

## 1次元固定半径ランダムグラフの連結性に対する閉じた解

能代 愛† 栗原 正 仁†

本論文では、ランダムグラフモデルの1つである固定半径モデル (Fixed Radius Model: FRM)  $G = G(n, R)$  の連結性について解析する。このモデルは、アドホックネットワークと呼ばれる無線ネットワークと明確な関係があることから近年注目を集めている。このモデルによって定義されるランダムグラフは、何らかの分布に従ってユークリッド空間上にランダムに配置された  $n$  個の頂点と、隣り合う頂点間の距離がある半径  $R$  以内であればその頂点間に生成される辺によって構成される。したがって、このモデルは、全ての移動端末が距離  $R$  以内にある他の端末と通信できる無線ネットワークの数理モデルとして自然に考えることができる。

具体的には、固定半径モデルによって定義されるランダムグラフが連結グラフである確率に関して、1次元空間に一定数の頂点が一様分布する条件の下で、解析解を示す。同様の問題について再帰的な形式によって表現された結果は、著者らによってすでに示されている。本論文では、再帰的式によって表現された結果について閉じた解を示す。

## Closed Form Solutions on Connectedness of One-Dimensional Fixed Radius Random Graphs

AI NOSHIRO† and MASAHITO KURIHARA†

We consider the connectivity of graphs defined by the Fixed Radius Model  $G = G(n, R)$ . The model has a clear relationship with state-of-the-art wireless communication networks, often called ad-hoc networks. In this model, each random graph is defined by  $n$  nodes placed in a Euclidean plane randomly according to some distribution; each pair of nodes is connected by an edge if and only if the distance between the nodes is within the common radius  $R$ . Hence the model can be naturally interpreted as a mathematical model of wireless communication networks in which every mobile node can communicate with other nodes within the distance  $R$ .

In this paper, we present some analytical results concerning the probability that such random graphs are connected, assuming that the fixed number of nodes are distributed in one-dimensional space according to the uniform distribution. Related results have been obtained in our previous paper only implicitly in the form of recursive equations. On the other hand, the results of this paper are significant in that they are closed form solutions of the recursive equations.

### 1. はじめに

近年、ランダムグラフモデルの1つである固定半径モデル (Fixed Radius Model: FRM)  $G = G(n, R)$  が、アドホックネットワークと呼ばれる無線ネットワークと明確な関係があることから注目を集めている。このモデルによって定義されるランダムグラフは、何らかの分布に従ってユークリッド空間上にランダムに配置された  $n$  個の頂点と、隣り合う頂点間の距離がある半径  $R$  以内であればその頂点間に生成される辺によって構成される。したがって、このモデルは、全ての移動端末が距離  $R$  以内にある他の端末と通信できる無線ネットワークの数理モデルとして自然に考えることができる。

本論文では、グラフの連結性に関して FRM を解析の対象とし、1次元空間に頂点が一様分布するグラフ

について考える。これらの仮定の下で、FRM によって定義されるランダムグラフが連結グラフである確率を求めることを目的とする。この結果は、1次元空間として考えられる長い直線道路や川などの領域において使うことができる。また、2次元モデルの特殊な場合としてその解析に対する1つの知見になり得る。実際には、2種類の FRM、固定端 FRM と自由端 FRM について解析解を示す。前者は、区間の両端に常に頂点が存在するモデルであり、後者はその条件を無視したモデルである。

著者らは、すでに固定端 FRM と自由端 FRM によって定義されるランダムグラフが連結グラフとなる確率について求めている<sup>1)</sup>。しかし、それらの結果は再帰的な形式によって表現されているため、本論文では、それらの閉じた解を示す。

### 2. 固定端 FRM

#### 2.1 モデル

長さ  $t$  ( $t > 0$ ) の区間を  $I = [0, t] = \{x | 0 \leq x \leq t\}$

† 北海道大学 大学院情報科学研究科  
Graduate School of Information Science and Technology,  
Hokkaido University

