

ハイブリッドシステムの高信頼シミュレーションのための 区間に基づく制約伝播手法

石井大輔^{†1} 上田和紀^{†1} 細部博史^{†2}

離散変化と時間に関する連続変化からなるハイブリッドシステムは、物理学をはじめ、さまざまな分野の問題を記述、シミュレーションするためのモデルとして注目を集めている。ハイブリッドシステムのシミュレーションにおいては、連続状態を扱う際に計算誤差が不可避であり、厳密な解軌道を得ることができないという問題がある。

本研究の提案手法では、区間解析に基づく常微分方程式の求解手法と非線形問題のための制約伝播手法を統合することにより、ハイブリッド軌道の高精度かつ完全な区間包囲を効率よく求めることが可能にした。また提案手法を実装するとともに、実験により提案手法の有効性を評価した。

提案手法により、ハイブリッドシステムのシミュレーションを、解の精度を保証しながら高信頼に行うことが可能になる。

An Interval-based Consistency Technique for Reliable Simulation of Hybrid Systems

DAISUKE ISHII,^{†1} KAZUNORI UEDA^{†1} and HIROSHI HOSOBÉ^{†2}

Hybrid systems are systems consisting of discrete changes and continuous changes over time. Problems in various fields such as physics can be modeled as hybrid systems. In a simulation of a hybrid system, it is difficult to obtain rigorous solution of the model because of computation errors in the handling of continuous states.

Our proposed method integrates interval-based techniques for initial value problems for ordinary differential equations and consistency techniques for nonlinear problems. The method obtains accurate and complete interval enclosures of hybrid trajectories efficiently. We implemented the method and evaluate its effectiveness.

Using the method, we can simulate hybrid systems reliably with guaranteeing its accuracy.

1. はじめに

ハイブリッドシステムは、離散変化と時間に関する連続変化からなる系を表す概念である。例として、図1に示すような重力に従って自由落下し、非線形の地面に達すると跳ね返る質点がある。

物理学や制御工学分野などのさまざまな問題をハイブリッドシステムとしてモデリングし、シミュレーションを行うための枠組みが広く利用されている。しかしハイブリッドシステムの連続状態を扱う際には、浮動小数点演算や近似数値計算を用いなければならず、既存システムでは厳密な解軌道を得ることができなかった。ハイブリッドシステムの連続変化を有限状態遷移系に抽象化し、モデルチェックング手法により厳密に

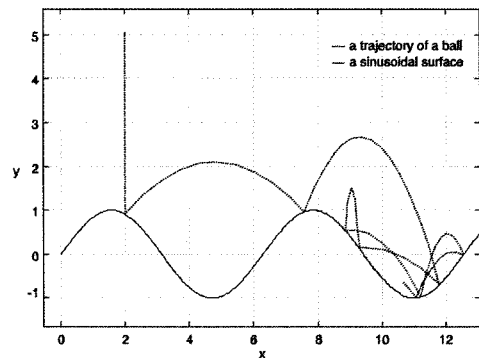


図1 ハイブリッドシステムの例

可到達範囲を求める手法(たとえば HyperTech³⁾がある)が発展しているが、扱える問題が限られており、シミュレーションに応用するには不十分であった⁷⁾。

本研究では、区間解析に基づきハイブリッドシステ

^{†1} 早稲田大学理工学術院
Faculty of Science and Engineering, Waseda University
^{†2} 国立情報学研究所
National Institute of Informatics

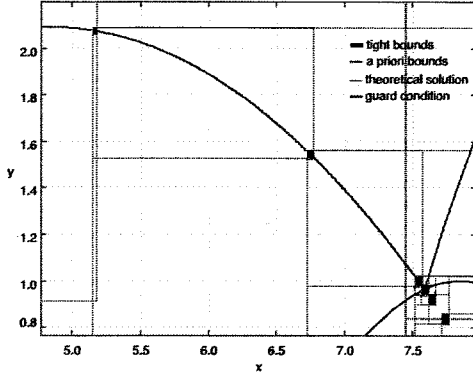


図2 区間解析に基づく高信頼シミュレーション

ムのシミュレーションを行う手法を提案する。図2に提案手法による求解結果の例を示す。区間解析は精度保証付き数値計算とも呼ばれ、真解を計算誤差とともに区間で厳密に包みながら計算を進めていく手法である。我々はこれまでに、ハイブリッドシステムを区間を用いてモデリング、シミュレーションすることが可能なハイブリッド並行制約プログラミング²⁾を拡張し、区間解析に基づいたシミュレーションを行うための手法⁴⁾を示した。また Nedialkov ら⁶⁾は、問題を定数パラメタ切替システムに限定し、区間解析手法および数式処理手法を利用してシミュレーションを厳密に行う手法を提案している。

