アルゴリズム 4－2
（1988. 11. 25）

サーチライト・スケジューリング問題

山下雅史†， 杉原一夫††， 鈴木一郎†††
†広島大学，††Univ. of Hawaii at Manoa，†††Univ. of Wisconsin-Milwaukee

本論文では，二次元単純閉領域内を逃げ回る泥棒を幾つかのサーチライトで見つける問題について考察する．サーチライトは固定された位置にあり，一本の光線を発している．光線は領域内の境界を突き抜けることはできないが，光線の方向は連続的に変えることはできる．ある時間に泥棒が発見されるのはサーチライトの光線がその泥棒上にあるとき，また，その時に限る．泥棒は速度制限無しで連続的に移動できる点と見なす．目的は与えられたインスタンスにおいて，泥棒がどのように移動するかにかかわらず，泥棒を発見するための探索スケジュールが存在するかどうかを決定することである．与えられた領域の境界上に少なくとも１つのサーチライトがあるようなインスタンスに対する探索スケジュールを求める問題は境界上にサーチライトがないの場合に帰着させることができることを示す．また，探索スケジュールが存在するための十分条件も示される．

THE SEARCHLIGHT SCHEDULING PROBLEM

Masafumi YAMASHITA†, Kazuo SUGIHARA†† and Ichiro SUZUKI†††

† Dept. of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Hiroshima Univ., Higashi-Hiroshima 724, Japan

†† Dept. of Information and Computer Sciences, Univ. of Hawaii at Manoa, Honolulu, HI 96822

††† Dept. of Electrical Engineering and Computer Secience, Univ. of Wisconsin-Milwaukee, Milwaukee, WI 53201

We consider the problem of searching for a mobile robber in a closed simple two-dimensional region by a number of searchlights. A searchlight is a stationary point which emits a single ray. The ray cannot penetrate the boundary of the region, but its direction can be changed continuously. A point is detected at a given time iff it is on the ray of a searchlight. A robber is a point which can move continuously with unbounded speed. First we show that the problem of obtaining a search schedule for an instance having at least one searchlight on the boundary of a given region can be reduced to that for instances having no searchlights on the boundary. The reduction is achieved by recursive applications if a simple search starategy called One-Way Sweep Strategy. Additional sufficient conditions for existence of a search schdule are also presented.

1. はじめに

本論文では，二次元単純閉領域内を逃げ回る泥棒を幾つかのサーチライトで見つける問題について考察する．サーチライトは固定された位置にあり，一本の光線を発している．光線は領域内の境界を突き抜けることはできないが，光線の方向は連続的に変えることはできる．ある時間に泥棒が発見されるのはサーチライトの光線がその泥棒上にあるとき，また，その時に限るとする．泥棒は速度制限無しで連続的に移動できる点とみなす．この問題をサーチライト・スケジューリング問題と呼ぶ．目的は，あたえられたインスタンスにおいて，泥棒がどのように移動するかにかかわらず，泥棒を発見するための探索スケジュールが存在するかどうかを決定することである．（ある仮定，例えば，n角形の領域が与えられたとして，そのときの問題の計算の複雑さを調べることがこの論文の目的ではない．）サーチライト・スケジューリング問題の応用としてはサーチライトやTVカメラで無許可の侵入者を見つけるような工場の安全管理のなどが考えられる．

サーチライト・スケジューリング問題では、サーチライトの位置は問題のインスタンスの一部として与えられる．与えられた領域内のどの点も少なくとも一つのサーチライトからは見ることができるときに限り，探索スケジュールが存在するので，サーチライト・スケジューリング問題のインスタンスはよく知られているアート・ギャラリー問題[1-6]の解である．アート・ギャラリー問題は与えられた領域のどんな点も少なくとも一人のガードマンから見えるようにガードマンの位置を計算することを目的とした問題である．

2. 問題の定式化

以下では次のような表記法を用いる．Rの領域の境界を$b(R)$とする．もしRが単純閉領域ならば，２点$x,y \in b(R)$に対して，$[x,y]_{b(R)}$（または$(a,\ b)_{b(R)}$）は，$\mathbf{x}$から$\mathbf{y}$へ反時計回りにとった$b(R)$の連続閉（または開）セグメントを表すものとする．

