

## ジャンプ拡散過程に基づくオプションのデルタヘッジ

伊藤 翔† 宮崎 浩一†

オプションを用いたリスクヘッジ手法としてデルタヘッジがある。デルタヘッジでは原資産価格過程として一般化ウィナー過程を仮定しているが、一般化ウィナー過程では実際の市場の価格変動を表現するには不十分である。そこで本研究では、資産価格変動をより現実的に表現するために、一般化ウィナー過程にジャンプ成分を加える。このような過程はジャンプ拡散過程と呼ばれる。その代表的なモデルである MJD モデルに原資産価格過程が従う場合に、BS デルタを用いたデルタヘッジを行い、その収益がジャンプパラメータに関してどのような傾向がみられるかを検討する。

### Delta-hedging Strategy in Jump-Diffusion Model

SHO ITO<sup>†</sup> and KOICHI MIYAZAKI<sup>†</sup>

Regarding a risk hedging strategy for options, the delta-hedging strategy is the most popular one. It is usually activated in the Black-Scholes model assuming that the underlying process follows geometric Brownian motion. In this research, we apply the delta-hedging strategy to the case that the underlying asset process follows Jump-Diffusion process and examine distribution of the delta-hedging gain under several parameter settings.

#### 1. はじめに

オプションの価格変動を原資産を用いてヘッジする手法にデルタヘッジがある。デルタヘッジは、通常原資産価格が一般化ウィナー過程によって記述されるものと仮定されており、先行研究 Michael Kamal, Emanuel Derman(1999) では、その過程の下で多数のバスを発生させ、バスごとのデルタヘッジの収益が 0 から乖離することやデルタヘッジ収益の標準偏差について検討している。原資産価格の動きは現実的には一般化ウィナー過程では捉えきれないケースがある。価格の大きな動きをジャンプとして捉え、これを一般化ウィナー過程に加えたジャンプ拡散過程を用いて原資産価格過程をモデル化したものに Merton Jump Diffusion model(以下 MJD モデル) がある。そこで本研究では MJD モデルの下でバスを発生させ、各バスに対し BS デルタでヘッジを行った場合の収益の平均や標準偏差の傾向を検討する。

#### 2. オプションと原資産価格過程

##### 2.1 オプションについて

コールオプションとは所定の期日(満期 T)に原資

産をあらかじめ定められた価格(権利行使価格 K)で買う権利のことであり、原資産  $S$  とはオプションが取引対象とする特定の資産(株式など)である。以下コールオプションをオプションと呼ぶ。オプションの価値は 2 つから構成される。1 つは、本源的価値で  $\max(S_t - K, 0)$  と表せる。但し  $S_t$  は時点  $t$  における原資産価格である。ここで  $S_t > K$  の状態を ITM,  $S_t = K$  の状態を ATM,  $S_t < K$  の状態を OTM という。もう 1 つは、時間的価値であり、満期まで時間があれば原資産価格が変動するために、本源的価値の増加する可能性を表現する価値である。また時間的価値は ATM で最大となり、大きく OTM, ITM になるに連れて時間的価値は減少する。

##### 2.2 原資産価格仮定

原資産リターンが一般化ウィナー過程に従う場合、原資産価格過程は式 (1) で表される。

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma d\tilde{W}_t \quad (1)$$

ここで  $r$  はリスクフリーレート、 $\sigma$  はボラティリティ、 $d\tilde{W}_t$  はリスク中立測度におけるウィナー過程となる。さらに  $rdt$  は原資産リターンのトレンドを表すドリフト項、 $\sigma d\tilde{W}_t$  は変動の大きさを表す確率項である。

本研究で用いる MJD モデルは一般化ウィナー過程にジャンプ成分を加えたものであり

† 電気通信大学システム工学科  
Department of Systems Engineering, The University of  
Electro-Communications

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - \alpha)dt + \sigma_{MJD}d\tilde{W}_t + (\exp(\omega + \eta\epsilon) - 1)d\tilde{N}_t \quad (2)$$

