

Trefftz 型境界要素法による自由表面波のシミュレーションについて

北 英 輔† 池 田 洋 一†† 神 谷 紀 生†

スロッシング現象と呼ばれる自由表面波動現象のシミュレーションに Trefftz 型境界要素法を適用する方法について述べる。支配方程式は速度ポテンシャルに関するラプラス方程式で与えられるので、これを適切な境界条件下で解いて、液体表面での流体の速度分布を決定し、これに基づいて各タイムステップ毎に液体表面を移動させる。このシミュレーションで大切な点の一つは、表面での流体速度成分を精度良く評価することであり、本研究ではこの目的に Trefftz 型境界要素法を用いる。最終的に、提案する方法は矩形容器内の流体シミュレーションに適用される。

SIMULATION OF FREE SURFACE WAVE USING TREFFTZ-TYPE BOUNDARY ELEMENT METHOD

EISUKE KITA ,† YOICHI IKEDA †† and NORIO KAMIYA†

This paper describes the application of the Trefftz-type boundary element method to the simulation of the sloshing phenomenon. The phenomenon can be modeled as the initial and the boundary values problem of the Laplace equation with respect to the velocity potential. The governing equation is firstly solved with the boundary conditions to determine the velocity components on the fluid surface. The surface is moved according to the velocity at each time step. One of the most important part of this simulation is to accurately estimate the velocity components on the surface. The Trefftz-type boundary element method is applied for this analysis. Finally, the present scheme is applied to the simulation of the sloshing phenomenon on the fluid in a rectangular vessel.

1. はじめに

液体を入れた容器に水平方向加重を与えて加振すると、液体表面に波が生じる。この現象をスロッシング現象という。同様の現象は、原油を満載して航行しているタンカーの原油タンクや地震で震動を受ける原子炉の容器内でも見られる。原油を満載したタンカーでこの現象が生じると、波頭がぶつかるときの衝撃力により原油容器が破壊される可能性がある。さらに、地震により原子炉容器でこの現象が生じると、容器内の冷却水が漏れて周辺環境に大きな影響を与える可能性がある。これらのことから、スロッシング現象の解析が熱心に行われている。

液体が非圧縮・非粘性で渦無しの流れであると仮定すると、スロッシング現象の支配方程式は速度ポテンシャルに関するラプラス方程式で与えられる。この支

配方程式を適切な境界条件の下で解き、解析領域全体についての速度ポテンシャル分布を求める。それから、液面における速度ポテンシャルの導関数を求め、これにより液面形状と液面での境界条件値を更新する。上記のプロセスを繰り返すことにより、液面上の波形をシミュレートすることができる。

これまで、この現象の解析には有限要素法や境界要素法などが適用されてきたが、それぞれに問題点を有している^{1)~5)}。まず、有限要素法は非常に強力な数値解析法であるが、スロッシング現象のシミュレーションに適用する場合、解析領域の変動に伴って有限要素メッシュがゆがんで計算精度が低下する可能性がある。形状変更ごとにメッシュを再構成する必要がある。最近の自動メッシュ生成技術の進歩により、メッシュ生成はかなり容易となっているが、自動メッシュ生成にかかる計算コストは比較的大きい。これに対して、境界要素法では解析対象の境界要素分割だけで問題を解析できるので、形状変更ごとにメッシュを再構成するための計算コストは有限要素法に比べて小さくなる。しかし、境界要素法では別の問題が生じる。スロッシング現象のシミュレーションでは、水面

† 名古屋大学情報文化学部
School of Informatics & Sciences, Nagoya University

†† 大同工業大学
Department of Mechanical Engineering, Daidoh Institute of Technology

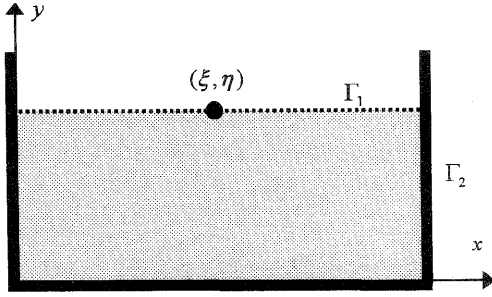


図1 矩形容器内の液体
Fig. 1 Liquid in vessel

の変動を表現するために水面での速度成分を評価しなければならないが、境界要素法ではこの操作が複雑となることである。つまり、境界要素法では定式化に基本解を用いるが、基本解は特異性を有する関数であるため導かれた境界積分方程式も特異性を有する。そこで、境界積分方程式から境界上でのポテンシャル導関数に関する関係式を導くと、その方程式は高次の特異性を有することとなり、通常の定式化では評価が困難である。そこで、これらの問題を改善するために、本研究では Trefftz 法の利用を提案する。Trefftz 法は、T-complete 関数と呼ばれる非特異な関数を用いた境界型数値解析法である。まず、境界要素法と同じく Trefftz 法は境界型解法なので、有限要素法と比較すると解析対象の形状変更によりメッシュがゆがんで精度が低下する可能性は少ない。また、速度ポテンシャルは T-complete 関数の線形結合で近似されるので、これを座標系について直接微分することで液面での速度ポテンシャルの導関数を直接評価できる。

