数理モデル化と問題解決 31－13
（2000．9．22）

連結ピン型組織構造への関係追加モデル

澤田　清　　　宇野　斉
流通科学大学 情報学部

概要　本研究では，完全２分木の全兄弟が隣接化された連結ピン型組織構造に対する２つの関係追加モデル，(i) 同じ深さの２頂点間に辺を１本追加する，(ii) 同じ深さの全頂点間に辺を追加する，を提案した．これらのモデルに対して，辺追加前と比べて総頂点間経路長（全頂点間の最短経路の長さの総和）がどれだけ短縮されたか（総頂点間短縮経路長と呼ぶ）を定式化し，これを最大にする追加辺の位置を解析的に求めた．

Additional Relations Models to a Linking Pin Type Organization Structure

Kiyoshi Sawada and Hitoshi Uno
Faculty of Information Science, University of Marketing and Distribution Sciences

Abstract　This paper proposes two models on additional relations to a linking pin type organization structure where every pair of siblings in a complete binary tree of height H is adjacent; (i) a model of adding an edge between two nodes with a specific depth N and (ii) a model of adding edges between every pair of nodes with a specific depth N. For each of two models, a shortened total path length, which is the sum of shortened shortest path lengths between every pair of nodes, is formulated, and an optimal depth N^* is obtained by maximizing the shortened total path length.

1．はじめに

企業などの組織の構造には，上下間の一元的な命令系統に基づくピラミッド組織構造や，ピラミッド組織構造に部門内の横方向の協力関係を付加した連結ピン型組織構造（Likert[1] の組織分類では，システム４と呼ばれている）などがある．ピラミッド組織構造は，構成主体を頂点に，上下の主体間関係を辺に対応させると，根付き木であると考えることができる．また，連結ピン型組織構造は，根付き木の兄弟（同じ親を持つ頂点）を隣接化した構造として表すことができる．このとき，各頂点間の経路は組織内の主体間の関係をたどる情報伝達経路に対応している．また，これらの組織構造に辺を追加することは，組織にあらかじめ設定された主体間関係以外の追加的関係の形成に相当する [2].

筆者ら [3] は，すでに，完全２分木型のピラミッド組織構造を対象とした３つの関係追加モデル，(1) 同じ深さの２頂点間に辺を１本追加する，(2) 同じ深さの全兄弟間に辺を追加する，(3) 同じ深さの全頂点間に辺を追加する，について，総頂点間経路長（全頂点間の最短経路の長さの総和）を最小にする追加辺の位置を解析的に求めた．ここで，完全２分木は，すべての葉の深さが同じで，かつすべての内部頂点の次数が２である２分木を指す．また，深さは，根からその頂点までの経路の長さを表す．

本研究では，完全２分木の全兄弟があらかじめ隣接化された連結ピン型組織構造を対象として，次の２つの関係追加モデルを提案する．すなわち，高さ $H\,(H=2,3,\cdots)$ の完全２分木連結ピン型組織構造に対して，(i) 同じ深さ $N\,(N=2,3,\cdots,H)$ の２頂点間に辺を１本追加する，(ii) 同じ深さ $N\,(N=2,3,\cdots,H)$ の全頂点間に辺を追加する，という２つのモデルである．ここで，(i) は組織内の同じ層での一対一の追加的な関係形成（個人的なつながりなど）に，(ii) は組織内の同じ層全体での追加的な関係形成（集合研修や会合など）に相当する．

2.，3. では，それぞれ，上述した (i)，(ii) の関係追加モデルについて，辺追加前と比べて総頂点間経路長がどれだけ短縮されたか（以後，総頂点間短縮経路長と呼ぶ）を定式化し，これを最大にする（すなわち，総頂点間経路長を最小にする）追加辺の位置を解析的に求める．

2．深さ同一２頂点間への辺追加

ここでは，高さ $H\,(H=2,3,\cdots)$ の完全２分木の全兄弟が隣接化された連結ピン型組織構造に対して，同じ深さ $N\,(N=2,3,\cdots,H)$ の２頂点間に辺を１本追加した場合に，総頂点間短縮経路長を最大にする追加位置を求める．

