オプション市場価格へのフィッティングと株価予測力に関する検証

田中 健太郎† 宮崎 浩一† 岡本 雅生†

オプション市場価格から抽出されるリスク中立分布には，投資家の予測する株価の分布の情報が含まれていると考えられている．本研究では，分布を対数正規分布，混合対数正規分布，ジャンプ拡散モデル，一般化ベータ分布と仮定し，クロスセクショナルデータからリスク中立分布を推定し，尤度に基づき株価予測可能性について検証を行った．検証を行う際には，これらのリスク中立分布とヒストリカルデータからの分布，リスク回避度を考慮した分布との比較を行う．分析対象期間は，2003 年 6 月から 2008 年 4 月である．また分析対象期間をサブプライム問題以前と以降に分ける検証も行った．

Whichi distribution is preferable for fitting option model price to its market price and forecasting the future equity price?

KENTARO TANAKA † ,KOICHI MIYAZAKI † and MASAKI OKAMOTO†

Cross-sectional market prices of options are thought to have some information on the investors' forecasts on risk-neutral density of underlying asset. Assuming lognormal, lognormal mixture, jump-diffusion model and generalized beta, we estimate it from the cross-sectional data and examine its forecasting ability based on standard likelihood criterion. In analysis of the forecasting ability, we compare the ability of the risk-neutral density with those of the densities estimated from historical data or risk-averseness parameters. The data in our analysis covers the period from June 2003 to April 2008, that is to say 59 kinds of contract months. We also attempt above analysis splitting the data period into the one before the occurrence of the sub-prime problem and the one after the problem.

1. はじめに

オプションとは，満期日において対象資産（以下，原資産，株式などを想定されたい）を取り決めた価格（以下，権利行使価格）で買う（コール・オプション）又は売る（プット・オプション）ことができる権利のことである．オプション市場において，この権利（オプション）が売買されている．商品特性からコール・オプションの価格は，満期日に原資産が権利行使価格よりも高くなる可能性が大きいと想定される場合に高くなり，逆の場合には安くなる．プット・オプションに関しても同様に考えられる．つまり，オプションの市場価格データには，市場参加者の想定する原資産の予測に関する情報が含まれていると考えられる．

オプション価格から抽出したリスク中立分布やヒストリカル分布が，オプション満期における株価の分布をどの程度まで予測可能であるかについて検証した研究に X.Liu et al.(2007) がある．そこでは，リスク中立分布の分布形を混合対数正規分布と一般化ベータ分布の 2 通りでパラメトライズしたうえでオプション市場価格から推定し，このリスク中立分布の予測力をオプション満期における株価の実現値を利用した対数尤度に基づいて計量している．また，ヒストリカル分布に関しては，正規分布を仮定し平均と分散を ARCH モデルから予測した分布の予測力を同様に計量している．更に，抽出したリスク中立分布に市場参加者のリスク回避度を考慮したリアル分布を導入して，そのリスク回避度（全期間で一定と仮定）を全期間におけるリスク中立分布（オプションの満期の数だけ得られる）と対応する満期時点の実現株価から，対数尤度を最大化することによって推定している．

本研究では，分析対象期間に市場が混乱したサブプライム問題発生後の時期も含まれるため，原資産がジャンプするような動きも捉えることが可能なジャンプ拡散モデルの分布形も導入する．また，リアル分布に関しても，先行研究の検証のみならず，過去のリスク中立分布と対応する満期の株価から推定されたリスク回避度（インサンプルデータから得られたもの）を現時点のリスク中立分布をリアル分布への変換する際

† 電気通信大学システム工学科
Department of Systems Engineering,The University of Electro-Communications