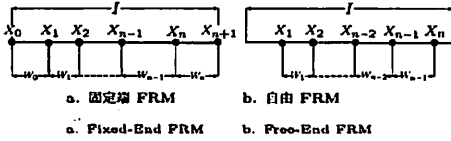


図1 モデル  
Fig. 1 Model

とする。固定端 FRM では、区間  $I$  の内部 ( $0 < x < t$ ) に  $n$  個の頂点が一様分布しており、区間の両端にそれぞれ 1 つの頂点が配置される。したがって、グラフ全体の頂点数は  $n + 2$  となる。各頂点の位置  $X$  を一様分布に従う確率変数とすると、以下の式を得る。

$$P_R\{X \leq x\} = \frac{x}{t} \quad (0 \leq x \leq t). \quad (1)$$

配置された頂点の位置を左から  $X_0, X_1, \dots, X_{n+1}$  とする (図 1a)。また、 $X_i$  の位置にある頂点を  $X_i$  という名称で呼ぶことにする。

前節で述べたように、以下では固定された距離  $R$  以内となるすべての頂点間に辺を生成するランダムグラフについて定義する。隣り合う 2 つの頂点  $X_i$  と  $X_{i+1}$  の頂点間距離を  $W_i$  とする。

$$W_i = X_{i+1} - X_i \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (2)$$

すべての頂点間距離  $W_0, \dots, W_n$  の最大値を  $W$  とする。

$$W = \max\{W_i | 0 \leq i \leq n\}. \quad (3)$$

すべての隣り合う頂点間に辺が存在すればそのグラフは連結グラフであるので、 $W \leq R$  のとき、ランダムグラフが連結グラフとなるのは明らかである。つまり、頂点  $X_0$  が頂点  $X_{n+1}$  と接続する確率  $P_n(t)$  は、 $W \leq R$  である確率と等しい。

$$P_n(t) = P_R\{W \leq R\}. \quad (4)$$

式 (4) の右辺は  $R$  をパラメータとする  $W$  の分布関数として表されているが、以下では  $R$  を固定し、 $n$  と  $t$  を可変にして再帰的な関係式を導出するので、左辺のように表記する。

以下の解析では、頂点間距離が  $t$  の隣り合う 2 頂点間に辺が存在する確率を  $r(t)$  で表す。 $r(t)$  は以下のように簡単に表現できる。

$$r(t) = \begin{cases} 1 & (t \leq R) \\ 0 & (t > R). \end{cases} \quad (5)$$

## 2.2 再帰的表現

以下では、頂点  $X_0$  が頂点  $X_{n+1}$  と接続する確率  $P_n(t)$  を満たす再帰式を導出する。まず再帰式の基本となる 2 つの場合について示す。

$n = 0$  のとき、すなわち区間  $I$  の両端にしか頂点が存在しない場合、 $P_0(t)$  が以下ようになるのは自明である。

$$P_0(t) = r(t) = \begin{cases} 1 & (t \leq R) \\ 0 & (t > R). \end{cases} \quad (6)$$

また  $n \geq 1$  かつ  $t \leq R$  のとき、以下の式が成り立つ。

$$P_n(t) = 1 \quad (t \leq R). \quad (7)$$

以下では、 $n \geq 1$  かつ  $R < t$  の場合について考える。まず、 $X_n \leq x$  であるときの  $X_n$  の分布関数について考える。 $X_n \leq x$  であることは、 $X_1, \dots, X_n$  の  $n$  個すべての頂点が  $I$  内の区間  $Z = \{q | 0 \leq q \leq x\}$  内に存在することを意味するので、 $X_n$  の分布関数は以下のように表せる。

$$F_n(x) = P_R\{X_n \leq x\} = \left(\frac{x}{t}\right)^n. \quad (8)$$

式 (8) を微分することによって、 $X_n$  の確率密度関数  $f_n(x)$  が以下のように求められる。

$$f_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{t^n}. \quad (9)$$

$X_n = x$  という条件の下で、 $X_0$  と  $X_n$  が連結である確率は  $P_{n-1}(x)$ 、 $X_n$  と  $X_{n+1}$  が連結である確率は  $P_0(t-x)$  で表される。 $P_0(t-x)$  は  $X_n$  と  $X_{n+1}$  が辺で結ばれている確率なので、 $P_0(t-x) = r(t-x)$  と見なすことができる。したがって、 $X_0$  と  $X_{n+1}$  が連結である確率を以下のような再帰的な式で表せる。

$$P_n(t) = \int_0^t P_{n-1}(x)r(t-x)\frac{nx^{n-1}}{t^n}dx. \quad (10)$$

式 (10) の両辺に  $\frac{t^n}{n!}$  をかけると、

$$\frac{t^n}{n!}P_n(t) = \int_0^t P_{n-1}(x)r(t-x)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}dx. \quad (11)$$

