

株価推移と整合的なオプション評価モデルの選択基準

回 瀧 純 治[†] 宮 崎 浩 一[†] 岡 本 雅 生[†]

本研究では、まず、Li(2000/2001)にある3パラメータモデルのローカル・ボラティリティに新たな関数形を加えた5パラメータモデルを提案し、市場で観測可能なプレーンバニラ・オプションの価格情報を可能な限り反映させてエキゾチックオプションを価格付けする観点から新たに導入した関数形が効果的であることを示した。次に、既存研究でも用いられた尤度基準や Berkowitz 検定に加えて、新たに Kullback-Leibler 情報量を利用した基準を提案し、3パラメータモデルと5パラメータモデルを、オプション市場価格から抽出したリスク中立分布と実現株価との整合性の観点から比較した。この整合性の観点からも3パラメータモデルのローカル・ボラティリティに新たに加えた関数形の有用性がわかった。

Selection Criteria of Option Valuation Models That are Rational to Realized Equity Dynamic

JUNJI MAWARIBUCHI[†], KOICHI MIYAZAKI[†] and MASAKI OKAMOTO[†]

In this research, firstly, we propose 5-parameter model that incorporates new functional form in addition to that of 3-parameter model and illustrate its importance in the valuation of Exotic products incorporating the information of listed option prices. Secondly, introducing the new criterion utilizing Kullback-Leibler divergence other than usual likelihood and Berkowitz test, we examine the 3-parameter model and the 5-parameter model from the view point how close the extracted risk-neutral distribution of each model is to the realized equity dynamics. Our result suggests that the new functional form in the 5-parameter model is again quite useful in this respect.

1. はじめに

金融機関は、エキゾチック・デリバティブと呼ばれる複雑な金融派生証券を相対取引で売買しているが、これらは、市場で観測可能なプレーンバニラ・オプションの価格情報を可能なかぎり反映させて価格付けされる。エキゾチック・デリバティブの効率的な価格付けの方法として株価の推移をラティスで表現するラティスモデルが盛んに利用されている。

本研究では、ラティスを用いたエキゾチック・デリバティブの評価に焦点を当てるため、ラティスによる表現がスムーズに行うことが可能なダミニステック・ボラティリティモデル（ローカル・ボラティリティを時間と株価の関数形で表現するモデル）に関して議論する。

従来より、どのようなローカル・ボラティリティの関数形を与えれば、様々な権利行使価格のオプションモ

デル価格をオプション市場価格に近づけることができるかがオプションの価格付けにおける主たる研究テーマであった。さらに、近年、様々な権利行使価格のオプション市場価格から抽出したリスク中立分布にはオプション満期における株価の予測力が幾らか含まれると指摘されるようになった¹⁾。

本研究では、株価の推移をラティスモデルで表現するため、満期におけるリスク中立分布の抽出が同時にラティスの中身も決定するので、満期までの離散時点におけるリスク中立分布が得られることになる。よって、満期までの離散時点における株価とリスク中立分布から、リスク中立確率に基づくオプション評価モデルがどの程度まで現実の株価推移と整合的なものであるかを検証することができる。この整合性の検証に関しては、尤度、Berkowitz 検定²⁾、Kullback-Leibler 情報量³⁾を検証手法として用いた実証分析を行い、これらの中で有用なオプションモデルの選択基準を議論する。

[†] 電気通信大学システム工学科
Department of Systems Engineering, The University of
Electro-Communications

表1 4種のデタミニスティック・ボラティリティ・モデル (DVM)
Table 1 Four kinds of Deterministic Volatility Model(DVM).

DVM	Local Volatility
1P	$\sigma(S_t, t) = a$
2P	$\sigma(S_t, t) = aS_t^\alpha$
3P	$\sigma(S_t, t) = c + a \left\{ 1 - \tanh \left[b \left(\frac{S_t - S_0}{S_0} \right) \right] \right\}$ Li(2000/2001)
5P	$\sigma(S_t, t) = c + a \left\{ 1 - \tanh \left[b \left(\frac{S_t - S_0}{S_0} \right) \right] \right\} + d \left\{ 1 - \operatorname{sech} \left[c \left(\frac{S_t - S_0}{S_0} \right) \right] \right\}$

2. オプション評価モデル

2.1 4種のデタミニスティック・ボラティリティ・モデル (DVM)