に利用して，リスク中立分布やヒストリカル分布の場合と同様にアウトサンプルデータに基づいてリアル分布の予測力を計量し，これら3つの分布の予測力を比較検討する．

2. 株価モデル

2.1 Black–Scholes モデル（BS モデル）

S_T，S_0 をそれぞれ満期時点及び初期時点の株価，r は無リスク金利，σ はボラティリティとする．満期時点株価は式（1）の対数正規分布 ($\theta = (\sigma)$) に従う．

$$g_{BS}\ (S_T|\theta) = \frac{1}{S_T \sigma \sqrt{2\pi T}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln \frac{S_T}{S_0} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right]^2\right) \quad (1)$$

2.2 混合対数正規モデル（MLN モデル）

本モデルのパラメータセット θ は，各対数正規分布の平均 F_i $(i = 1, 2)$，ボラティリティσ_i $(i = 1, 2)$，ウェイト w の5つであり，$\theta = (F_1, F_2, \sigma_1, \sigma_2, w)$ となる．

$$g_{MLN}(S_T|\theta) = w g_{LN}(S_T|F_1, \sigma_1, T) + (1-w) g_{LN}(S_T|F_2, \sigma_2, T) \quad (2)$$

$$g_{LN}(S_T|F_i, \sigma_i, T) = \frac{1}{S_T \sigma_i \sqrt{2\pi T}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln \frac{S_T}{F_i} + \frac{1}{2}\sigma_i^2 T}{\sigma_i \sqrt{T}}\right]^2\right) \quad (3)$$

制約条件

$$w F_1 + (1-w) F_2 = S_0 \exp(rT) \quad (4)$$

2.3 ジャンプ拡散モデル（JD モデル）

JD モデルは，株価のダイナミックスを幾何ブラウン運動にジャンプを加えてBSモデルを拡張したモデルであり，株価を $\frac{dS_t}{S_t} = (r - \lambda\beta)\, dt + \sigma dW_t + (Y-1)\, dN_t$ によってモデル化する．Y をジャンプ幅率の確率変数，λ はポアソン過程 N_t のインテンシティ，β はジャンプ幅率の期待値，σ は拡散項のボラティリティとし，ジャンプ幅率の確率変数 Y の対数を取ったものが平均 μ_J，分散 δ^2 の正規分布に従うと仮定する．このとき，満期における株価の従う確率密度関数 ($\theta = (\lambda, \beta, \sigma, \delta)$) は，式 (5) で与えられる．

$$g_{JD}(S_T|\theta) = \frac{\exp(-\lambda T)}{S_T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^k \exp\left(-\frac{\left(\ln \frac{S_T}{S_0} - \psi T - k\mu_J\right)^2}{2(\sigma^2 T + k\delta^2)}\right)}{k! \sqrt{2\pi(\sigma^2 T + k\delta^2)}} \quad (5)$$

ここで，k はジャンプ回数を表す．

$$\psi = r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\beta \quad (6)$$

2.4 一般化ベータモデル（GB2 モデル）

GB2 モデルは，パラメータセット $\theta = (a, b, p, q)$ を持ち，これらのパラメータの組み合わせで平均，分散，歪度，尖度が決まるモデルである．

$$g_{GB2}(S_T|\theta) = \frac{a S_T^{ap-1}}{b^{ap} B(p,q) \left[1 + \left(\frac{S_T}{b}\right)^a\right]^{p+q}} \quad (7)$$

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \quad (8)$$

制約条件

$$\frac{bB\left(p + \frac{1}{a}, q - \frac{1}{a}\right)}{B(p,q)} = S_0 \exp(rT) \quad (9)$$