と表現される。\$d\tilde{N}\_t\$ はリスク中立測度の下でインテンシティ(頻度)が \$\lambda\$ のポアソン過程である。\$\exp(\omega + \eta\epsilon)\$ (以下 \$J\$ と置く) はジャンプの幅であり、これはジャンプの幅(ジャンプによる原資産リターン)が平均 \$\omega\$ 分散 \$\eta^2\$ の正規分布に従うことを表している。ドリフト項の \$\alpha\$ は原資産リターン \$\frac{dS\_t}{S\_t}\$ の期待値がリスク中立測度のもとで、無リスク金利となるように加えられたものであり、式(2)の第3項の期待値に相当しジャンプ幅率の期待値とジャンプ回数の期待値の積として算出される。\$\sigma\_{MJD}\$ はMJDモデルにおけるウィナー過程による原資産の連続成分からの変動性を表す。式(2)の確率微分方程式を解けば、時刻 \$t\$ の原資産価格 \$S\_t\$ を用いて時刻 \$t + \Delta t\$ の原資産価格 \$S\_{t+\Delta t}\$ は式(3)のように表せる。

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp \left\{ \left( r - \alpha \frac{\sigma_{MJD}^2}{2} \right) \Delta t + d\tilde{W}_{\Delta t} + \sum_{i=1}^{N_{\Delta t}} \ln(J_i) \right\} \quad (3)$$

ここで \$N\_{\Delta t}\$ は微小時間におけるジャンプの回数、\$J\_i\$ は \$i\$ 回目のジャンプの幅である。式(3)から原資産リターンの確率密度関数 \$f(x)\$ は、

$$f(x) = \left( r - \alpha \frac{\sigma_{MJD}^2}{2} \right) \Delta t + d\tilde{W}_{\Delta t} + \sum_{i=1}^{N_{\Delta t}} \ln(J_i) \quad (4)$$

となる。

また、式(4)の確率密度関数から特性関数(式(5))が得られる。

$$\begin{aligned} \phi_{X_{\Delta t}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(izx) f(x) dx \\ &= \exp \left[ \left\{ r - \frac{\sigma_{MJD}^2}{2} - \lambda \left( \exp \left( \omega + \frac{\eta^2}{2} \right) - 1 \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. \times iz\Delta t - \frac{\sigma_{MJD}^2 z^2}{2} \Delta t \right] \\ &\quad + \exp \left[ \lambda \left\{ \exp \left( iz\omega - \frac{\eta^2 z^2}{2} \right) - 1 \right\} \Delta t \right] \quad (5) \end{aligned}$$

4次までのキュムラント \$K\_i\$ は、特性関数(式(5))から式(6)~式(9)のように求められる。

$$K_1 = \left\{ r - \alpha - \frac{\sigma_{MJD}^2}{2} \right\} + \lambda\omega \quad (6)$$

$$K_2 = \sigma_2 = \sigma_{MJD}^2 + \lambda\eta^2 + \lambda\omega^2 \quad (7)$$

$$K_3 = \lambda\omega(3\eta^2 + \omega^2) \quad (8)$$

$$K_4 = \lambda(3\eta^4 + 6\omega^2\eta^2 + \omega^4) \quad (9)$$

\$K\_1, K\_2\$ はそれぞれ密度関数の平均、分散に相当し、特に \$K\_2\$ における \$\lambda\eta^2 + \lambda\omega^2\$ はジャンプ成分によるボラティリティを表しており、この値が大きいかほどジャンプの影響が大きくなる。

### 3. デルタヘッジ

デルタヘッジとは原資産のみを利用して、オプション価格の確率的な変動をヘッジする手法である。まず、原資産価格過程が一般化ウィナー過程に従う場合のデルタヘッジを示す。原資産価格過程(式(1))に伊藤の公式を適用することで、オプションの微小時間の価値の変化 \$df\$ は

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial S_t} r S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} \sigma S_t d\tilde{W}_t \quad (10)$$