デタミニスティック・ボラティリティ・モデルとは、式(1)のように、ローカル・ボラティリティが、株価 S_t と時刻 t の関数形 $\sigma(S_t, t)$ として表現されるモデルである。表1には、BSモデルを含め、本研究の分析対象となる4通りのローカル・ボラティリティモデルを掲載した。

$$dS_t/S_t = rdt + \sigma(S_t, t)dW \quad (1)$$

ここで、 S_t は時点 t における株価、 r は無リスク金利(本研究では無リスク金利は0とする)、 $\sigma(S_t, t)$ はローカル・ボラティリティ、 dW はウィナー過程である。

2.2 ラティスに基づくオプション評価法 [Li(2000/2001)]

プレーンバニラ・オプションは、満期 T における株価 S_T のリスク中立分布 $f(S_T)$ を用いて評価することができる。コール・オプションとプット・オプションの評価式を合わせて式(2)として掲載した。

$$\begin{aligned} \text{Call} &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \max(S_T - K, 0) f(S_T) dS_T \\ \text{Put} &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \max(K - S_T, 0) f(S_T) dS_T \end{aligned} \quad (2)$$

本研究では、式(2)はラティスを用いて評価するのであるが、表1に示した4つのデタミニスティック・ボラティリティ・モデルを二項ラティスで表現する際に、2時点間における状態推移の確率は上昇下落共に50%となるようなLiアルゴリズムを採用する。

Liアルゴリズム

式(3)は2時点間の株価の推移を表現しており、現時点の株価から翌期の株価が求めるアルゴリズムとなっている。ここで Δt は1ラティス当りの微小時間である。

表2 各モデルの制約条件
Table 2 Limiting condition of each model.

DVM	Functional Constraint
2Parameter Model	$0 < \sigma(S_t, t) < 1$ for $0.25 \leq \frac{S_t}{S_0} \leq 1.5$
3Parameter Model	
5Parameter Model	$0 < \sigma(S_t, t) < 1$ for $0.5 \leq \frac{S_t}{S_0} \leq 1.5$

$$\begin{aligned} S_t^i &= S_{t-1}^i \left[1 + r\Delta t + \sigma(S_{t-1}^i, t) \sqrt{\Delta t} \right] \\ S_t^{i+1} &= S_{t-1}^{i+1} \left[1 + r\Delta t - \sigma(S_{t-1}^{i+1}, t) \sqrt{\Delta t} \right] \\ S_t^{i+1} &= \frac{1}{2} \left\{ S_{t-1}^i \left[1 + r\Delta t - \sigma(S_{t-1}^i, t) \sqrt{\Delta t} \right] \right. \\ &\quad \left. + S_{t-1}^{i+1} \left[1 + r\Delta t + \sigma(S_{t-1}^{i+1}, t) \sqrt{\Delta t} \right] \right\} \\ &\quad (i \neq 0, t) \end{aligned} \quad (3)$$

2.3 オプション評価モデルのキャリブレーション手法

キャリブレーションは、表2に示すテクニカルな制約条件(最適化をスムーズに行うためにこのような制約を置くが、満期までの営業日数を考慮するとこれらは極めて緩い制約である)の下で式(4)に示す目的関数を最小化することにより行う。

$$\text{Min} \sum_{i=0}^6 (P_i' - P_i)^2 / 7 \quad (4)$$

ここで、 P はオプション市場価格、 P' はオプションモデル価格、 i はオプションの種類を表し、 $i=0$ で CallATM、 $i=1$ で CallOTM1、 $i=2$ で CallOTM2、 $i=3$ で CallOTM3、 $i=4$ で PutOTM1、 $i=5$ で PutOTM2、 $i=6$ で PutOTM3を示す。

3. 推定されたリスク中立分布と原資産のダイナミクスとの整合性の検証手法

3.1 尤度基準に基づくアプローチ

残存期間が15営業日のオプションを採用しているので、ラティスはオプションの価格付けを行った日を起点(0営業日)として15営業日後まで構築されている(3.2節、3.3節のアプローチにおいても同様である)。尤度に基づく整合性の検証では、 i ($i=1, \dots, 15$) 営業日後におけるリスク中立分布 ($f_i(S)$) と実現株価 S_i から得られる対数尤度 $\sum_{i=1}^{15} \ln f_i(S_i)$ を基準にモデル間の比較を行う。4.1節において詳しく述べるが、オプションのデータとしては、各月に満期を迎える様々な権利行使価格のオプションの価格データセットを59セット(59ヶ月分)用いる。よって、上記の対数尤度はモデル毎に59個得られることになり、これらに基づいて検証を行う。