3. 分 析 手 法

3.1 リスク中立分布の抽出法

リスク中立分布のパラメータセット θ は，2節で述べた株価モデルに基づくオプション価格と対応するオプション市場価格との差の2乗和を最小化することにより推定する．

3.2 リアル分布の導出手法と株価予測力の検証法

投資家は必ずしもリスク中立的ではないので，投資家が本来的に予測する株価分布は，彼等のリスク回避度に依存するものである．よって，その株価分布は，リスク中立分布をベースにしてリスク回避度の影響を考慮した分布であり，これをリアル分布と呼ぶ．本研究では，リアル分布を導く際の効用関数 $U(x)$ としてベキ型 $\frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ を仮定する．ここで γ はリスク回避度である．リアル分布 $\tilde{g}(x)$ は，リスク中立分布 $g(x)$ と，$U(x)$ を一階微分した限界効用関数 $U'(x)$ を用いて式（10）のように表せる．

$$\tilde{g}(x) = \frac{g(x)/U'(x)}{\int_0^\infty g(y)/U'(y) dy} = \frac{x^\gamma g(x)}{\int_0^\infty y^\gamma g(y) dy} \quad (10)$$

先行研究では，リアル分布を推定する際のリスク回避度 γ を，推定期間を通して一定と仮定している．加えて，オプション市場の投資家が合理的であると仮定し，投資家の予測するオプションの満期時点における株価のリアル分布が満期時点の実現株価と最も整合的となるようにリスク回避度を推定している．具体的には，分析期間における全てのオプションの満期時点 i，$i = 1, \cdots, n$ におけるリスク中立分布（パラメータセット θ_i は推定済み）と未知パラメータであるリスク回避度から構成されるリアル分布 $\tilde{g}(x|\theta_i, \gamma)$ と実現株価

$S_{T,i}$ を用いて得られる対数尤度関数（式 (11)）を最大化することにより，γ を推定してリアル分布を導出する．この場合，対数尤度に基づくリアル分布の予測力は原理的に必ずリスク中立分布の予測力に勝ることとなる．このため，先行研究のリアル分布に関する予測力の分析は不適切といわざるを得ない．

$$\ln\left(L\left(S_{T,1}, S_{T,2} \ldots S_{T,n}|\gamma\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\tilde{g}\left(S_{T,i}|\theta_i, \gamma\right)\right) \qquad (11)$$

そこで本研究では，現時点から適切な期間だけ遡った（ここでは，10 期間，20 期間，30 期間を採用する）リスク中立分布と実現株価を用いて，先と同様にリスク回避度を推定する．得られたリスク回避度を利用して，現時点の次に満期を迎えるリスク中立分布をリアル分布に変換する．同様の手順を逐次繰り返せば，リアル分布を導出する時点までにのみ利用可能な情報に基づいてリアル分布を導出することができる．このように導出されたリアル分布と実現株価に基づいて対数尤度（この場合，式 (11) のリスク回避度は推定済みでありかつオプションの満期 i に依存したものとなっている）を求めれば，リアル分布の予測力を先に求めたリスク中立分布や次節で導出するヒストリカル分布の予測力と比較することに意義が出てくる．

3.3 ヒストリカル分布の導出法

ヒストリカル分布は，将来の株価リターンの分布が現時点から適切な期間だけ遡った（ここでは，40 期間を採用する）時点まで株価をサンプリングして得られる株価リターン（対数リターン）の分布に従うと仮定し導出する．株価のサンプリング間隔は，現時点から予測対象となる満期までの営業日数（T）に合わせる．このようにして得られた株価リターンの実現値を $R_{T,i}$（$i = 1, \cdots, n$，ここで n は 40）とすると，現時点 0 における株価 S_0 を用いて T 営業日後の株価 $S_{T,i}$（$i = 1, \cdots, n$，ここで n は 40）は $S_{T,i} = S_0 \exp\left(R_{T,i}\right)$ と与えられる．この株価 S_T を利用して，最尤法により各モデルに関するヒストリカル分布のパラメータセット θ を推定する．