となる。式(10)において不確実な要素は、確率項 \$\frac{\partial f}{\partial S\_t} \sigma S\_t d\tilde{W}\_t\$ である。原資産とオプションを用いてこの不確実の要素(確率項)を無くすような取引(オプション \$f\$ を1単位売却し、原資産を \$\partial f / \partial S\_t\$ (デルタ)単位購入)により無リスクポートフォリオ \$\Pi\$ を作成する。無リスクポートフォリオ \$\Pi\$ の微小時間の価値の変化 \$d\Pi\$ は式(11)となる。無リスクポートフォリオの微小時間の価値の変化 \$df\$ は、リスクフリーレートに等しいことを表現している。

$$d\Pi = - \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt = r\Pi dt \quad (11)$$

式(11)を \$dt\$ に関する恒等式とみなせば、式(12)が得られる

$$\begin{aligned} rf &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + rS_t \frac{\partial f}{\partial S_t} \\ &= -d\Pi + rS_t \frac{\partial f}{\partial S_t} \quad (12) \end{aligned}$$

式(12)はBSMの偏微分方程式であり、式(12)を適切な境界条件の下で解けばオプション \$f\$ の評価式であるBS公式を導出できる。

次に原資産リターンがMJDモデルに従う場合のデルタヘッジについて示す。原資産価格過程がMJDモデルである場合のオプションの微小時間の価値の変化 \$df\$ は、伊藤の公式を用いると式(13)となる。

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial S_t} (r - \alpha) S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma_{MJD}^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} \sigma_{MJD} S_t d\tilde{W}_t + (f(JS_t) - f(S_t)) d\tilde{N}_t \quad (13)$$

通常用いられているBSのデルタ(以下 \$\Delta\_{BS}\$)を用

いてデルタヘッジを行って得られるポートフォリオの価値変化  $d\Pi$  は

$$d\Pi = \left( \Delta_{BS} - \frac{\partial f}{\partial S_t} \right) (r - \alpha) S_t - \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \times \sigma_{MJD}^2 S_t^2 \right) dt + \left( \Delta_{BS} - \frac{\partial f}{\partial S_t} \right) \sigma_{MJD} S_t d\tilde{W}_t + \left( \frac{\partial f}{\partial S_t} (J - 1) S_t - (f(J S_t) - f(S_t)) \right) d\tilde{N}_t \quad (14)$$

となる。式 (14) の 2 項目のドリフト項部分に、MJD モデルにおける偏微分方程式 (15) を代入すると式 (14) で与えた MJD モデルにおけるデルタヘッジポートフォリオの微小時間の価値の変化  $d\Pi$  は、式 (16) のように整理することができる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma_{MJD}^2 S_t^2 = \left( -(r - \alpha) S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} + r f \right) dt - \lambda E[f(J S_t) - f(S_t)] \quad (15)$$

$$d\Pi = r(-f + \Delta_{BS} S_t) dt + \left( \Delta_{BS} - \frac{\partial f}{\partial S_t} \right) \sigma_{MJD} S_t \times d\tilde{W}_t - \lambda (\Delta_{BS} E[J - 1] S_t - E[f(J S_t) - f(S_t)]) \times dt + (\Delta_{BS} (J - 1) S_t - (f(J S_t) - f(S_t))) d\tilde{N}_t \quad (16)$$

式 (16) は一般化ウィナー過程とは異なり、第 2 項以降の確率項が残り完全に確率項が消えない。第 2 項目は BS のデルタと MJD モデルの連続成分のボラティリティから計算されるデルタとの差による確率項である。第 3 項目は原資産とオプションにおけるジャンプ成分による価格の変化の期待値を表しており、第 4 項目は実際ジャンプの有無とジャンプが起こったときのジャンプ幅による原資産とオプションの価格の変化を表している。式 (16) の期待値をとると式 (17) が得られる。

$$E(d\Pi) = r(-f + \Delta_{BS} S_t) dt = r\Pi dt \quad (17)$$

式 (17) において式 (16) の第 2 項目は 0 となり、第 3 項目と第 4 項目は互いに打ち消しあう。そのため期待値は式 (17) の右辺のようになり、これは一般化ウィナー過程の場合に得られる式 (11) の右辺に等しくなる。