ここで次のような関数を導入し、

$$\hat{p}_n(t) = \frac{t^n}{n!}P_n(t) \quad (12)$$

式 (11) を以下のように書き換える。

$$\hat{p}_n(t) = \int_0^t \hat{p}_{n-1}(x)r(t-x)dx. \quad (13)$$

式 (13) より、 $\hat{p}_n(t)$  が  $\hat{p}_{n-1}(t)$  と  $r(t)$  のたたみこみとして表されていることがわかる。この式は、式 (6)、(7) (以下で式 (14)、(15) にそれぞれ書き換えられる) とともに、 $\hat{p}_n(t)$  を満たす再帰式を形成する。

$$\hat{p}_0(t) = P_0(t) = r(t). \quad (14)$$

$$\hat{p}_n(t) = \frac{t^n}{n!} \quad (t \leq R). \quad (15)$$

## 2.3 閉じた解

求めた再帰式の閉じた解を求めるために、以下のようにラプラス変換を導入することによって、式 (13) を代数的な演算に置き換えることを考える。

$$\mathcal{L}[\hat{p}_n(t)] = \mathcal{L}[\hat{p}_{n-1}(t)]\mathcal{L}[r(t)]. \quad (16)$$

ここで、 $\mathcal{L}[\hat{p}_n(t)] = \hat{P}_n(s)$ 、 $\mathcal{L}[r(t)] = R(s)$  とすると、式 (16) は次のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{P}_n(s) &= \hat{P}_{n-1}(s)R(s) \\ &= \hat{P}_{n-2}(s)R(s)^2 \\ &\vdots \\ &= \hat{P}_0(s)R(s)^n. \end{aligned} \quad (17)$$

このとき式(14)より  $\hat{P}_0(s) = R(s)$  なので、

$$\hat{P}_n(s) = R(s)^{n+1}. \quad (18)$$

ラプラス逆変換と式(12)より、もともと求めたかった  $P_n(t)$  は以下のように得られる。

$$P_n(t) = \frac{n!}{t^n} \mathcal{L}^{-1}[R(s)^{n+1}]. \quad (19)$$

$R(s)$  を計算するために、式(5)で定義された  $r(t)$  をステップ関数として定義する。

$$r(t) = u_0(t) - u_R(t) \quad (20)$$

このとき、

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & (t < c) \\ 1 & (t \geq c). \end{cases} \quad (21)$$

式(20)のラプラス変換は、以下のように求められる。

$$R(s) = \mathcal{L}[r(t)] = \frac{1 - e^{-Rs}}{s}. \quad (22)$$

式(19)を求めるために、 $R(s)^{n+1}$  のラプラス逆変換を計算する必要がある。 $R(s)^{n+1}$  は以下のように二項定理を用いて表すことができる。

$$\begin{aligned} R(s)^{n+1} &= \left( \frac{1 - e^{-Rs}}{s} \right)^{n+1} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-e^{-Rs})^k}{s^{n+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k \frac{e^{-kRs}}{s^{n+1}}. \end{aligned} \quad (23)$$

式(23)より、 $s$  に関する部分、 $e^{-kRs}/s^{n+1}$  のみをラプラス逆変換すればよい。 $t^n$  のラプラス変換が  $n!/s^{n+1}$  であり、 $e^{-as}$  を掛けることは  $t$  軸上を  $a$  だけシフトすることを意味しているので、次のような式を得る。

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^{-1}[R(s)^{n+1}] \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-kRs}}{s^{n+1}}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \frac{(t - kR)^n u_{kR}(t)}{n!}. \end{aligned} \quad (24)$$

この結果を式(19)に代入すると、以下が得られる。

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \frac{n!}{t^n} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \frac{(t - kR)^n u_{kR}(t)}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \left(1 - \frac{kR}{t}\right)^n u_{kR}(t). \end{aligned} \quad (25)$$