4. 実 証 分 析

4.1 デ ー タ

分析に用いるオプションデータは，2003 年 6 月から 2008 年 4 月までの各月に満期を迎える日経 225 コール・オプションとプット・オプションである．分析対象となるオプションの残存期間が 5 営業日，10 営業日，15 営業日であるため，各月の満期から，5 営業日，10 営業日，15 営業日遡った時点におけるオプション価格を用いる．実証分析は，リアル分布の予測力の分析を除き（データ数の制約のため），上記の期間をサブプライム問題発生以前の市場が安定していた期間である 2003 年 6 月～2007 年 5 月の 48 期間（“安定期” と呼ぶ）と，サブプライム問題発生以後の市場が混乱していた期間である 2007 年 6 月～2008 年 4 月の 11 期間（“混乱期” と呼ぶ）に分割し，これらの期間を対象とした分析を試みる．

ヒストリカル分布を推定する際には，2000 年 6 月から 2008 年 4 月までの日経 225index 終値を採用し，40 期間の株価リターンデータを用いて推定を行った．また尤度関数の評価に用いる実現株価は特別清算指数（SpecialQuotation）を採用した．なお本研究における無リスク金利 r は 0 と設定した．

表 1 価格誤差 (円) 安定期

予測期間	BS	MLN	JD	GB2
5 営業日	2.40	0.28	0.47	1.03
10 営業日	3.35	0.68	0.89	1.30
15 営業日	4.42	1.18	1.33	1.91

表 2 価格誤差 (円) 混乱期

予測期間	BS	MLN	JD	GB2
5 営業日	11.37	0.62	1.25	2.77
10 営業日	13.28	2.61	1.49	2.37
15 営業日	20.88	4.16	2.40	2.89

4.2 分析結果と考察

4.2.1 オプション市場価格へのフィッティング

安定期におけるオプションモデル価格とオプション市場価格との絶対誤差の平均を表 1 に，混乱期におけるものを表 2 に示した．表 1 から，まず，BS モデルのフィッティングが他の 3 つのモデルに劣ることがわかる．これは BS モデルが，投資家の予測するリスク中立分布の高次モーメントの影響を捉えることができないためであると考えられる．混乱期では，何れのモデルに関してもオプション市場価格へのフィッティングは絶対値ベースで安定期よりも悪くなるが，特に，BS モデルの価格誤差は絶対値ベースで極めて大きいことがわかる．他のモデルのフィッティングは，BS モデルとの比較において相対的には安定期よりも優れている．何れの残存期間においても総じてフィッティングが良好なモデルは JD モデルである．混乱期にしばしば見られる株価が上下に大きくジャンプするような動きがリスク中立分布にも反映されおり，JD モデルはこれを捉えることができたのではないかと考えられる．

表 3　対数尤度 (安定期)

予測期間		BS	MLN	JD	GB2
5 営業日	リスク中立	-344.91	-345.76	-345.58	-343.60
	ヒストリカル	-345.62	-347.38	-351.18	-345.88
10 営業日	リスク中立	-362.96	-363.29	-361.75	-363.17
	ヒストリカル	-366.01	-364.10	-368.64	-365.45
15 営業日	リスク中立	-367.93	-368.93	-367.93	-367.40
	ヒストリカル	-370.16	-373.33	-373.49	-371.03

表 4　対数尤度 (混乱期)

予測期間		BS	MLN	JD	GB2
5 営業日	リスク中立	-348.86	-364.41	-361.96	-359.39
	ヒストリカル	-354.81	-356.20	-352.84	-352.63
10 営業日	リスク中立	-379.07	-384.70	-386.10	-384.04
	ヒストリカル	-381.47	-375.32	-379.46	-379.11
15 営業日	リスク中立	-404.20	-404.20	-402.51	-402.34
	ヒストリカル	-400.63	-389.67	-394.87	-400.89

4.2.2　リスク中立分布とヒストリカル分布の株価予測力

安定期における株価予測力を比較するために，リスク中立分布とヒストリカル分布の対数尤度（安定期）を表 3 に示した．リスク中立分布の対数尤度がヒストリカル分布のものよりも大きく，リスク中立分布の予測力は，ヒストリカル分布の予測力よりも概して高いといえる．つまり，相場の安定期においてはヒストリカル分布をオプション市場参加者が的確な相場観に基づいて修正するような形でリスク中立分布（オプション市場価格）を与えていることがわかる．