本研究の貢献は、(1) 上記手法を拡張し、ハイブリッドシステムの区間に基づく解軌道を、制約伝播手法により精度よくかつ効率よく求めるための手法を提案することにある。そのために、(a) 区間に基づく常微分方程式の求解手法⁵⁾を拡張し、連続変化の区間包囲を任意のステップ幅で逐次計算する方法を示すとともに、(b) 非線形問題のための制約伝播手法¹⁾を拡張し、(a)の方法と連携することにより、非線形方程式・不等式に基づく離散変化の判定および連続変化の逐次計算を効率よく行う方法を示す。さらに本研究では、(2) 提案アルゴリズムについて区間解が真解を包囲することを示すとともに、(3) 提案アルゴリズムを実装し、(4) 実験により提案手法の有効性を評価する。

提案手法により、ハイブリッドシステムのシミュレーションを、解の精度を保証しながら、高信頼に行うことが可能になる。また、解軌道の完全かつ高精度な区間包囲を、効率よく求めることが可能になる。

2. 準備

区間 $I = [l, u]$ は $\{r \in \mathbf{R} \mid l \leq r \leq u\}$ のような実数の集合である ($l, u \in \mathbf{F}$ は浮動小数点数)。 I により区間の集合を表す。また $\mathbf{box} B$ は、区間の n 組 (I_1, \dots, I_n) である。ただし $n \in \mathbf{N}$, $I_1, \dots, I_n \in I$

とする。区間 I について、下限を $\text{lb}(I)$ で、上限を $\text{ub}(I)$ で、幅を $w(I)$ で表す。 $r \in \mathbf{R}$ について、 r を含む最小幅の区間を \bar{r} で表す。

3. ハイブリッドシステム

ハイブリッドシステムを、下記からなる組 $H = (Q, X, E, F, \text{Init}, G, R)$ として定義する:

- Q は離散状態の集合
 - $X = \mathbf{R}^n$ は連続状態の集合
 - $E \subseteq Q \times Q$ は離散変化の集合
 - $F = \{f_q\}_{q \in Q}$ は各離散状態に関連づけられたベクトル場 $f_q: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ の族
 - $\text{Init} \in Q \times X$ は初期状態
 - $G = \{g_e\}_{e \in E}$ はガード条件 $g_e \subseteq X$ の族
 - $R = \{r_e\}_{e \in E}$ はリセット写像 $r_e: X \rightarrow X$ の族
- ハイブリッドシステムの実行をハイブリッド軌道により表す。まず $\text{ub}(\mathbf{T}_j) = \text{lb}(\mathbf{T}_{j+1})$ がなりたつ $\mathbf{T}_j \subseteq \mathbf{R}$ の列 $\tau = \{\mathbf{T}_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ を考える。ハイブリッド軌道を組 $(q_0, x_0, \tau, q, \Phi)$ により定義する。各要素は、初期離散状態 $q_0 \in Q$, 初期連続値 $x_0 \in X$, 時間区間の列 τ , 離散状態の列 $Q = \{q_j\}_{j \in \mathbf{N}}$, $q_j \in Q$, 連続状態を与える写像の列 $\Phi = \{\phi_j\}_{j \in \mathbf{N}}$, $\phi_j: \mathbf{T}_j \rightarrow X$ からなる。またハイブリッド軌道は以下をみたとす:

- $q(\mathbf{T}_0) = q_0$
- $\phi_0(\text{lb}(\mathbf{T}_0)) = x_0$
- すべての $j \in \mathbf{N}$ について $(q_j, q_{j+1}) \in E$
- すべての $j \in \mathbf{N}$ について ϕ_j は、常微分方程式の初期値問題 (以下、「IVP-ODE」とする) $\phi_j' = f_{q_j}(t, \phi_j)$, $\phi_j(\text{lb}(\mathbf{T}_j)) = r_{(q_{j-1}, q_j)}(\phi_{j-1}(\text{ub}(\mathbf{T}_{j-1})))$ の解軌道 (連続軌道)
- すべての $j \in \mathbf{N}$ について $\phi_{j+1}(\text{lb}(\mathbf{T}_{j+1})) \in r_{(q_j, q_{j+1})}(\phi_j(\text{ub}(\mathbf{T}_j)))$
- すべての $j \in \mathbf{N}$ について $\phi_j(\text{ub}(\mathbf{T}_j)) \in g_{(q_j, q_{j+1})}$
- すべての $j \in \mathbf{N}, t \in \mathbf{T}_j$ について $\phi_j(t) \notin g_{(q_j, q_{j+1})}$