深さ N の２頂点間に追加可能な辺は，同形のグラフを除去すると，$N-1$ 通り存在する．すなわち，深さ $L\,(L=0,1,2,\cdots,N-2)$ の頂点の左部分構造（頂点の左の子を根とする部分構造）の頂点と右部分構造（頂点の右の子を根とする部分構造）の頂点を隣接化する辺の $N-1$ 通りである．ここで，$L=0$ の場合，すなわち組織構造全体の根の左部分構造と右部分構造の頂点を隣接化したときの総頂点間短縮経路長 $S_{1,H}(N)$ を定式化すると，

$$\begin{aligned} S_{1,H}(N) \;=\;& \{M(H-N)\}^2(2N-2)+2M(H-N)\sum_{i=1}^{N-2}2i+\sum_{i=1}^{N-3}\sum_{j=1}^{i}2j \\ &+2M(H-N)\sum_{i=1}^{N-1}M(H-i-1)(2i-1)+2\sum_{i=1}^{N-2}M(H-i-2)\sum_{j=1}^{i}(2j-1) \\ &+\sum_{i=1}^{N-2}M(H-i-2)\sum_{j=1}^{i}M(H-N+i-j)\,2j \end{aligned} \tag{1}$$

となる．ただし，$\sum_{i=1}^{-2}\cdot=0$，$\sum_{i=1}^{-1}\cdot=0$，$\sum_{i=1}^{0}\cdot=0$ と定義する．また，$M(h)\,(h=0,1,2,\cdots)$ は，高さ h の完全２分木の頂点数を表す．

深さ $L\,(L=0,1,2,\cdots,N-2)$ の頂点の左部分構造の頂点と右部分構造の頂点を隣接化した場合，深さ L の頂点の子孫同士以外は経路長が短縮されない．このことから，この場合の総頂点間短縮経路長は，高さ $H-L$ の連結ピン型組織構造の，深さ $N-L$ の２頂点のうち，根の左部分構造の頂点と右部分構造の頂点を隣接化した場合と同じとなる．すなわち，深さ L の頂点の左部分構造と右部分構造の頂点を隣接化した場合の総頂点間短縮経路長を $R_H(N,L)$ とすると，

$$R_H(N,L)=S_{1,H-L}(N-L) \tag{2}$$

という関係が成り立つ．

このとき，$R_H(N,L)$ の L に関する差分が，

$$R_H(N,L+1)-R_H(N,L)\;<\;0 \tag{3}$$

であることから，$L=0$ のとき $R_H(N,L)$ が最大となる．すなわち，次の定理１が導ける．

定理 1 高さ H の完全２分木連結ピン型組織構造の同じ深さ N の２頂点間に１辺を追加する場合，根の左部分構造の頂点と右部分構造の頂点を隣接化したときに，総頂点間短縮経路長が最大となる．

(証明略.)

定理１より，総頂点間短縮経路長を最大にする追加辺を求める場合，根の左部分構造と右部分構造の頂点間だけを考えればよい．

式 (1) に

$$M(h)=2^{h+1}-1 \tag{4}$$

を代入して整理すると，次式が得られる．

$$S_{1,H}(N)=(N-1)\,2^{2H-N+2}+2^{H-N+4}-2^{H+3}+4N-4\,. \tag{5}$$

以下では，式 (5) の $S_{1,H}(N)$ を最大にする N を求める．
$S_{1,H}(N)$ の N に関する差分を $\Delta S_{1,H}(N)$ とおくと，

$$\begin{aligned}\Delta S_{1,H}(N) &\equiv S_{1,H}(N+1) - S_{1,H}(N) \\ &= \frac{-N+2}{2^{N-1}} 2^{2H} - \frac{1}{2^{N-3}} 2^{H} + 4\end{aligned} \tag{6}$$

を得る．ただし，$N = 2, 3, \cdots, H-1\,(H = 3, 4, \cdots)$ である．ここで，式 (6) の 2^H を $x = 2^H$ とおくと，実数 x に関する 2 次関数 $T_{1,N}(x)$ が得られる．

$$T_{1.N}(x) = \frac{-N+2}{2^{N-1}} x^2 - \frac{1}{2^{N-3}} x + 4\,. \tag{7}$$

以下では，式 (7) の x^2 の係数が 0 の場合と負の場合に分類して議論する．
(I) $N = 2$ のとき，$\frac{-N+2}{2^{N-1}} = 0$ であるので，$T_{1,N}(x)$ は 1 次関数

$$T_{1,N}(x) = -2x + 4 \tag{8}$$

となる．ここで，式 (8) の x の係数が負であり，かつ

$$T_{1,N}(2^3) = -12 \;<\; 0 \tag{9}$$

であることから，$x \geq 2^3$ のとき $T_{1,N}(x) < 0$ となることがわかる．したがって，$N = 2$ のとき，$H = 3, 4, \cdots$ に対して，$\Delta S_{1,H}(N) < 0$ が成り立つ．
(II) $N = 3, 4, \cdots, H-1$ のときは，$\frac{-N+2}{2^{N-1}} < 0$ より，x^2 の係数は負となる．すなわち，2 次関数 $T_{1,N}(x)$ は上に凸である．このとき，

$$T_{1,N}(2^{N+1}) = -(N-2)2^{N+3} - 12 \;<\; 0\,, \tag{10}$$

$$T'_{1,N}(2^{N+1}) = -8(N-2) - \frac{1}{2^{N-3}} \;<\; 0 \tag{11}$$

であることから，$x \geq 2^{N+1}$ のとき $T_{1,N}(x) < 0$ となることがわかる．したがって，$H \geq N+1$，すなわち $N = 3, 4, \cdots, H-1$ に対して，$\Delta S_{1,H}(N) < 0$ が成り立つ．
以上の解析結果より，次の定理 2 が得られる．