$P_n(t)$  が  $n = 2$  のときの例を以下に示す。

$$P_2(t) = \begin{cases} 1 & (t \leq R) \\ -3z^2 + 6z - 2 & (R < t \leq 2R) \\ 9z^2 - 6z + 1 & (2R < t \leq 3R) \\ 0 & (3R < t). \end{cases} \quad (26)$$

このとき、 $z = R/t$  とする。

### 3. 自由端 FRM

#### 3.1 モデル

自由端 FRM は、区間  $I$  の両端に頂点が存在するという条件を除いて、固定端 FRM の定義と同じである。区間  $I$  の両端に頂点が存在しないので、区間内の頂点数は  $n$  個である。

図 1b のように、頂点の位置を左から右へ  $X_1, X_2, \dots, X_n$  とする。また、ここでも  $X_i$  の位置にある頂点を  $X_i$  という名称で呼ぶことにする。

式(3)で定義された  $W$  を用いて、頂点  $X_1$  が頂点  $X_n$  と接続する確率  $Q_n(t)$  を以下に示す。

$$Q_n(t) = P_R\{W \leq R\} (n \geq 2). \quad (27)$$

#### 3.2 解析

2章の結果を用いて、 $Q_n(t)$  を計算する。

左端の頂点  $X_1$  と右端の頂点  $X_n$  がそれぞれ  $x, y$  の位置にあると仮定すると、この自由端 FRM は、長さ  $y - x$  の区間  $[x, y]$  の内部に  $n - 2$  個の頂点が配置された固定端 FRM と等価と考えることができる。したがって、 $Q_n(t)$  を  $P_{n-2}(y - x)$  を用いて以下のように書くことができる。

$$Q_n(t) = \int_0^t \int_0^y P_{n-2}(y - x) f_{1,n}(x, y) dx dy. \quad (28)$$

このとき、 $f_{1,n}(x, y)$  は順序統計量に基づいた  $X_1$  と  $X_n$  の同時確率密度関数を表しており、以下のように表される。

$$f_{1,n}(x, y) = n(n-1)f(x)f(y)(F(y) - F(x))^{n-2}. \quad (29)$$

式(29)を式(28)に代入すると、 $F(x) = x/t$ 、 $f(x) = 1/t$  より、

$$\begin{aligned} Q_n(t) &= \frac{n(n-1)}{t^n} \int_0^t \int_0^y (y-x)^{n-2} P_{n-2}(y-x) dx dy. \end{aligned} \quad (30)$$

式(12)を  $n! \hat{p}_n(t) = t^n P_n(t)$  のように変形し、式(30)に適用すると、

$$Q_n(t) = \frac{n!}{t^n} \int_0^t \int_0^y \hat{p}_{n-2}(y-x) dx dy. \quad (31)$$

ここで、 $w = y - x$  と置き、変数  $x$  の代わりに  $w$  を用いる。

$$\begin{aligned} Q_n(t) &= \frac{n!}{t^n} \int_0^t \int_0^y \hat{p}_{n-2}(w) (-dw) dy \\ &= \frac{n!}{t^n} \int_0^t \int_0^y \hat{p}_{n-2}(w) dw dy. \end{aligned} \quad (32)$$

さらに、和の順序を入れ替えると次のように二重積分を一重積分に変形できる。

$$\begin{aligned}
 Q_n(t) &= \frac{n!}{t^n} \int_0^t \int_w^t \hat{p}_{n-2}(w) dy dw \\
 &= \frac{n!}{t^n} \int_0^t (t-w) \hat{p}_{n-2}(w) dw. \quad (33)
 \end{aligned}$$

式(33)より、 $Q_n(t)$ の積分部分は $\hat{p}_{n-2}(t)$ と $t$ のたたみこみとなっている。

次に $\hat{q}_n(t)$ を以下のように定義する。

$$\hat{q}_n(t) = \frac{t^n}{n!} Q_n(t). \quad (34)$$

このとき、式(33)より、

$$\hat{q}_n(t) = \int_0^t (t-w) \hat{p}_{n-2}(w) dw. \quad (35)$$

閉じた解を得るために、以下のようにラプラス変換を導入することによって、式(35)を代数的な演算に置き換えることを考える。

$$\mathcal{L}[\hat{q}_n(t)] = \mathcal{L}[\hat{p}_{n-2}(t)] \mathcal{L}[t]. \quad (36)$$