以下によりハイブリッドシステムの区間拡張を行う:

- X を $\mathcal{X} \in \mathbf{I}^n$ に置き換える
- F を $\mathcal{F} = \{F_q\}_{q \in Q}$ に置き換える (F_q は f_q の区間拡張)
- G を $\mathcal{G} = \{G_e\}_{e \in E}$ に置き換える ($G_e \in \mathbf{I}^n$, $g_e \in \mathcal{X}$)
- R を $\mathcal{R} = \{R_e\}_{e \in E}$ に置き換える ($R_e: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ は r_e の区間拡張)

ハイブリッドシステム H の区間拡張を、以下に述べるハイブリッド軌道の区間包囲を持つような組 $\mathcal{H} = (Q, \mathcal{X}, E, \mathcal{F}, \text{Init}, \mathcal{G}, \mathcal{R})$ と定義する。時間区間の列 τ の区間包囲 \mathcal{T} は、区間 $\mathbf{T}_j \in \mathcal{I}$ の列 $\{\mathbf{T}_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ である。ハイブリッド軌道の区間包囲を組 $(q_0, X_0, \mathcal{T}, \mathcal{Q}, \Phi)$ により表す。ハイブリッド軌道の区間包囲はハイブリッド

ド軌道の第2要素を $X_0 \in \mathbf{I}^n$ に、第3要素を T に置き換えたものである。すべての $x_0 \in X_0$ を初期状態とするハイブリッド軌道 $(q_0, x_0, \tau, Q, \Phi)$ に対し、その区間包囲は以下をみたます (j は $j \leq n$ であるようなすべての $j \in \mathbf{N}$ と考える。 n は \mathbf{N} 中の定数):

- すべての $T_j \in \tau$, $T_j \in T$ について $T_j \subseteq T_j$
- すべての $T_j \in \tau, t \in T_j, x_0 \in X$ について、 $\phi_j(t) \in \Phi_j(T)$ となる $T \in T_j, X_0 \in \mathcal{X}$ が存在する

4. ハイブリッド軌道の区間包囲の求解手法

本節では、ハイブリッド軌道の区間包囲を求めるための手法を述べる。提案する求解方法の概要を以下のような逐次処理として示すことができる:

- (1) $q_j \in Q, j \in \mathbf{N}, j \geq 1$ について、初期状態 D_{j-1} を、 D_0 として ($j = 1$ のとき)、または $R_{(q_{j-1}, q_j)}(D_{j-1})$ を区間演算することにより ($j > 1$ のとき、 D_{j-1} は前ステップでガード条件に合致した状態)、求める。
- (2) ベクトル場を F_{q_j} 、初期値を D_j とした IVP-ODE の区間拡張に基づき $T_j \in T$ 上の連続軌道の区間包囲 Φ_j を求める。
- (3) Φ_j とガード条件 G_{q_j} を連立させて離散変化を起こす状態 D'_j を求める。(1)に戻る。

提案手法は、おもに上記 (2) と (3) の処理を、制約伝播に基づき効率よく行うことを目指したものである。

4.1 連続軌道の求解

提案手法では、IVP-ODE の区間拡張の求解を行うことにより、連続軌道の区間包囲を求める。本研究では Nedialkov ら⁵⁾ による既存手法を利用した (以下、この手法を「VNODE」とする)。VNODE では、以下の計算を繰り返すことにより逐次的に連続軌道の区間包囲を計算する (ここでは第 j ステップの計算を述べる):

- (1) 初期時間 $t_{j-1} \in \mathbf{I}$ 、初期値 $D_{j-1} \in \mathbf{I}^n$ 、ベクトル場 f 、ステップ幅の見積もり値 $h_{\text{trial}, j}$ ($h_{\text{trial}, j} > 0$ とする)、ステップ幅の上限 $h_{\text{max}} \in \mathbf{R}$ ($h_{\text{max}} > 0$) が入力される。 $h_{\text{trial}, j}$ と h_{max} をもとにステップ幅 h_j を求め、a priori 包囲 A_j を計算する。
- (2) 時点 t_j における tight 包囲 D_j を計算する。ハイブリッド軌道の区間包囲の計算では、初期時間を幅を持った区間として与える必要があるが、VNODE ではこれが可能である。また提案手法では、離散変化の起こる時点を探るために、ステップ幅を任意に指定しながら逐次計算を行う機能が必要となる。そのため本研究では、VNODE にステップ幅の上限 h_{max} を指定する処理を追加した。