形式的には，サーチライト・スケジューリング問題のインスタンスは対$P=(D,L)$と表す．ここで，Dは２次元の単純閉領域で，Lは「サーチライト」†と呼ばれる点$l \in D$の集合である．点xがサーチライトlから「見える」のは$\overline{lx} \subseteq D$††のときで，またそのときに限る．また，$V_l$は$l$から見える点の集合を表す．

［定義１］サーチライト$l \in L$のスケジューリングとは$[0,T]$からRへの連続関数f_lと定義する．ここで，$[0,T]$はある実時間期間でRは実数の集合である．時刻tにおけるlの光線はV_lと　l†††から方向$f_l(t)$で放出される半無限の光線との交わりである．また，lが時刻tに点xに向けられているとは，xがtにlの光線上にあることを言う．□

［定義２］軌道関数rは実時間からDへの連続関数である．rが時刻tに発見されるのはtに$r(t)$に向けられる$l \in L$が存在するときである．□

［定義３］　$F=\{f_i \mid f_i:[0,T] \rightarrow R$が$l \in L$のスケジュール$\}$が$P$に対する探索スケジュールであるとは任意の軌道関数$r$に対して，時刻$t$で$r$が発見されるような$0 \leq t \leq T$なる$t$が存在するときである．□

軌道関数rは泥棒の動きを表す．定義１，２，３は次の２つの条件を表現している．

(1) どんな瞬間もサーチライトの光線上にある点のみが見える．
(2) 泥棒は速度制限無しで動くことができる．

次の定義は探索過程の別の解釈を与えるものである．

［定義４］領域$R \subseteq D$が時刻tでクリアであるのは$r(t) \in R$なる任意の軌道関数rに対して，rが時刻t'で発見されるような$0 \leq t \leq T$なるt'が存在するときを言う．Rがクリアでないときを汚れている(contaminated)という．□

明らかにRが時刻tでクリアなのはRに発見されてない泥棒がいないときである．定義により，Dは初期状態（時刻０）では汚れており，探索スケジュールが終了した時点でクリアになる．

［例１］図１(a)は３つのサーチライトl_1, l_2, l_3をもつ問題のインスタンスを示している．以下は探索スケジュールである.(ここでは l_iの関数f_{l_i}を明示する代わりに「l_iを点$\mathbf{x}$に向ける」や「l_iを反時計回りに回す」というフレーズを用いる．)

---

† ここではサーチライトは相異なる点と仮定する．しかし，本論文の結果は２つ以上のサーチライトが同じ位置にある場合に簡単に拡張できる．

†† あるサーチライト$l' \in L-l$に対して(1) $l' \in \overline{lx}$であるか　(2) $\overline{lx} \cap b(D) \neq \phi$であるかにかかわらず，$\overline{lx} \subseteq D$であるならば$x$は$l$から見えることに注意せよ．