混乱期における株価予測力を比較するために，リスク中立分布とヒストリカル分布の対数尤度（混乱期）（安定期と観測数を同じにするため対数尤度を 48/11 倍した）を表 4 に示した．安定期との比較では，リスク中立分布，ヒストリカル分布を問わず対数尤度は小さくなっており，予測力は大きく劣る．混乱期は，サブプライム問題のため株価が大きく落ち込んだ時期であり，この株価の動きを予測することが難しかったことが伺える．また，混乱期においては，リスク中立分布の予測力がヒストリカル分布の予測力よりも概して低い．このことから，混乱期においては市場参加者の相場観はそれほど的確ではないためにヒストリカル分布にある種のノイズを加えたような形でリスク中立分布（オプション市場価格）を与えていると想定される．

4.2.3　リアル分布の株価予測力

全期間を通してリスク回避度が一定であると仮定して式 (11) で与えられる対数尤度を最大化することで導出したリアル分布の対数尤度からリスク中立分布の対数尤度を引いた値を表 5 に，推定されたリスク回避度の値を表 6 に示した．表 5 から，5，10，15 営業日でリアル分布の対数尤度はリスク中立分布の対数尤度よりも大きく，リアル分布の予測力がリスク中立分布の予測力よりも高くなることがわかった．また，表 6 から，リスク回避度は 5，10 営業日では負，15 営業日では正となり，投資家の効用関数は 5，10 営業日ではリスク愛好的，15 営業日に関してはリスク回避的となった．

表 5　リアル分布 (既知) とリスク中立分布の比較
(リアル対数尤度ーリスク中立対数尤度)

予測期間	BS	MLN	JD	GB2
5 営業日	3.70	3.25	3.08	3.04
10 営業日	0.29	0.26	0.26	0.25
15 営業日	0.66	0.64	0.65	0.65

表 6　リスク回避度 γ

予測期間	BS	MLN	JD	GB2
5 営業日	-15.57	-13.48	-12.37	-12.17
10 営業日	-3.10	-2.78	-2.74	-2.75
15 営業日	3.61	3.54	3.52	3.52

表 7　リアル分布 (予測) とリスク中立の比較
(リアル対数尤度ーリスク中立対数尤度)

予測期間	モデル	10 期間	20 期間	30 期間
5 営業日	BS	-2.81	1.07	2.89
	MLN	-2.56	0.52	2.48
	JD	-2.35	0.53	2.35
	GB2	-2.71	0.10	2.24
10 営業日	BS	-2.81	-1.69	0.00
	MLN	-2.78	-1.96	-0.04
	JD	-2.66	-1.99	-0.04
	GB2	-2.84	-1.98	-0.06
15 営業日	BS	-2.16	-1.61	-2.76
	MLN	-1.19	-1.48	-2.75
	JD	-2.82	-1.30	-2.78
	GB2	-1.26	-1.52	-2.79

節 3.2 に示した分析手法に基づいて，予測を行う時点までに利用可能な情報に基づいて導出したリアル分布の予測力をリスク中立分布の予測力と比較する．表 7 には，リアル分布の対数尤度からリスク中立分布の対数尤度を引いたものを示した．残存期間（予測期間）が 5 営業日の場合に，20，30 期間を用いてリスク回避度を推定したリアル分布の対数尤度がリスク中立分布の対数尤度よりも上回っているが，リアル分布の予測力はリスク中立分布に劣るケースが多い．リアル分布の株価予測力がリスク中立分布のものよりも高くなるとは限らないことが分かった．

参　考　文　献

1) Liu, X. , Shackleton, M. B. , Taylor, S. J. , and Xu, X. "Closed-form transformations from risk-neutral to real-world distributions," *Journal of Banking and Finance*, **31**,(2007),1501-1520.