#### 4. ヘッジ手順と評価

数値実験の手順と、条件設定は次の通りである。

- (I) 売却するオプションの価格は FFT を用いて導出する。
- (II) 表 1 に示したパラメータ、表 2 に示したボラティリティを合わせた 4 種類のジャンプのパラメータセットで MJD モデルに従う資産のサンプルパスを 1000 本発生させる。
- (III) サンプルパス 1 本ごとにに対しデルタヘッジを行

う。但し原資産のリバランスは 1 日ごとに行うとする。また売買の際の費用はリスクフリーレートで借り入れる。

- (IV) ヘッジ開始時点で売ることのできたオプション価格分のキャッシュをリスクフリーレートで運用したのからリバランスの際の借り入れコストを差し引いた差額を収益として算出する。

表 1 オプション基本パラメータ

$S_0$ 円	$T-t$ 日	$\sigma$ % (日率)	$r$ % (日率)
15000	60	1.26	0.02

表 2 MJD モデルのパラメータ

	$\lambda$	$\omega$	$\eta$	$\sigma_{MJD}$ % (日率)
強ジャンプ	0.32	$\pm 0.008$	0.02	0.34
弱ジャンプ	0.17	$\pm 0.008$	0.02	1.12

#### 5. 実験結果と考察

原資産リターンが一般化ウィナー過程に従う場合、理論的にはデルタヘッジ収益の期待値は 0 となる。また式 (17) からわかるように MJD モデルに従う場合のデルタヘッジ収益の期待値も 0 になる。しかしパス毎にデルタヘッジ収益を見ると通常 0 から乖離する。この乖離の主な原因は 2 つあり、1 つはデルタヘッジのリバランスを不連続に行うために生ずるものであり、もう 1 つはパスにおける実際のジャンプ回数と期待ジャンプ回数の差から生ずるものである。

まず、ジャンプ回数の差とそれに対応するパスにおけるデルタヘッジ収益の平均に注目する。結果は図 1 に示した、パス別に見たとき、式 (16) の第 3 項目と第 4 項目は、実際のジャンプ回数と期待ジャンプ回数と同じであれば打ち消しあう。しかしこれらのジャンプ回数に差があるとき、実際のジャンプ回数が期待ジャンプ回数より多いパスであれば 4 項目が 3 項目より大きくなりやすく、実際のジャンプ回数の少ないパスであれば逆になる。この 3 項目と 4 項目の生み出す差が収益に図 1 に示すような傾向を生み出す。図 1 を見れば、ジャンプ回数が少なくなるとデルタヘッジ収益の平均は正となる傾向が見て取れる。このデルタヘッ

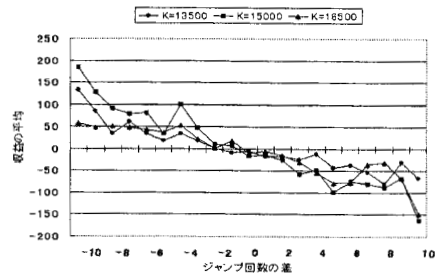


図 1 ジャンプ幅率の期待値が正 (強ジャンプ)

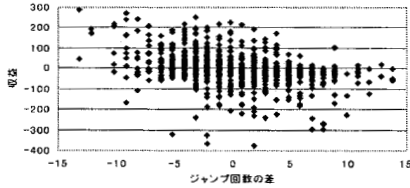


図2 強ジャンプ ITM における収益

ジ収益の傾向は3項目が正となることを意味し不等式  $\Delta_{(BS)} E(J-1)S_t - E(f(JS_t) - f(S_t)) < 0$  が導ける。この不等式からジャンプにおけるオプション価格の変化をヘッジするにはデルタ単位の原資産では足りないことがわかる。このような傾向になる原因はデルタの計算の際に正規分布を用いているのに対し、実際の分布は式(8)、式(9)からわかるように、尖度、歪度が存在しており、これらがヘッジの際に影響している事が予想される。また図は掲載していないが、このような収益の傾向はジャンプ幅の期待値が負の場合、弱ジャンプの場合でも同様である。