以上のような観点から、本研究では Trefftz 法に基づくスロッシング現象のシミュレーション・プログラムを開発し、矩形容器内の液体に生じるスロッシング現象のシミュレーションに適用する。続いて、プログラムを改良して孤立波の解析に適用した結果についても述べる。

2. スロッシング現象のシミュレーション

2.1 初期値境界値問題

矩形容器内に満たされた液体の液面に図1のように座標系 $\xi-\eta$ を考える。液体領域を Ω 、液体の自由表面境界を Γ_1 、液体の壁境界を Γ_2 とする。液体は非粘性・非圧縮流体であるとし、渦なし流れであると考えられる。このような流れの場に対しては速度ポテンシャル $u(x, y, t)$ が存在する。このとき、スロッシング現象についての初期値・境界値問題は次式で与えられる。

境界値問題

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 & (\text{in } \Omega) \\ u &= \bar{u} & (\text{on } \Gamma_1) \\ \partial u / \partial n &= q = 0 & (\text{on } \Gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

初期値問題

$$\left. \begin{aligned} Du/Dt &= \frac{1}{2} \nabla u \cdot \nabla u - g\xi + A(t)\eta \\ D\xi/Dt &= \partial u / \partial x \\ D\eta/Dt &= \partial u / \partial y \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

2.2 境界値問題の解法

本研究では、式(1)で与えられた境界値問題を解くために Trefftz 型境界要素法を適用する。Trefftz 法では、支配方程式を満足する正則な T-complete 関数を用いて解析を行う。

2次元ラプラス方程式に対する T-complete 関数 u_j^* は次式で与えられる⁶⁾。

$$\begin{aligned} u^* &= \{u_1^*, \dots, u_{2\mu}^*, u_{2\mu+1}^*, \dots\}^T \\ &= \{1, \dots, \Re[r^\mu e^{j\mu\theta}], \Im[r^\mu e^{j\mu\theta}], \dots\}^T \end{aligned} \quad (3)$$

ここで (r, θ) は平面極座標であり、 μ は正の整数である。また $j = \sqrt{-1}$ であり、 \Re, \Im は複素関数の実部と虚部を示す。

式(3)を用いて、ポテンシャル u を次式で近似する。

$$u \simeq \bar{u} = a_1 u_1^* + a_2 u_2^* + \dots + a_N u_N^* = \mathbf{a}^T \mathbf{u}^* \quad (4)$$

ここで、 \mathbf{u}^* 、 \mathbf{a} はそれぞれ T-complete 関数ベクトルと未知係数ベクトルを示し、 N はそれらの総数である。つまり、

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \{u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*\}^T \\ \mathbf{a} &= \{a_1, a_2, \dots, a_N\}^T \end{aligned}$$

式(4)を境界の法線方向に偏微分すれば境界でのフラックスの近似式を得る。

$$\begin{aligned} q \simeq \bar{q} &\equiv \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = a_1 q_1^* + a_2 q_2^* + \dots + a_N q_N^* \\ &= \mathbf{a}^T \mathbf{q}^* \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 \mathbf{q}^* はポテンシャルについての T-coccomplete 関数の境界法線方向導関数を示す。

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^* &= \{q_1^*, \dots, q_{2\mu}^*, q_{2\mu+1}^*, \dots\}^T \\ &= \{0, \dots, \Re[\mu r^{\mu-1} e^{j\mu\theta} (r_n + jr\theta_n)], \\ &\quad \Im[\mu r^{\mu-1} e^{j\mu\theta} (r_n + jr\theta_n)], \dots\}^T \end{aligned} \quad (6)$$

ここで r_n, θ_n は次式で定義される。

$$r_n \equiv \frac{\partial r}{\partial n}, \quad \theta_n \equiv \frac{\partial \theta}{\partial n} \quad (7)$$

T-complete 関数は支配方程式を満足するように決定されているので、式(4)と(5)は支配方程式を満足している。しかし、境界条件式は満足していないので、これらを境界条件式に代入すると残差が生じる。