3.2 Berkowitz 検定に基づくアプローチ

先行研究 Bliss and Panigirtzoglou(2004) や岡本・宮崎・星加 (2007) を参照されたい。

3.3 Kullback-Leibler 情報量に基づくアプローチ

確率分布関数が密度関数 $g(x)$ と $f(x)$ をもつ離散モデルの場合には、K-L 情報量 $I(g; f)$ は

$$I(g; f) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \ln \frac{g(x_i)}{f(x_i)} \quad (5)$$

で与えられる。

本研究では、オプションの満期時点 (15 営業日後) のみにおけるリスク中立確率密度関数 $f(x)$ と実現株価から得られる分布 $g(x)$ との近さ (整合性) を検証するのみならず、ラティスマデルのメリットを十分に活かして満期までの幾つかの各営業日についても検証する。ここで、実現株価から得られる分布 $g(x)$ の導出法を具体的に示す。起点 (0 営業日) から分析対象となる各営業日までの実現株価から求めた日次リターンに関するモーメントを 4 次 (平均 μ , 標準偏差 σ , 歪度 s , 超過尖度 k) まで求め、佐々木, 宮崎, 野村 (2005) や Peter, Wang and Karim (2003) で利用している Edgeworth 展開式 (式 (6)) に代入することで、実現株価から得られる分布 $g(x)$ を導出する。ここでこの分析はモーメントを求める際にデータ数が必要であるため、11 営業日から 15 営業日 (満期) までを対象とした。よって、本研究では、59 個のオプションデータを用いるので、 5×59 個の K-L 情報量が得られる。

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \left(1 - \frac{s}{3!} (3z - z^3) + \frac{k}{4!} (3 - 6z^2 + z^4) \right) \quad (6)$$

$$z = \frac{\ln\left(\frac{x}{S_0}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \quad (7)$$

ここで、 S_0 は起点 (0 営業日) の株価を、 t は各営業日までの日数 ($t = 11, 12, \dots, 15$) を表す。

4. 実証分析

4.1 データと分析設定

実証分析データは、2003 年 6 月から 2008 年 4 月満期の計 59 期間の日経 225 オプション市場の満期までの期間が 5, 10, 15 営業日のコールオプション・プットオプションを使用する。実現株価としては、ラティスの 1, 2, ..., 14 営業日に対応する株価には日経 225index の終値を、15 営業日に対応する株価にのみ

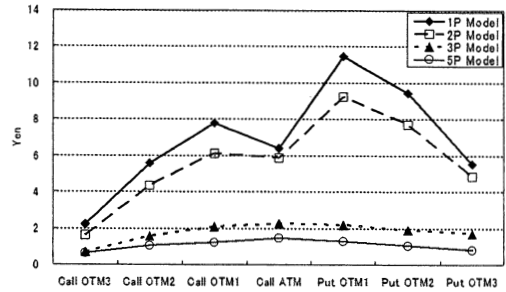


図 1 15 営業日の絶対誤差平均

Fig. 1 The average absolute error of 15 business days.

SQ 値 (SpecialQuotation) を用いた。分析設定として、最適化ツールは Microsoft(R)Excel2003 のソルバー、ラティスの数は 200 ラティス、分析対象期間の大半がゼロ金利政策下にあったため、無リスク金利 r は 0 % とした。

4.2 オプション評価モデルのオプション市場価格へのフィッティングに関する分析結果と考察

ここでは、残存期間が 15 営業日において、権利行使価格別にオプションモデル価格とオプション市場価格との絶対誤差の平均 (59 セットに関する平均) を取ったものを図 1 に示した (5, 10 営業日に関しては、紙面制約のため割愛)。図 1 より、オプション評価モデルのオプション市場価格へのフィッティングは、良いものから順に 5 パラメータモデル, 3 パラメータモデル, 2 パラメータモデル, 1 パラメータモデルであることがわかる。

4.3 尤度基準に基づく整合性の検証結果と考察

対数尤度自体は、3 パラメータモデル, 5 パラメータモデル共に満期によって -140 から -90 程度まで幅広く分布するが、両者の差異は平均で 0.1 程度、最大でも 2.4 であり、尤度を基準とした場合には両モデルで殆ど予測力の差異を確認することはできなかった。これは、何れの満期のケースにおいても、起点 (0 営業日) から 15 営業日までの範囲では、実現株価が起点における株価に比較的近い範囲にしか推移せず、この範囲のラティスの形状が 3 パラメータモデルと 5 パラメータモデルでそれほど大きく変わらないからである。