4.2 制約伝播手法による区間非線形制約の求解

提案手法では、離散変化を起こすガード条件を判定

Require: a set \mathcal{C} of constraints,
an initial domain D_0

Ensure: a set of domain D_i ($1 \leq i \leq n$)

```

1:  $\mathcal{D} := \text{PRUNE}(\mathcal{C}, D_0)$ 
2: if  $\mathcal{D}$  is not empty then
3:   if  $\mathcal{D}$  is precise enough then
4:     return  $\{\mathcal{D}\}$ 
5:   else
6:      $i := \text{select an index}$ 
7:      $(D_1, D_2) := \text{BRANCH}(\mathcal{D}, i)$ 
8:     return  $\text{BRANCHANDPRUNE}(\mathcal{C}, D_1) \cup$   

        $\text{BRANCHANDPRUNE}(\mathcal{C}, D_2)$ 
9:   end if
10: else
11:   return  $\emptyset$ 
12: end if

```

図3 BRANCHANDPRUNE アルゴリズム

するために既存手法 Newton¹⁾ を利用した。Newton は \mathbf{R} 上の非線形制約の区間拡張 \mathcal{C} および box D_0 を入力とし、 D_0 から制約をみたますドメインを求めることができる。Newton は、制約伝播および box 整合に基づく BRANCHANDPRUNE アルゴリズムを用い、制約の変数の取り得る値を削減していく。図3に BRANCHANDPRUNE アルゴリズムを示す。

4.3 制約伝播手法によるハイブリッド軌道の計算

4.1 と 4.2 の手法を統合し、BRANCHANDPRUNE によりハイブリッド軌道の計算を行う方法を示す。

提案手法を、ハイブリッド軌道の第 j ステップを計算する際に、下記を入力とした BRANCHANDPRUNE アルゴリズムとして構成する。入力は、ガード条件 \mathcal{G} とベクトル場 F_{q_j} からなる組 $\mathcal{C} = (\mathcal{G}, F_{q_j})$ と、tight 包囲 $D_{j-1} \in \mathcal{X}$ と a priori 包囲 $B \in \mathbf{I} \times \mathbf{I}^n$ からなる組 $D_0 = (D_{j-1}, B)$ (最初は未定義でよい) である。上記のもと、 $T_j \in \tau$ 上の連続軌道をできるだけ大きなステップ幅で計算しながら、ガード条件をみたます指定した区間幅の状態を求める。制約の変数値となる a priori 包囲は時間を成分として含む $(T, I_1, \dots, I_n) \in \mathbf{I} \times \mathbf{I}^n$ のような box である。以上の定式化により、box 整合が適用可能になる。

図4および図5に提案する PRUNE_{hybrid} と BRANCH_{hybrid} の実装を示す。PRUNE_{hybrid} は入力された a priori 包囲の時間以外の成分について (2)、Newton を用いてガード条件を適用することにより削減し (3行目)、その結果を返す。アルゴリズムはガード条件がなりたつかどうかを、結果が空であるか確認することにより判定することができる。BRANCH_{hybrid} は、入力されたベクトル場 F_{q_j} と状態 D_j から IVP-ODE を構築し、ステップ幅を B_j の時間成分の 1/2 に改良し、解き直すことにより、入力された a priori 包囲 B_j を2つに分割する。(2行目)。BRANCHANDPRUNE

Require: a set of guard conditions \mathcal{G} ,
an a priori bound $B_j \in \mathbf{I} \times \mathbf{I}^n$,
an index $i \in \mathbf{N}$

Ensure: a domain $D' \in \mathbf{I}^n$ a triple (D_{j-1}, B'_j, D_j)
of tight solutions D_{j-1}, D_j and a priori bounds
 B'_j

- 1: $B'_j := B_j$
- 2: **if** $i \neq 1$ **then**
- 3: $B'_j := \text{PRUNE}_{\text{Newton}}(G, B'_j, i)$
- 4: **return** B'_j
- 5: **else**
- 6: **return** B'_j
- 7: **end if**