$\mathcal{L}[\hat{q}_n(t)] = \hat{Q}_n(s)$ 、 $\mathcal{L}[\hat{p}_{n-2}(t)] = \hat{P}_{n-2}(s)$ と仮定すると、式(18)を用いて、式(36)はさらに以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}
 \hat{Q}_n(s) &= \frac{1}{s^2} \hat{P}_{n-2}(s) \\
 &= \frac{1}{s^2} R(s)^{n-1}. \quad (37)
 \end{aligned}$$

式(37)のラプラス逆変換により、 $Q_n(t)$ は以下のように表される。

$$Q_n(t) = \frac{n!}{t^n} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2} R(s)^{n-1} \right]. \quad (38)$$

式(22)と二項定理より、式(38)のラプラス逆変換の部分は以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{s^2} R(s)^{n-1} &= \frac{(1-e^{-Rs})^{n-1}}{s^{n+1}} \\
 &= \frac{1}{s^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-e^{-Rs})^k \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^k \frac{e^{-kRs}}{s^{n+1}}. \quad (39)
 \end{aligned}$$

上記の式より、 $e^{-kRs}/s^{n+1}$ のラプラス逆変換のみを計算すればよいので、

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2} R(s)^{n-1} \right] \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{e^{-kRs}}{s^{n+1}} \right] \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{(t-kR)^n u_{kR}(t)}{n!}. \quad (40)
 \end{aligned}$$

式(40)を式(38)に代入すると、もともと求めたかった $Q_n(t)$ を以下のように得る。

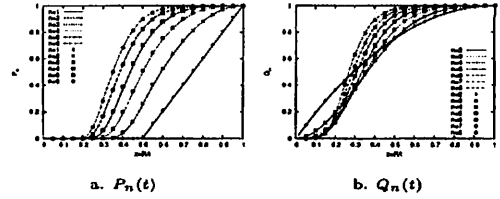


図2 計算結果  
Fig. 2 The Results of evaluation

$$\begin{aligned}
 Q_n(t) &= \frac{n!}{t^n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{(t-kR)^n u_{kR}(t)}{n!} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \left(1 - \frac{kR}{t}\right)^n u_{kR}(t). \quad (41)
 \end{aligned}$$

$n=3$ のときの $Q_n(t)$ の例を示す。以下では、 $z=R/t$ とする。

$$Q_3(t) = \begin{cases} 1 & (t \leq R) \\ 2z^3 - 6z^2 + 6z - 1 & (R < t \leq 2R) \\ 6z^3 - 6z^2 & (2R < t) \end{cases} \quad (42)$$

$P_n(t)$ 、 $Q_n(t)$ について、その正当性を実験的に調べるために、モンテカルロ・シミュレーションにより、それぞれの数値解についても求めた。図2に示したように、点で表されている数値解と線で表されている解析解がどちらの場合もよく一致している。

#### 4. おわりに

本論文では、固定端FRMと自由端FRMによって定義されるランダムグラフが連結グラフである確率の閉じた解を、ラプラス変換を導入することにより求めた。本論文では頂点数 $n$ を固定するという仮定で解析を進めてきたが、この結果を頂点数が可変であるモデルに拡張することは容易にできる。ランダムグラフの区間内の頂点数を示す変数を $N$ とし、 $N=n$ となる確率を $P_r\{N=n\}=p_n$ とすると、このランダムグラフが連結である確率は、頂点が存在しないグラフ( $n=0$ )は連結であると定義した場合、 $\sum_{n=0}^{\infty} p_n Q_n(t)$ として与えられる。

今後の課題として、頂点数が十分に大きい場合の連結性の漸近特性について解析していきたいと考えている。

#### 参考文献

- 1) 能代愛, 吉川毅, 栗原正仁: 1次元空間における固定半径ランダムグラフの連結性の理論解析, 情報処理学会論文誌: 数理モデル化と応用, Vol. 46, pp. 93-102 (2005).