4.4 Berkowitz 検定に基づく整合性の検証結果と考察

オプション市場価格から抽出されるリスク中立分布の予測力は、オプションの満期におけるリスク中立分布の予測力が最も高く、ラティス上を 14 営業日, 13 営業日と満期から遠ざかるに従ってリスク中立分布の予測力が弱まっていくことが確認された。また、こ

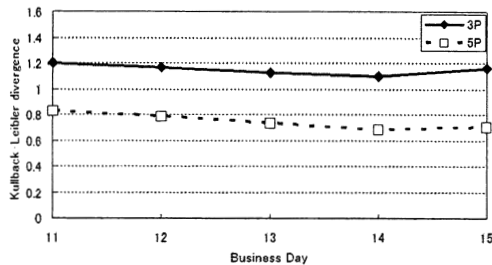


図2 各営業日の K-L 情報量平均値
Fig. 2 The average of the K-L divergence of each business days.

での分析結果が、3パラメータモデルと5パラメータモデルで殆ど差が無い理由は尤度基準の場合と同様であると考えられる。

4.5 Kullback-Leibler 情報量に基づく整合性の検証結果と考察

Kullback-Leibler 情報量を利用した検証が尤度基準や Berkowitz 検定に基づく検証と大きく異なる点は、起点 (0 営業日) から対象となる営業日までの株価推移から日次の株価リターンの 4 次モーメントまで求め、この株価推移に基づく分布とリスク中立分布との近さを検証していることである。この基準を採用すれば、起点 (0 営業日) から分析対象となる営業日までの間に実現株価が起点における株価の近くしか推移しなくても、日次リターンから対象営業日における株価分布を導出しておけば株価が実現した部分の尤度 (起点における株価に近い範囲の分布) のみではなく分布全体 (広い範囲の株価に対する分布) をリスク中立分布と比較することができる。

図2には、59個あるオプションの満期における K-L 情報量の営業日毎の平均値を 11 営業日から 15 営業日に関して示した。図2から対象となる何れの営業日においても 5 パラメータモデルの K-L 情報量が 3 パラメータモデルの 3 分の 2 程度であることがわかり、5 パラメータモデルの方が概して 3 パラメータモデルよりも実現株価とリスク中立分布との整合性が高いことが確認される。つまり、オプション市場価格からリスク中立分布を抽出する際にローカル・ボラティリティの関数形に $d(1 - \operatorname{sech}(ex))$ を加えることで抽出されたリスク中立分布の満期までの株価予測力は概して高まることがわかった。このように、株価が起点 (0 営業日) の株価に近い範囲で推移する場合でも、実現株価リターンのモーメントからエッジワース展開を利用して株価分布を導出し、リスク中立分布との近さ

を K-L 情報量で捉えるアプローチは、株価推移と整合的なオプション評価モデルの選択基準として有効であると考えられる。

5. まとめと結語

本研究では、まず、Li(2000/2001) で導入されている 3 パラメータモデルをネストする形の 5 パラメータモデルを提案し、既存の BS モデルやコンスタント・イラスティシティ・モデルも含めてオプションモデル価格がどの程度までオプション市場価格とフィットすることができかについて検証した。

次に、3 パラメータモデルと 5 パラメータモデルを、オプション市場価格から抽出したリスク中立分布と実現株価との整合性の観点から比較した。尤度基準や Berkowitz 検定ではモデル間における整合性の相違を明確に判別することができなかったが、Kullback-Leibler 情報量を利用した基準ではモデル間における整合性の相違をはっきりと確認することができた。概して、5 パラメータモデルの方が 3 パラメータモデルよりも実現株価とリスク中立分布との整合性は高かった。

参考文献

- 1) Hirofumi Hoshika and K., Miyazaki.: Which Deterministic Volatility Model Fits Market Price Exactly? Evidence from NIKKEI225 Option Market, Journal of Japan Industrial Management Association, Vol.59 No.2, pp.451-458 (2008)
- 2) Robert R. Bliss and Nikolaos Panigirtzoglou: Option-Implied Risk Aversion Estimates, Journal of Finance, Vol.59, pp.407-446 (2004)
- 3) Liu, X., Shackleton, M. B., Taylor, S. J., and Xu, X. :Closed-form transformations from risk-neutral to real-world distributions. Journal of Banking and Finance, Vol.31, pp.1501-1520 (2007)
- 4) Berkowitz, Jeremy: Testing density forecasts with applications to risk management, Journal of Business and Economic Statistics, Vol.19, pp.465-474 (2001)
- 5) 小西貞則, 北川源四郎: 情報量基準 シリーズ予測と発見の科学 2, 朝倉書店, pp.27-29 (2004)