総頂点間経路長を最小にするサイクルグラフへの１辺追加

澤田　清†, 中西 朗裕†
† 流通科学大学 情報学部 経営情報学科

概要　本論文では，頂点数 L のサイクルグラフに１辺を追加する場合について，総頂点間経路長を最小にする辺追加位置を求める．辺を追加する２頂点の大きくない方の経路長を M としたとき，総頂点間経路長を最小にする M^* は，L が奇数のとき $M^* = \frac{L-1}{2}$，L が４の倍数のとき $M^* = \frac{L}{2}$，L が４の倍数でない偶数のとき $M^* = \frac{L}{2} - 1$ となった．

Adding an Edge to a Cycle Graph Minimizing Total Path Length

Kiyoshi Sawada† and Akihiro Nakanishi†
† Department of Information and Management Science, Faculty of Information Science, University of Marketing and Distribution Sciences

Abstract　This paper proposes a problem of adding an edge to a cycle graph with L nodes. When M indicates the shortest path length before adding the edge between two nodes which are incident with the additional edge, the optimal M^* is obtained by minimizing the total path length which is the sum of shortest path lengths between every pair of all nodes. If L is a odd number, then $M^* = \frac{L-1}{2}$. If L is a multiple of four, then $M^* = \frac{L}{2}$. If L is a even number and is not a multiple of four, then $M^* = \frac{L}{2} - 1$.

1. はじめに

グラフ理論におけるグラフの頂点間に辺を追加する問題 [1, 2, 3] は，通信ネットワークの設計問題，組織内の関係形成問題，都市の道路計画問題などに応用される．グラフに辺を追加する問題の評価尺度はいくつかあるが，全体の効率性を考える場合には，総頂点間経路長を最小にする問題が挙げられる．ここで，グラフにおける総頂点間経路長は，次のように定義される．すなわち，頂点数 n のグラフの２頂点 v_i と v_j $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ の間の最短経路の長さを $l_{i,j}$ とすると（ただし $l_{i,j} = l_{j,i}$，$l_{i,i} = 0$），$\sum_{i<j} l_{i,j}$ が総頂点間経路長を表す．

筆者らは，これまで，グラフの中で特に完全 K 分木を対象とし，総頂点間経路長を最小にする辺の追加位置を求める問題を扱ってきた [4, 5, 6]．完全 K 分木への辺追加問題は，会社などの組織構造内のメンバー間で関係追加を行う場合に，組織全体の情報伝達が最も効率的になるような関係追加位置を求めるという意味合いがある．

本研究では，サイクルグラフ（cycle graph）に１辺を追加する問題を考える．ここでも，総頂点間経路長が最小となるような辺追加位置を求める．ここで，サイクルグラフは，単一のサイクルからなるグラフである [7]．ただし，サイクルは始点と終点のみが同一の頂点でその他の頂点およびすべての辺が異なっている辺の連続である．この問題は，問題自体がシンプルであるため，現実問題にそのまま適用できる状況は少ないが，本研究の結果をより複雑なグラフ構造の辺追加問題に応用できると考えられる．

2. でサイクルグラフの１辺追加問題について総頂点間経路長の定式化を行い，3. で総頂点間経路長を最小にする辺追加位置を求める．

2. 総頂点間経路長の定式化

サイクルグラフへの1辺追加問題は，頂点数 $L\,(L=4,5,\cdots)$ のサイクルグラフに1辺を追加するときに，総頂点間経路長を最小にする追加位置を求める問題である．ここで，サイクルグラフへの1辺追加位置を1つの変数 M で表現する．すなわち，サイクルグラフの各2頂点間の経路は2通りあるが，そのうち大きくない方の経路長が M である頂点間に辺を追加する．ここで，M の範囲は $2 \leq M \leq \left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor$ である．ただし，$\lfloor\cdot\rfloor$ は $\cdot$ を超えない最大の整数を表す．

辺が追加される2頂点を v_1，v_2 とする．サイクルグラフに1辺を追加することにより新たなサイクルが2つできるが，そのうち頂点数 $M+1$ のサイクルに含まれる頂点の集合を V_x，頂点数 $L-M+1$ のサイクルに含まれる頂点の集合を V_y とする．v_1 と v_2 を除く V_x の頂点のうち，v_2 との間の経路長よりも v_1 との間の経路長の方が小さい頂点の集合を $V_{x,1}$，v_1 との間の経路長よりも v_2 との間の経路長の方が小さい頂点の集合を $V_{x,2}$，v_1 との間の経路長と v_2 との間の経路長が等しい頂点を $v_{x,3}$ と書くことにする．ただし，$v_{x,3}$ は，V_x に含まれる頂点数が奇数個のときのみ存在する．また，v_1 と v_2 を除く V_y の頂点のうち，v_2 との間の経路長よりも v_1 との間の経路長の方が小さい頂点の集合を $V_{y,1}$，v_1 との間の経路長よりも v_2 との間の経路長の方が小さい頂点の集合を $V_{y,2}$，v_1 との間の経路長と v_2 との間の経路長が等しい頂点を $v_{y,3}$ と書くことにする．ただし，$v_{y,3}$ は，V_y に含まれる頂点数が奇数個のときのみ存在する．

