0.10$、$g = 0.85$、$e(t)$ の分布はN(0,1)を用いる。

[2] 1983年1月4日～1997年11月28日

[3] TOPIXが更に高次元の決定論的カオスに従っているとも考える事が出来るが、実証分析で得られる知見の範囲ではスケール則が満たされている事を前提に議論を行う立場をとる。

[4] 端的に言えばARの仮定から前者は分散収束の仮定を、後者は分散均一の仮定を外すという形で拡張したものである。

ARモデルのもう一つの改良型を加える。[5]。AR(1)

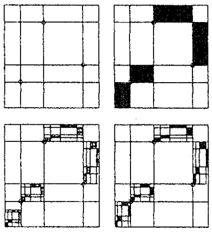

図 2: リターンマップの構成手順。左上の図はデータセットのプロットと分割、右上の図は4つの長方形の中からの選択と塗りつぶしを示す。後、右下→左下の様に操作を繰り返す。

モデルにおけるノイズ項として、郡司 [3] が提案した内部観測型モデルによって得られる時系列を採用する[6]。e の過去の系列のデータセット $e(t-1), e(t-2)\ldots e(t-K)$ が与えられた時、$e(t-1)$ から $e(t)$ を導く写像を以下の様に構成する。適当な2次元閉区間 $\mathbf{J}\times\mathbf{J}$ 上に点 $(e(t-2), e(t-1)), (e(t-3), e(t-2)), \ldots (e(t-K+1), e(t-K))$ をプロットする (図 2 左上)。閉区間 $\mathbf{J}\times\mathbf{J}$ をこれらの点を頂点として持つ長方形に分割する (図 2 左上)。各点を頂点とする長方形は4つの中から一つをランダムに選択する (図 2 右上)。この様に得られた構造を、自己縮小写像によって繰り込む。(図 2 右下→図 2 左下)。この操作を無限に繰り返す事で得られた構造を写像として用いる。[7]。この論文では簡便の為にこのモデルを MAR(1)(Modefied AR) と表記する。分析では、区間 $\mathbf{J}\times\mathbf{J}$ を、$(-0.5, 0.5)\times(-0.5, 0.5)$ のトーラスとし、マップを構成する為のデータセットは、過去127ステップ分のデータを用いる。

4 モデルの比較分析

先の分析と比較する為に、全て x 軸を対数表示する。また、比較の為に先の分析における全銘柄から算出された TOPIX の結果も示した。

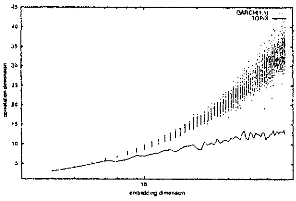

図 3: GARCH(1,1) の相関次元分析結果。x 軸は対数表示 (以下の図 4、図 5 についても同様である)。比較の為に図 1 の TOPIX 全銘柄の結果を実線で示した。

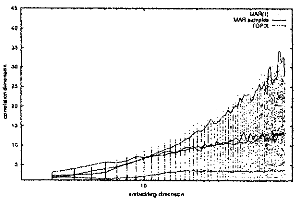

図 4: MAR(1) の相関次元分析結果。実線は、TOPIX および以下の議論のためにホワイトノイズ、TOPIX、決定論的カオスに近い相関次元を持つ時系列の結果を選び示したもの。

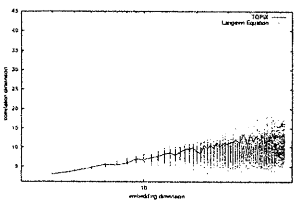

図 5: Langevin 方程式の相関次元分析結果

3つのモデルの結果を比較すると、x 軸を対数表示した時の「上に凸」「下に凸」「直線」という定性的な傾向によって、モデルの性質を特徴付ける事ができる。GARCH の相関次元は確率論的に下に凸である。また、Langevin 方程式は上に凸の性質が強い。MAR は、GARCH、業種別TOPIX、Langevin 方程式の全ての領域を含んでいる。TOPIX の相関