つまり、

$$\left. \begin{aligned} R_1 &\equiv \bar{u} - \bar{u} \neq 0 \text{ on } \Gamma_1 \\ R_2 &\equiv \bar{q} - \bar{q} \neq 0 \text{ on } \Gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式(8)に含まれる未知係数を決定するために、本研究では選点法を用いる。選点法による定式化では、境界上にとった選点 P_i で式(8)の残差を0とおく。つまり、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}^T \mathbf{u}^*(P_i) &= \bar{u}(P_i) \quad (P_i \in \Gamma_1) \\ \mathbf{a}^T \mathbf{q}^*(P_i) &= \bar{q}(P_i) \quad (P_i \in \Gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

これをマトリックス表示すると、

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (10)$$

2.3 初期値問題の解法

初期値問題を解くために、本研究では最も単純な Euler 法を用いることにする。この場合、時間ステップ幅を Δt とすれば、 k 時間ステップの値より、 $k+1$ 時間ステップでの値は次式から計算される。

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \Delta t \left[\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}^k \cdot \nabla \mathbf{u}^k - g \xi^k + A(t) \eta^k \right] \quad (11)$$

$$\xi^{k+1} = \xi^k + \Delta t (\partial \mathbf{u} / \partial x)^k \quad (12)$$

$$\eta^{k+1} = \eta^k + \Delta t (\partial \mathbf{u} / \partial y)^k \quad (13)$$

ここで、上添え字は時間ステップを示す。

上式を適用するためには、右辺に含まれるポテンシャルの導関数 $\partial \mathbf{u} / \partial x, \partial \mathbf{u} / \partial y$ を評価する必要がある。通常の境界要素法では、境界上で導関数 $\partial \mathbf{u} / \partial x, \partial \mathbf{u} / \partial y$ を評価する操作が面倒である。これに対して、Treffitz 法では式(4)から直接評価できる。つまり、式(4)を x, y について微分すると次式を得る。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{a}^T \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = \mathbf{a}^T \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial y} \quad (14)$$

これらを式(12)や(13)へ代入することで ξ, η を更新する。

3. 解析例

3.1 スロッシング現象の解析例

図2に示すような幅 $L=0.9(\text{m})$ の2次元の矩形容器に高さ $H=0.6(\text{m})$ のところまで液体を満たして水平加振を与える。振幅 d と加振加速度 ω とすると、2次元容器の水平加振加速度 $A(t)$ は次式で与えられる。

$$A(t) = d\omega^2 \sin(\omega t) \quad (t \geq 0) \quad (15)$$

ここで、 $d = 2.0 \times 10^{-3}(\text{m}), \omega = 5.5(\text{rad/sec})$ としシミュレーションする。

解析には T-complete 関数を41個、境界選点を100個用いる。初期選点配置を図3に示す。境界選点は境

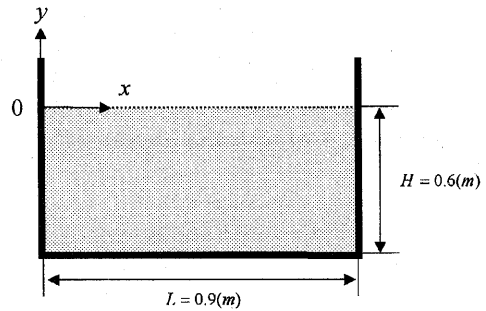


図2 解析対象
Fig. 2 Object under consideration

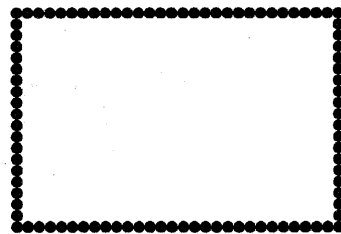


図3 初期選点配置
Fig. 3 Initial placement of collocation points

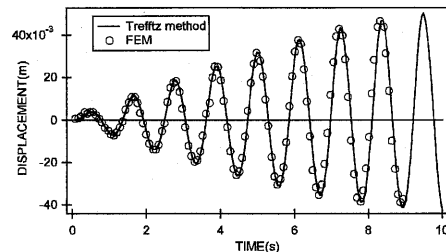


図4 有限要素解との比較
Fig. 4 Comparison with finite element solutions

界上に均等に配置し、かどにあたるには2重選点を配置する。2重選点では、同一座標の点に2つの選点が配置されており、それらで異なる法線ベクトルが定義される。時間積分スキームにはオイラー法を採用し、自由表面上の選点は毎回均等になるように再配置する。時間積分のタイムステップを $\Delta t = 0.0001$ としたときの解析結果を有限要素法による結果⁵⁾と比較したものを図4に示す。この結果より、本研究で得られた結果は有限要素法による結果とよく一致していることがわかる。