††† $f_l(t)$の値はラジアンである．方向はxから反時計回りに測られる．

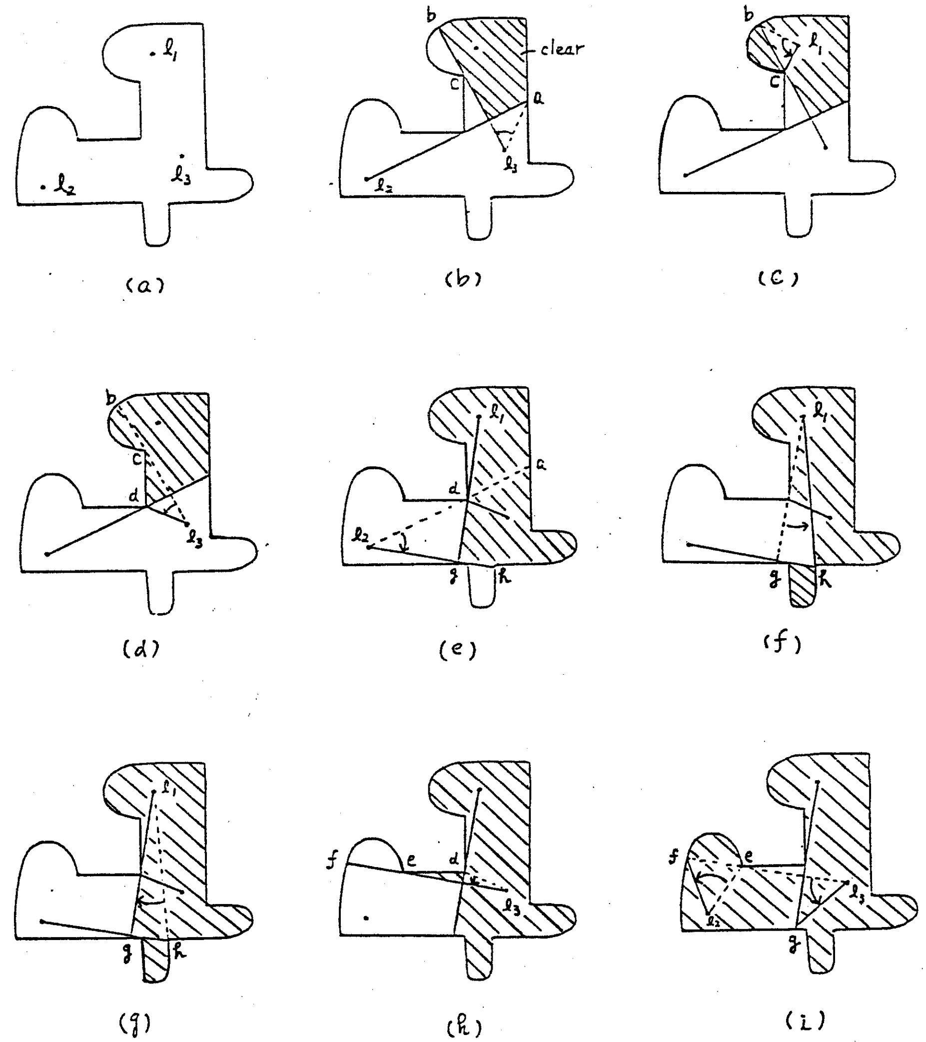


図1.サーチライト・スケジューリング問題のインスタンスに対する探索スケジュール

1. l_2をａに向ける．
2. l_3をａに向け，ｂに向くまで反時計回りに回す（図1(b)）．
3. l_1をｂに向け，ｃに向くまで反時計回りに回す（図1(c)）．
4. l_3をｄに向くまで反時計回りに回す（図1(d)）．
5. l_1をｇに向ける．
6. l_2をｈに向くまで反時計回りに回す（図1(e)）．
7. l_1をｈに向くまで反時計回りに回す（図1(f)）．
8. l_1をｇに向くまで時計回りに回す（図1(g)）．
9. l_3をｅに向くまで反時計回りに回す（図1(h)）．
10. l_2をｅに向け，ｆに向くまで反時計回りに回す．
11. l_3をｇに向くまで反時計回りに回す（図1(i)）．

□

［例２］全てのインスタンスに対してスケジュールが存在するわけではない．図２にスケジュールが存在しないインスタンスの例を示す．このことは定理５から示される．□

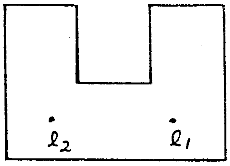


図2．探索スケジュールのないインスタンス例

この論文中では任意に与えられたインスタンス $P=(D,L)$ が次の条件 $(P1)$ と $(P2)$ を満足すると仮定する．なぜなら，明らかに $(P1)$ と $(P2)$ は探索スケジュールが存在するための必要十分条件だからである．

$(P1)$ $D=\bigcup_{l\in L} V_l$．これは D 内のどんな点も少なくとも１つのサーチライトからは見える．)

$(P2)$ 各 $l\in L$ について，$l\in R(D)$ かまたは，ある $l'\in L-l$ に対して $l'\in V_{l'}$．（どのサーチライトも境界上にあるか，または別のサーチライトから見える．)

3. 一方向一掃戦略

与えられた領域の境界上に少なくとも１つのサーチライトがあるようなインスタンスに対する探索スケジュールを求める問題は境界上にサーチライトがないインスタンスの場合の問題に帰着できることを示す．これは一方向一掃戦略と呼ばれる単純な探索方法を適用して帰着させることができる．探索スケジュールが存在するための十分条件も示される．

$P=(D,L)$ を $b(D)\cap L\neq\phi$，すなわち，D の境界上に少なくとも１つのサーチライトがあるようなインスタンスとする．D を探索する次のような戦略を考えてみよう．