[5] GARCH との対応で言えば、AR のノイズ項から GARCH は同一分布の仮定をはずし、ここで定義するモデルでは、独立の仮定をはずすという改良を行う。

[6] 詳しくは、[3][4] を参照。

[7] このダイナミクスによって得られた時系列は安定した挙動と不安定な挙動を繰り返し、魚の群などの巨視的な挙動を自律的に生成させる事が報告されている [4]。

次元分析と同様の相関次元を持つ時系列を与えたのは、MAR と Langevin 方程式である事が分かる。

MAR は、ランダムシードの違いによって決定論的カオスから、ホワイトノイズまでの全ての領域を占めている。このモデルは構成法自体が決定論的とも確率論的とも言えないが、結果からもそうした分類が出来ない事が分かる。

Langevin 方程式から得られる時系列の相関次元は、TOPIX の下側の領域を占めている。対数表示においては、上に凸である場合や直線的に上昇する場合もある。Langevin 方程式は、全銘柄 TOPIX と同じ結果を持つ時系列を含むが、それは TOPIX とは異なる理由によると考えられる[8]。

5 議論と課題

この研究では、「高次元への埋め込み」と「埋め込み次元の対数表示」によって確率論、決定論、両義性を特徴付け、株価とモデルを分類する事ができた。

最初の分析では、TOPIX は決定論とも確率論とも言えない性質、すなわちスケール則を持つという事がわかった。スケール則が満たされているという事は埋め込む空間において見出される構造と、その構造からの逸脱の連鎖が高次元への埋め込みを続ける事で保証されている事を含意している。株式価格の変動はこうした複雑さを持つのである。

第二の分析は、この様な性質を持つ経済現象を捉える際に考えるべきモデルの方向性を示唆している。GARCH は、分散不均一によって AR よりも複雑な時系列を表現しているが、TOIPX が実際に持つ複雑さまでは捉えられずにいる。

Langevin 方程式は株式の価格に似た性質を示した。しかしながら、株価とは、異る理由にものと思われる。

AR のノイズ項を内部観測的に与えた場合、モデルの構成法からノイズ項は独立の仮定を満たしてはいない。各々の変動は、時間発展規則に適用する事で得られるが、その時間発展規則自身も、通時的ではなく各時間毎に異なる。このモデルは状態概念と規則概念の分離を無効にする事を含意している [3]。こうした分離の無効性の一つの表現としてフラクタル構造が用いられている事に注目したい[9]。

このモデルから得られた時系列は、相関次元／埋め込み次元空間内で、確率論と決定論を含む領域を占めている。両義的性質を持つモデルによって得られた時系列が、時系列毎に決定論的様相と確率論的様相、そして両義的様相を示すのである。この事は、我々が得られる時系列が決定論的、または確率論的に振舞う事と、時系列を生み出す機構が決定論的であるか、確率論的であるかとは、直接対応しない事を意味する。

[8] スペクトル分析の結果、Langevin 方程式は、周期を検出したが、TOPIX では検出しなかった。

[9] 系の内部と外部の分離の問題について、Atmanspacher[1] は「... 論理的混乱を考えざるをえない時、または、境界がフラクタルである様なときに (内部と外部の区別の) 問題は不可避となる」と述べている。一般内部観測モデルは、系の内部と外部の境界の問題を、状態と規則がなす論理的混乱と捉え、その表現としてフラクタル構造を用いている。TOPIX がスケール則を満たす事は、時系列を構造として捉えようとした時に、構造の境界がフラクタル的である事を含意している。

参考文献

[1] Atmanspacher.H (伊藤源 訳) 「外在物理学、内在物理学を越えて」現代思想１９９６年9月号２４巻１１号 青土社

[2] 郡司 P 幸夫「生命と時間、そして原生一計算と存在論的観測」現代思想 1994 年〜 1996 年 青土社

[3] Gunji.P.Y, Ito.K, Kusunoki.Y "Formal model of internal measurement:Alternate changing between recursive difinition and domain equation" PhysicaD 110 (1997)

[4] Gunji.P.Y, Kusunoki.Y "A Model of Incomplete Identification Illustrating Schooling Behavior" Chaos,Solitons & Fractals Vol.8 No.10(1997)

[5] Takayasu.H, Sato.A, Takayasu.M "Stable Infinite Variance Fluctuations in Randomly Amplified Langevin Systems" Physical Review Letters,Vol.79,No.6 (1997)

[6] 田中辰雄「カオス理論の計量分析への応用」応用計量経済学 I 多賀出版 (1997)