3.2 孤立波シミュレーションへの適用

ここでは、図5に示されるように左側の壁が造波

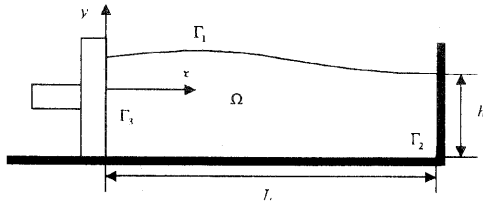


図5 解析対象
Fig. 5 Object under consideration

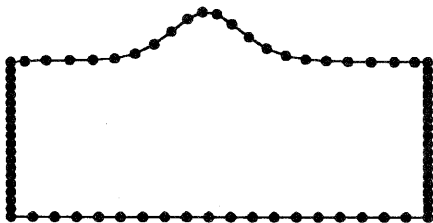


図6 初期選点配置
Fig. 6 Initial placement of collocation points

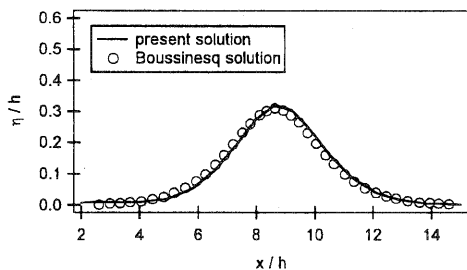


図7 理論解との比較
Fig. 7 Comparison with theoretical solutions

装置によって水平方向に移動する場合に生じる孤立波のシミュレーションを考える。スロッシング現象のシミュレーション・プログラムを少し改良するだけで、この問題を容易に解析することができる。

この問題に対する初期値問題の関係式はスロッシング現象と同一であり、境界値問題の関係式は以下のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 && (\text{in } \Omega) \\ u &= \bar{u} && (\text{on } \Gamma_1) \\ \partial u / \partial n &= 0 && (\text{on } \Gamma_2) \\ \partial u / \partial n &= -\frac{dX_p}{dt} && (\text{on } \Gamma_3) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここで $X_p(t)$ はピストンの水平変位を表す関数である。 X_0 をピストンの半行程、 T をピストンの停止させる時間、 ω と t_c を造波板の運動を特徴づけるパラメーターとして、 $X_p(t)$ を次のように与える。

$$X_p = X_0 \tanh[\omega(t - t_c)] \quad (0 \leq t \leq T) \quad (17)$$

ここでは、孤立波伝播シミュレーションの解析例として矩形水槽 ($L/h = 18.0$) において、 $X_0/h = 0.6$, $\omega\sqrt{h/g} = 0.5$, $t_c\sqrt{g/h} = 5.0$, $T\sqrt{g/h} = 12.0$ の造波を与える場合のシミュレーションについて考える。選点を境界上に103個配置し、45個の T-complete 関数を解析に用いる。選点配置を図6に示す。タイムステップは $\Delta t = 0.5$ とし、毎時間ステップ毎に平滑化を行う。以上のような条件でシミュレーションを行い、 $t_c\sqrt{g/h} = 13.0$ で得られた孤立波の形状とブジュネスクの理論解との比較を図7に示す。この結果から、本シミュレーションで得られた波形の形状は理論解とほぼ一致することがわかる。

4. 結 言

本研究では、2次元容器内のスロッシング現象のシミュレーションに Trefftz 法を適用した。プログラムを開発し、そのシミュレーション結果を有限要素法による結果と比較・検討した。その結果、提案した方法によって得られた2次元矩形容器内の液体に関するスロッシング現象のシミュレーション結果は、有限要素法による結果とよく一致した。また、開発したプログラムを改良して孤立波のシミュレーションに適用したところ、得られた結果は理論解とよく一致したので、スロッシング現象のシミュレーションに Trefftz 法を適用することの可能性が確認された。

参 考 文 献

- 1) 数値流体力学編集委員会 (編). 移動境界流れ解析. 東大出版会, 1995.
- 2) J. W. Dold and D. H. Peregrine. Steep unsteady water waves - an efficient computational scheme. In *Proc. 19th Coastal Eng. Conf.*, Vol. 1, pp. 955-967, 1984.
- 3) T. Nakayama. A computational method for simulating transient motions of an incompressible inviscid fluid with a free-surface. *International Journal of Numerical Methods in Fluid*, Vol. 10, pp. 683-695, 1990.
- 4) 川端久善, 杉野隆三郎, 登坂宣好. 境界要素法による容器内のスロッシング現象の近似解析. 境界要素法論文集, Vol. 6, pp. 167-172, 1989.
- 5) K. Wasizuz, T. Nakayama, M. Ikegawa, Y. Tanaka, and T. Adachi. *Some Finite Element for Techniques Analysis of Nonlinear Sloshing Problem*, chapter 5, pp. 357-376. John Wiley & Sons Ltd., 1984.
- 6) I. Herrera. *Boundary Methods: An Algebraic Theory*. Pitman, 1984.