次に、デルタヘッジ収益の0からのばらつきに注目する。強ジャンプの場合に、デルタヘッジをパス毎に行いITM オプション、ATM オプション、OTM オプションを対象にしてジャンプ回数の差(実際のジャンプ回数-期待ジャンプ回数)とデルタヘッジ収益との関係をそれぞれ散布図で図2, 3, 4に示した。ATM オプションを対象とした収益の散らばりがOTM(K=16500) オプション、ITM(K=13500) オプションを対象とした場合より大きい。この理由はデルタヘッジを行う際のデルタの変動によるもので、表3の例によると、ATM オプションのデルタに比べITM オプション、OTM オプションのデルタは共にあまり変動しない。デルタに応じて原資産を売買するためITMとOTM オプション共にパスごとの収益はATM オプションに比べ大きく変わらないものと考えられる。このことはITM,OTM オプションは共にATM オプションに比べ標準偏差が小さくなることを意味している。

表3 ATM, ITM,OTM の場合でのデルタ

残存期間(日)	60	45	30	10
原資産価格(円)	15000	15250	15600	15400
ITM デルタ	0.894	0.944	0.986	1
ATM デルタ	0.568	0.634	0.754	0.787
OTM デルタ	0.08	0.07	0.06	0.0009

最後に行使価格ごとにデルタヘッジの標準偏差を図5に示した。図5には原資産価格過程として一般化ウィナー過程を仮定した場合におけるデルタヘッジ収益の標準偏差も併せて示した。先に述べたように権利行使価格が大きくITM, OTM になるに連れて標準偏差

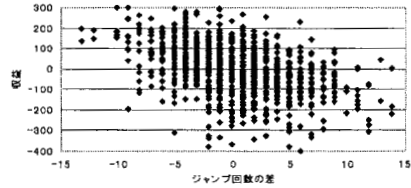


図3 強ジャンプ ATM における収益

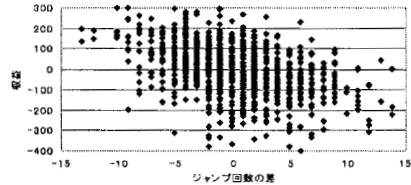


図4 強ジャンプ OTM における収益

が小さくなっている。またジャンプの影響が強いほど標準偏差が大きくなっていることがわかる。この原因はジャンプ回数の差(実際のジャンプ回数-期待ジャンプ回数)と収益の傾向から説明できる。ジャンプ回数差と収益の傾向の関係は先に述べた、ジャンプの影響の強弱を本研究ではインテンシティの大きさで分けているため、ジャンプの影響が強いものほどジャンプ回数の分散が大きくなり、ジャンプ回数差をもつパスが生まれやすくなる。すなわち、ジャンプの影響の強いものは0から乖離したパスを生み出しやすい事を意味し、0からのばらつきが大きくなるのである。

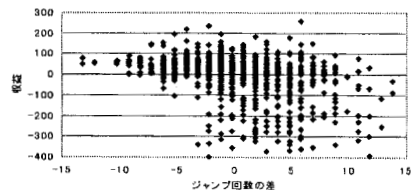


図5 権利行使価格ごとの0からのばらつき

## 6. まとめ

本研究ではジャンプ拡散過程のもとで、BS デルタを用いたデルタヘッジを行ったときの収益に注目した。ジャンプ成分の影響から、ジャンプ回数の差が主な理由となり収益は0から大きく乖離することがわかった。またその結果として標準偏差が大きくなり、このような傾向はインテンシティが強い場合には顕著に表れることもわかった。

## 参考文献

- 1) Michael Kamal and Emanuel Derman: Correcting Black-Scholes, Risk, pp82-85(1999)