図4 PRUNE_{hybrid} アルゴリズム

Require: a vector field F_{q_j} ,
a tuple (D_{j-1}, B_j, D_j) of a tight solution
 $D_{j-1} \in \mathbf{I}^n$, an a priori bound $B_j \in \mathbf{I} \times \mathbf{I}^n$,
a tight solution $D_j \in \mathbf{I}^n$

Ensure: a tuple of triples $((D_{j-1}, B'_j, D'_j),$
 $(D'_j, B''_j, D''_j))$ of tight solutions D_{j-1}, D'_j, D''_j
and a priori bounds B'_j, B''_j

- 1: $T := \langle B_j, 1 \rangle$
- 2: $(B'_j, D'_j, B''_j, D''_j) := \text{solve an IVP-ODE } \Phi' = F_{q_{j+1}}$ with an initial value $\Phi(\text{lb}(T)) = D_{j-1}$ for 2 steps using a step size $w(T)/2$
- 3: $D''_j := D_j \cap D''_{j+1}$
- 4: **return** $((D_{j-1}, B'_j, D'_j), (D'_j, B''_j, D''_j))$

図5 BRANCH_{hybrid} アルゴリズム

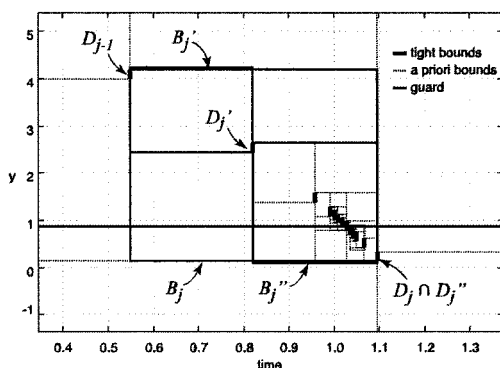


図6 BRANCHANDPRUNE による計算

アルゴリズムは、ガード条件を成り立たせる状態がなくなるか、a priori 包圍 B_j が指定された精度に達した (すべての $i \in \mathbf{N}, i \leq n$ について $w(\langle B_j, i \rangle)$ が指定の区間幅以下になった) ならば、停止する。図6に提案手法による計算を示す。

表1 跳ね返る質点のシミュレーション結果

	1	2	3	4
時間	0.03	0.04	0.04	0.31
分岐数	13 + 0	18 + 1	19 + 92	26 + 6074
box 数	1	3	96	6088

5. 実装

本研究では Newton の実装である Elisa を VN-ODE の実装 VNODE-LP と連携動作するように拡張することにより、提案手法を実装した。

6. 実験結果

提案手法の実験結果について述べる。提案手法により跳ね返る質点のモデルについて4回の落下と跳ね返りをシミュレーションする実験を行った。実験結果を表1に示す。各列は何回目の衝突かを示しており、各行は、時間 (単位は秒)、BRANCH の回数 (Elisa と VNODE-LP による分岐を別表示した)、box 解の個数を示している。

7. まとめ

本研究では、区間に基づく IVP-ODE 求解手法および非線形制約の求解手法を BRANCHANDPRUNE アルゴリズムに組み込み、高精度なハイブリッド軌道の区間包圍を効率よく求める方法を示した。

参考文献

- 1) F. Benhamou, D. McAllester, and P. van Hentenryck. CLP(intervals) revisited. In *ISLP 1994*, pages 124–138. MIT Press, 1994.
- 2) B. Carlson and V. Gupta. Hybrid cc with interval constraints. In *HSCC 1998*, volume 1386 of *LNCS*. Springer, 1998.
- 3) T. A. Henzinger, B. Horowitz, R. Majumdar, and H. Wong-Toi. Beyond HyTech: Hybrid systems analysis using interval numerical methods. In *HSCC 2000*, volume 1790 of *LNCS*. Springer, 2000.
- 4) D. Ishii, K. Ueda, and H. Hosobe. An interval-based approximation method for discrete changes in Hybrid cc. In *Trends in Constraint Programming*, pages 245–255. ISTE, 2007.
- 5) N. S. Nedialkov, K. R. Jackson, and G. F. Corliss. Validated solutions of initial value problems for ordinary differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 105(1):21–68, 1999.
- 6) N. S. Nedialkov and M. von Mohrenschildt. Rigorous simulation of hybrid dynamic systems with symbolic and interval methods. In *ACC 2002*, volume 1, pages 140–147, 2002.
- 7) B. I. Silva, O. Stursberg, and S. Engell B. H. Krogh. An assessment of the current status of algorithmic approaches to the verification of hybrid systems. In *CDC2001*, volume 3, pages 2867–2874, 2001.