［一方向一掃戦略］

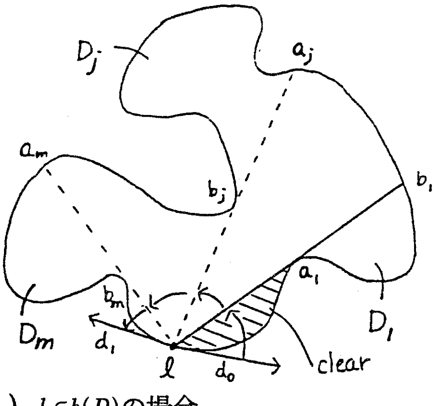
D の境界上にサーチライト $l\in b(D)\cap L$ を選ぶ．$1\leq j\leq m$ のとき，$(a_j,b_j)_{b(D)}\subseteq b(D)-V_l$ を l から見えない $b(D)$ の極大開セグメントとする．図３(a)のように $l, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_m, b_m$ が $B(D)$ 内に反時計回りの順で現われるものと仮定する．D_j をその境界が $[a_j,b_j]_{b(D)}\cup\overline{b_j a_j}$ となるような単純閉領域とする．また $d_0<d_1<d_0+2\pi$ なる d_0 と d_1 を l の光線の方向が連続的に d_0 から d_1 へ変わるとき l がすべての点 $x\in V_l$ に向けられるような方向とする．そして以下を実行する．

1. l の方向を d_0 にセットする．
2. **for** $j=1$ **to** m **do**
   - 2.1 l を a_j と b_j に向くまで反時計逆回りに回す．
   - 2.2 D_j を l を回さずに他のサーチライトを用いてクリアする†.
3. l をその方向が d_1 になるまで反時計回りに回す．□

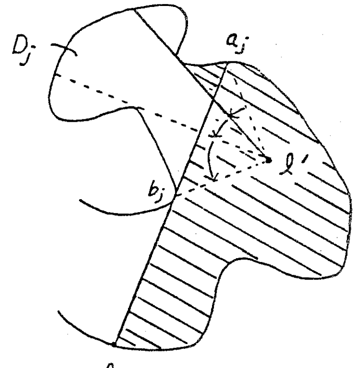
ステップ2.2において，どの D_j も l を回さずにクリアされたら，一方向一掃戦略の実行が終了したとき D はクリアになっている．

次にどのようにして各 D_j がクリアされ得るかを考察してみよう．もし D_j の境界 $b(D)$ 上にサーチライト $l'\neq l$ が存在するならば，明らかに一方向一掃戦略は D_j に再帰的に適用できる．では，$b(D)$ 上にはサーチライトがないが，$l'\notin D_j$ かつ $(D_j-b(D_j))\cap V_l'\neq\phi$ となる，すなわち，l' が D_j の外側にありかつ，D_j の内部の少なくとも一点が l' から見えるようなサーチライト $l'\neq l$ が存在するときを想定してみよう．

† この実行はできるかも知れないし、できないかもしれない．



（ａ）$l\in b(D)$ の場合



（ｂ）$l'\notin R_j$ の場合

図３．一方向一掃戦略

すると図3(b)で示すように，D_jを一掃する問題をl'から見えないD_jの幾つかのサブ領域を一掃する問題に帰着させるためには，同様の戦略を（変更を少し加えることにより）D_jに適用することができることが簡単にわかるであろう．そのようなl'が存在しないときは，この戦略はD_jには適用できない．

一方向一掃戦略をDに，またできる限り再帰的にそのサブ領域に適用することを考えてみよう．すると次の定理が得られる．

［定理１］ $P=(D,L)$を$b(D)\cup L\neq\phi$なるインスタンスとする． Pに対するスケジュールが存在するための必要十分条件は，次の２つの条件を持つすべての領域$R\subseteq D$（極大孤立領域と呼ぶ）についてインスタンス$P_R=(R,R\cap L)$に対する探索スケジュールが存在することである．

（条件１） Rは一方向一掃戦略を再帰的に適用している間に現われたサブ領域である．

（条件２）その戦略はステップ2.2ではRに再帰的に適用できない．□

一方向一掃戦略が適用できないようなサブ領域$R\subseteq D$の境界上にサーチライトが存在しないので，定理１により，Dの境界上に少なくとも１つのサーチライトがあるようなインスタンス$P(D)=(D,L)$に対する探索スケジュールを見つける問題は境界上にサーチライトがない場合の問題に帰着させることができる．