このとき，V_x 内の頂点間の経路長の総和と V_y 内の頂点間の経路長の総和を加えたものは，

$$A_L(M) = \frac{M+1}{2}\left(\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{M+1}{2}\right\rfloor} i + \sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{M}{2}\right\rfloor} i\right) + \frac{L-M+1}{2}\left(\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{L-M+1}{2}\right\rfloor} i + \sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{L-M}{2}\right\rfloor} i\right) - 1 \tag{1}$$

で与えられる．次に，$V_{x,1}$ と $V_{y,2}$ の頂点間の経路長の総和と，$V_{x,2}$ と $V_{y,1}$ の頂点間の経路長の総和を加えたものは，

$$B_L(M) = \left\lfloor\frac{M-1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{L-M-1}{2}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{M-1}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{L-M-1}{2}\right\rfloor + 4\right) \tag{2}$$

となる．また，$V_{x,1}$ および $v_{x,3}$ と $V_{y,1}$ および $v_{y,3}$ の頂点間の経路長の総和と，$V_{x,2}$ および $v_{x,3}$ と $V_{y,2}$ および $v_{y,3}$ の頂点間の経路長の総和を加えたものは，

$$C_L(M) = \left\lfloor\frac{M}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{L-M}{2}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{M}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{L-M}{2}\right\rfloor + 2\right) \tag{3}$$

で与えられる．ただし，式(3)は，$v_{x,3}$ と $v_{y,3}$ の経路長を2回加えているため，$v_{x,3}$ と $v_{y,3}$ の両方が存在する場合は，$\frac{L}{2}$ を減じる必要がある．$v_{x,3}$ と $v_{y,3}$ の両方が存在するのは，$M+1$ と $L-M+1$ がいずれも奇数の場合，すなわち L，M のいずれも偶数の場合である．

以上より，頂点数 L のサイクルグラフに1辺を追加したときの総頂点間経路長 $S_L(M)$ は，次式のように定式化される．

$$\begin{aligned}
S_L(M) &= A_L(M) + B_L(M) + C_L(M) - t_L(M) \\
&= \frac{M+1}{2}\left(\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{M+1}{2}\right\rfloor} i + \sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{M}{2}\right\rfloor} i\right) + \frac{L-M+1}{2}\left(\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{L-M+1}{2}\right\rfloor} i + \sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{L-M}{2}\right\rfloor} i\right) - 1 \\
&\quad + \left\lfloor\frac{M-1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{L-M-1}{2}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{M-1}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{L-M-1}{2}\right\rfloor + 4\right) \\
&\quad + \left\lfloor\frac{M}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{L-M}{2}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{M}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{L-M}{2}\right\rfloor + 2\right) - t_L(M)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \ & \frac{M+1}{4}\left\{\left\lfloor\frac{M+1}{2}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{M+1}{2}\right\rfloor+1\right)+\left\lfloor\frac{M}{2}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{M}{2}\right\rfloor+1\right)\right\} \\
& +\frac{L-M+1}{4}\left\{\left\lfloor\frac{L-M+1}{2}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{L-M+1}{2}\right\rfloor+1\right)+\left\lfloor\frac{L-M}{2}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{L-M}{2}\right\rfloor+1\right)\right\} \\
& +\left\lfloor\frac{M-1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{L-M-1}{2}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{M-1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{L-M-1}{2}\right\rfloor+4\right) \\
& +\left\lfloor\frac{M}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{L-M}{2}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{M}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{L-M}{2}\right\rfloor+2\right)-t_L(M). \qquad (4)
\end{aligned}
$$

ただし，$t_L(M)$ は

$$
t_L(M)=\begin{cases} \frac{L}{2} & (L\text{ が偶数かつ }M\text{ が偶数の場合}) \\ 0 & (L\text{ が奇数または }M\text{ が奇数の場合}) \end{cases} \qquad (5)
$$

である．

3. 最適辺追加位置

ここでは，総頂点間経路長 $S_L(M)$ を最小にする M^* を求める．L が奇数の場合と偶数の場合の2通りに分けて考える．

まず，L が奇数の場合について考える．ここで，M が奇数のとき $N=M$ とおく．このとき，N は $3\le N\le\frac{L-1}{2}$ の奇数である．また，M が偶数のとき $N=L-M$ とおく．このとき，N は $\frac{L+1}{2}\le N\le L-2$ の奇数である．したがって，L が奇数の場合，式 (4) の M を，$3\le N\le L-2$ の範囲の奇数 N に置き換えて考えることができる．これを $P_L(N)$ と書くことにすると，L，N ともに奇数であることから次式を得る．

$$
P_L(N)=\frac{1}{8}\left\{(L-2)N^2-(L-1)^2N+L^3+L^2-4L+3\right\}. \qquad (6)
$$