定理 2 高さ H の完全 2 分木連結ピン組織構造の同じ深さ N の 2 頂点間に 1 辺を追加するとき，総頂点間短縮経路長を最大にする追加辺深さは $N^* = 2$ である．

(証明略.)

3．深さ同一全頂点間への辺追加

ここでは，2. と同様に高さ $H\,(H = 2, 3, \cdots)$ の完全 2 分木の全兄弟が隣接化された連結ピン型組織構造を対象とし，同じ深さ $N\,(N = 2, 3, \cdots, H)$ の全頂点間に辺を追加した場合に，総頂点間短縮経路長を最大にする追加辺深さを求める．
この場合の総頂点間短縮経路長 $S_{2,H}(N)$ は

$$\begin{aligned}S_{2,H}(N) &= \{M(H-N)\}^2 2^N \sum_{i=1}^{N-1} i \cdot 2^i + M(H-N) 2^{N+1} \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=1}^{i} j \cdot 2^j \\ &\quad + 2^N \sum_{i=1}^{N-3} \sum_{j=1}^{i} j(i-j+1)\, 2^j\end{aligned} \tag{12}$$

と定式化される．ただし，$\sum_{i=1}^{-2} \cdot = 0$，$\sum_{i=1}^{-1} \cdot = 0$，$\sum_{i=1}^{0} \cdot = 0$ と定義する．ここでも，$M(h)\,(h = 0,1,2,\cdots)$ は，高さ h の完全２分木の頂点数を表す．

式 (12) に式 (4) を代入して整理すると，

$$S_{2,H}(N) = 2^{2H-N+3} + (N-2)\,2^{2H+2} - 2^{H+N+3} + (N+1)\,2^{H+3} + N(N-1)\,2^N \tag{13}$$

が得られる．

ここで，$S_{2,H}(N)$ の N に関する差分 $\Delta S_{2,H}(N)$ は

$$\begin{aligned} \Delta S_{2,H}(N) &\equiv S_{2,H}(N+1) - S_{2,H}(N) \\ &= \left(-\frac{1}{2^{N-2}} + 4\right) 2^{2H} + \left(-2^{N+3} + 8\right) 2^H + N(N+3)\,2^N \end{aligned} \tag{14}$$

となる．ただし，$N = 2,3,\cdots,H-1\,(H = 3,4,\cdots)$ である．ここで，式 (14) の 2^H を $x = 2^H$ とおくと，実数 x に関する２次関数 $T_{2,N}(x)$ が得られる．

$$T_{2,N}(x) = \left(-\frac{1}{2^{N-2}} + 4\right) x^2 + \left(-2^{N+3} + 8\right) x + N(N+3)\,2^N \ . \tag{15}$$

このとき，$-\frac{4}{2^N} + 4 > 0$ より，$T_{2,N}(x)$ が下に凸であり，さらに

$$T_{2,N}(2^{N+1}) = N(N+3)2^N > 0, \tag{16}$$

$$T'_{2,N}(2^{N+1}) = 8\left(2^N - 1\right) > 0 \tag{17}$$

であることから，$x \geq 2^{N+1}$ のとき $T_{2,N}(x) > 0$ となることがわかる．したがって，$H \geq N+1$，すなわち $N = 2,3,\cdots,H-1$ に対して，$\Delta S_{2,H}(N) > 0$ が成り立つ．

以上の解析結果より，次の定理３が得られる．

定理 3 高さ H の完全２分木連結ピン組織構造の同じ深さ N の全頂点間に辺を追加するとき，総頂点間短縮経路長を最大にする追加辺深さは $N^* = H$ である．

(証明略.)

参考文献

[1] R. Likert and J. G. Likert, *New Ways of Managing Conflict*, McGraw-Hill, 1976. / 三隅二不二監訳, コンフリクトの行動科学 — 対立管理の新しいアプローチ —, ダイヤモンド社, 1988.

[2] 宇野 斉, “組織内コミュニケーション・パスの追加効果について”, 組織科学, Vol.27, No.2, pp.73–86, 1993.

[3] 澤田 清, 宇野 斉, “完全２分木型組織構造への関係追加モデル”, 日本応用数理学会論文誌, (投稿中).

[4] 浅野孝夫, 情報の構造［上］, 日本評論社, 1994.