この章の結論として，探索スケジュールの存在性に関する３つの十分条件を導こう．

［定義５］ $P=(L,D)$をインスタンスとする．Pのサーチライト可視グラフは無向グラフ$SVG(P)=(L,E)$である．ここで枝集合Eは次のように定める．任意のlとl'に対して，$(l,l')\in E$が成り立つのは$l\neq l'$かつ$l\in V_{l'}$のとき，またその時に限る．□

［定義６］インスタンス$P=(D,L)$が安定とは$SVG(P)$のどんな連結成分$G_i=(L_i,E_i)$についても$l\subseteq b(D)$なるサーチライト $l\in L_i$が少なくとも１つ存在するときを言う．□

［定理２］ $P=(D,L)$が安定ならば，Pに対する探索スケジュールが存在する．

（証明） 定理１を考慮すると，Pが安定ならば，極大孤立領域 $R\subseteq D$ は存在しないことを示せば十分である．極大孤立領域 $R\subseteq D$ が存在すると仮定する．$P_R=(R,L_R)$ なるインスタンスを考える．ここで，$L_R=(R-b(R))\cap L$ は $R-b(R)$ 内にあるサーチライトの集合である．条件(P1)と定理１の極大孤立領域であるための条件１より，以下の３つが成立する．

(1) $L_R\neq\phi$.

(2) $SVG(P_R)$ のどんな連結成分も$SVG(P)$ の連結成分である．

(3) $SVG(P_R)$ のどんな連結成分 $G_i=(L_i,E_i)$ に対して， $L_i\cap b(D)=\phi$ ．

これはPが安定であることに矛盾する．□

［補題１］$P=(D,L)$をインスタンスとする．あるサーチライト$l,l'\in L$に対して， $l\in V_{l'}$ と仮定する．点 $a,b\in b(D)$を a, l, l', bが $\overline{ab}$上にこの順で現われ，かつ$\overline{ab}\in D$ となるようなものの中で $|\overline{ab}|$が最長となるような点とする．（以降，このような$\overline{ab}$をカットと呼ぶ．）R_1 と R_2 をその領域がそれぞれ $[a,b]_{b(D)}\cup\overline{ba}$ と $[b,a]_{b(D)}\cup\overline{ab}$ であるような閉領域とする．Pに対する探索スケジュールが存在するための必要十分条件は次の２条件が成立することである．

1. 初期状態から，次の状態に到達可能である．
   (a) 光線lはl'を指し，光線l'はlを指している．
   (b) R_1がクリアである．
2. 初期状態から次の状態に到達可能である．
   (a) 光線lはl'を指し，光線l'はlを指している．
   (b) R_2がクリアである．

(証明）必要条件は明らかである．十分条件を証明するために，条件１を満たす状態に到達していると仮定する（図４）．この状態でR_2がクリアでないならば，条件２を満たす状態にするためのスケジュールを”逆向き”に実行する．これにより，Dはクリアとなる．□

［定理３］ $P=(D,L)$をインスタンスとする．$SVG(P)$が連結ならば，インスタンス$P'=(D, L\cup l')$に対して探索スケジュールが存在する．ここで，$l'\in D$はL内にない任意のサーチライトである．

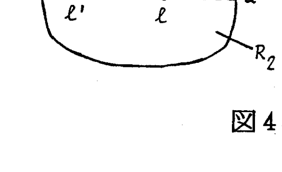


図４．補題１の説明図

(証明）条件$(P1)$により $D=\bigcup_{l\in L} V_l$なので，$l'\in V_l$となるサーチライト $l\in L$ が存在する．$\overline{ab}$をa, l, l', bがこの順で $\overline{ab}$上に現われるカットとする（図５）．D_u とD_l をその境界がそれぞれ $[a,b]_{b(D)}\cup\overline{ba}$ と $[b,a]_{b(D)}\cup\overline{ab}$ になる閉領域とする．l' をaに向けたままlをaからbへ反時計回りに回すようにD_uに一方向一掃戦略を適用する．lがD_uの境界上のサーチライトと見なせるので，$SVG(P)$が連結であることは極大孤立領域 $R\subseteq D_u$ が存在しないことを保証する．これと定理１により，戦略の実行が終了したとき，光線lはl'を指し，光線l'は lを指しており，D_uはクリアとなる．ここで，l'の方向は実行中変えられる必要のないことに注意せよ．同様に，lはl'を指し，l'はlを指しており，D_lがクリアとなるもう１つの状態にも初期状態から到達可能である．従って補題１よりP'のための探索スケジュールが存在する．□