ここで，式 (6) の N を $x=N$ とおいて得られる実数 x に関する2次関数を最小にする x^* は $x^*=\frac{(L-1)^2}{2(L-2)}$ である．また，$\frac{L}{2}<\frac{(L-1)^2}{2(L-2)}\le\frac{L}{2}+\frac{1}{4}$ であることから，x^* に最も近い整数は $\frac{L+1}{2}$，2番目に近い整数は $\frac{L-1}{2}$ である．したがって，$\frac{L+1}{2}$ が奇数ならば $N^*=\frac{L+1}{2}$，$\frac{L+1}{2}$ が偶数ならば $N^*=\frac{L-1}{2}$ となる．$3\le N\le\frac{L-1}{2}$ のときは $M=N$，$\frac{L+1}{2}\le N\le L-2$ のときは $M=L-N$ であるので，$M^*=\frac{L-1}{2}$ となる．

次に，L が偶数の場合について考える．L が偶数かつ M が奇数のときの総頂点間経路長を $Q_L(M)$ と書くことにすると，式 (4) より，

$$
Q_L(M)=\frac{1}{8}\left\{(L-2)M^2-L(L-2)M+L^3+L^2-3L+2\right\} \qquad (7)
$$

を得る．ここで，式 (7) の M を $x=M$ とおいて得られる実数 x に関する2次関数を最小にする x^* は $x^*=\frac{L}{2}$ である．したがって，L が偶数かつ M が奇数の場合，L が4の倍数のとき $M^*=\frac{L}{2}-1$，L が4の倍数でないとき $M^*=\frac{L}{2}$ となる．

L が偶数かつ M が偶数のときの総頂点間経路長を $R_L(M)$ と書くことにすると，式 (4) より，

$$
R_L(M)=\frac{1}{8}\left\{(L-2)M^2-L(L-2)M+L^3+L^2-6L+8\right\} \qquad (8)
$$

を得る．ここで，式 (8) の M を $x=M$ とおいて得られる実数 x に関する2次関数を最小にする x^* は $x^*=\frac{L}{2}$ である．したがって，L が偶数かつ M が偶数の場合，L が4の倍数のとき $M^*=\frac{L}{2}$，L が4の倍数でないとき $M^*=\frac{L}{2}-1$ となる．

以上より，L が偶数の場合，次の結果が得られる．L が 4 の倍数のとき，

$$Q_L\left(\frac{L}{2}-1\right)-R_L\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{L-2}{2}>0 \tag{9}$$

より，$M^*=\frac{L}{2}$ である．L が 4 の倍数でないとき，

$$Q_L\left(\frac{L}{2}\right)-R_L\left(\frac{L}{2}-1\right)=\frac{L-2}{4}>0 \tag{10}$$

より，$M^*=\frac{L}{2}-1$ である．

4. おわりに

本研究では，頂点数 L のサイクルグラフに 1 辺を追加する場合について，総頂点間経路長を最小にする辺追加位置を求めた．辺を追加する 2 頂点の大きくない方の経路長を M としたとき，総頂点間経路長を最小にする M^* は，L が奇数のとき $M^*=\frac{L-1}{2}$，L が 4 の倍数のとき $M^*=\frac{L}{2}$，L が 4 の倍数でない偶数のとき $M^*=\frac{L}{2}-1$ となった．

参考文献

[1] N. Alon, A. Gyárfás, M. Ruszinkó: "Decreasing the diameter of bounded degree graphs", *Journal of Graph Theory*, Vol.35, Issue 3 (2000), pp.161–172.

[2] V. Chepoi, Y. Vaxes: "Augmenting trees to meet biconnectivity and diameter constraints", *Algorithmica*, Vol.33, No.2 (2002), pp.243–262.

[3] H. Nagamochi: "Recent development of graph connectivity augmentation algorithms", *IEICE Trans. on Information and Systems*, Vol.E83-D, No.3 (2000), pp.372–383.

[4] 澤田 清: "総頂点間経路長を最小にする完全 2 分木の階層間隣接化", 日本応用数理学会論文誌, Vol.13, No.3 (2003), pp.353–360.

[5] K. Sawada, R. Wilson: "Models of adding relations to an organization structure of a complete K-ary tree", *European Journal of Operational Research*, Vol.174 (2006), pp.1491–1500.

[6] K. Sawada: "A model of adding relations in the two levels to an organization structure of a complete binary tree", *Proc. of Czech-Japan Seminar on Data Analysis and Decision Making under Uncertainty* (2006), pp.298–301.

[7] R. J. Wilson, J. J. Watkins: Graphs: An Introductory Approach, John Wiley & Sons, New York (1990).