［補題２］$P=(D,L)$をインスタンスとする．任意のサーチライト$l\in L$ に対して，$(a,b)_{b(D)}\subseteq b(D)-V_l$ をlから見えない$b(D)$の極大開セグメントとし，Rをその境界が $[a,b]_{b(D)}\cup\overline{ba}$ となる単純閉領域とする．$SVG(P)$が連結ならば，Rはlをaとbに向けたままクリアできる．

（証明）lがaとbに向けられていると仮定する（図６）．条件$(P1)$と$SVG(P)$が連結であることより，(1) $l'\in\overline{ab}$ か (2) $l'\notin R$かつ$(R-b(R))\cap V_{l'}\neq\phi$ のいずれかが成り立つサーチライトl'が存在する．Rに一方向一掃戦略が適用できる．$SVG(P)$は連結なので極大孤立領域 $R'\subseteq R$ は存在しないため，定理１より戦略の実行が終了したときRはクリアになっている．□

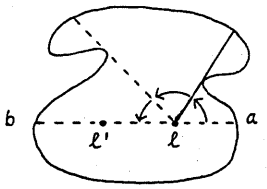


図５．付加されたサーチライト l'

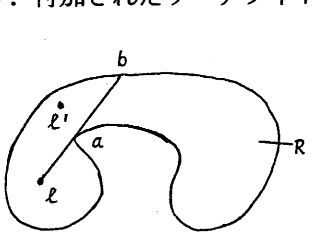


図６．lがaとbに向けられている場合

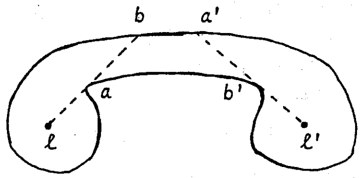


図７．定理４の説明図

［定理４］ $P=(D,L)$をインスタンスとする．$SVG(P)$が連結で$V_l\cap V_{l'}$ がϕか単点であるような２つのサーチライト$l,l'\in L$が存在するならば，Pに対する探索スケジュールが存在する．

（証明）$(a,b)_{b(D)}\subseteq b(D)-V_l$ をlから見えない$b(D)$の極大開セグメントとする．ここで，$l'\in R$ でRはその境界が $[a,b]_{b(D)}\cup\overline{ba}$ である単純閉領域である．同様に $(a',b')_{b(D)}\subseteq b(D)-V_{l'}$ をl'から見えない$b(D)$の極大開セグメントとする．ここで，$l'\in R'$ でR'はその境界が $[a',b']_{b(D)}\cup\overline{b'a'}$ である単純閉領域である(図７)．$SVG(P)$は連結なので補題２より，Rはクリアされる．$V_l\cap V_{l'}$ はϕか単一点のいずれかなので，この状態で $D-R'$ はクリアされる．また，補題２より，この状態から始めてR'はl'をaとbに向けたままクリアできる．このように Dもクリアになる．□

4. 境界上にサーチライトをもたないインスタンス

$P=(D,L)$を $b(D)\cap L=\phi$ なるインスタンスとする．サーチライトの数$|L|$が２または３の時Pに対する探索スケジュールの存在性についてのいろいろな条件を示そう．

4.1. $|L|=2$

$L=\{l_1,l_2\}$とし，a_0とb_0を図８で示すような$b(D)$内の点とする．$W_u=[a_0,b_0]_{b(D)}$，$W_l=[b_0,a_0]_{b(D)}$とすると，次の必要十分条件が得られる．

［定理５］ Pに対する探索スケジュールが存在するのは次の２条件のうち少なくとも１つが成立するとき，またその時に限る．

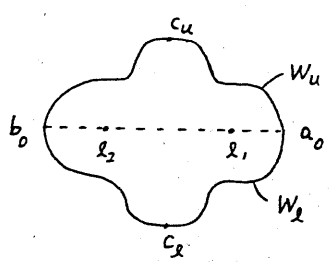


図８．定理５の説明図

1．$[c_u,c_l]_{b(D)}\in V_{l_1}$ と $[c_l,c_u]_{b(D)}\in V_{l_2}$ が成り立つような点 $c_u\in W_u$ と $c_l\in W_l$ が存在する．

2．各 $s\in u,l$ について，$W_s\cap\overline{l_1l_2}\neq\phi$ または，ある $i\in\{1,2\}$ に対して $W_s\subseteq V_{l_i}$ が成り立つ．□

図２のインスタンスは定理５の条件の１も２も満たさないことを検証できる．

4.2. $|L|=3$

$|L|=3$ の場合はかなり複雑になる．スペースに制限があるので，ここでは得られた十分条件のうちの幾つかのみを示すことにする．残りについては文献［７］を参照されたい．

［定義７］ $P=(D,L)$ が浅い(shallow)とは，どんなサーチライト $l\in L$ に対してもまた，$R\cap L=\phi$ なる l から見えないどんな極大開領域 $R\subseteq D-V_l$ に対しても，$R\subseteq V_{l'}$ となるサーチライト $l'\in L$ が存在するときを言う．□

図１と図１０のインスタンスはどちらも浅い．

$L=\{l_1,l_2,l_3\}$ について，一般性を失うことなく，l_3 が l_1 から l_2 へ向いた線セグメントの左側に位置すると仮定する．次の３つのケースに分けて議論する．

4.2.1. ある $i,j\in\{1,2,3\}$ に対して $l_i\in V_{l_j}$ のとき

一般性を失わずに，$l_1\in V_{l_2}$ と仮定し，図９(a)で与えられる記号を用いる．

［定理６］ P に対する探索スケジュールが存在するのは，P が浅くて次のような条件の内の少なくとも１つが成り立つときである．

（ｃ１） $[a_3,b_3]_{b(D)}\subseteq V_{l_2}\cup V_{l_3}$.

（ｃ２） $[a_3,b_3]_{b(D)}\subseteq V_{l_1}\cup V_{l_3}$.

（ｃ３） $[b_1,c_1]_{b(D)}\subseteq V_{l_3}$.

（ｃ４） $[c_2,a_2]_{b(D)}\subseteq V_{l_3}$.

（ｃ５） $l_3\in\overline{c_1b_2}$.

（ｃ６） $l_3\in\overline{c_2a_1}$.

（ｃ７）次の条件を同時に満たす点 p,q,r が存在する．

1. p,q,r はこの順で $[b_2,a_1]_{b(D)}$ 内に現われる．
2. $(p,r)_{b(D)}\subseteq b(D)-V_{l_1}$ が l_1 から見えない極大開領域である．
3. $[b_2,p]_{b(D)}\subseteq V_{l_1}$,　$[p,q]_{b(D)}\subseteq V_{l_3}$,　$[q,r]_{b(D)}\subseteq V_{l_2}$,　$[r,a_1]_{b(D)}\subseteq V_{l_1}\cup V_{l_3}$.

（ｃ８）（ｃ７）と対称な条件．

（ｃ９）以下の条件の全てが同時に満たされる．

1. 以下の条件を満たす $p,q,r\in[b_2,a_1]_{b(D)}$ が存在する．
   (a) p,q,r がこの順で $[b_2,a_1]_{b(D)}$ 内に現われる．
   (b) $r\in[b_3,a_1]_{b(D)}$.
   (c) l_2,p,q が一直線上にある．
   (d) $[b_2,p]_{b(D)}\subseteq V_{l_1}$, $[p,q]_{b(D)}\subseteq V_{l_1}\cup V_{l_3}$, $[q,r]_{b(D)}\subseteq V_{l_2}$,　$[r,a_1]_{b(D)}\subseteq V_{l_3}$.
2. $\overline{l_2r}$ と $\overline{l_3v}$ の交点は $\overrightarrow{pl_1}$ の"左"に位置する．
3. $v\in[b_1,c_1]_{b(D)}$ を $[b_1,v]_{b(D)}\subseteq V_{l_3}$ であるような　c_1 に最も近い点とする．このとき，l_3，c_1 および v は一直線上にある．

（ｃ１０）（ｃ９）と対称な条件．□

例えば図１のインスタンスは条件（ｃ１)を満たし，図１０の（ａ）と（ｂ）はそれぞれ条件(ｃ７)と(ｃ９)を満たすことを検証できる．

4.2.2. 任意の $i,j\in 1,2,3$ に対して $\overline{l_il_j}\cap b(D)=\phi$ のとき

図９(b)で与えられた記号を用いるとする．

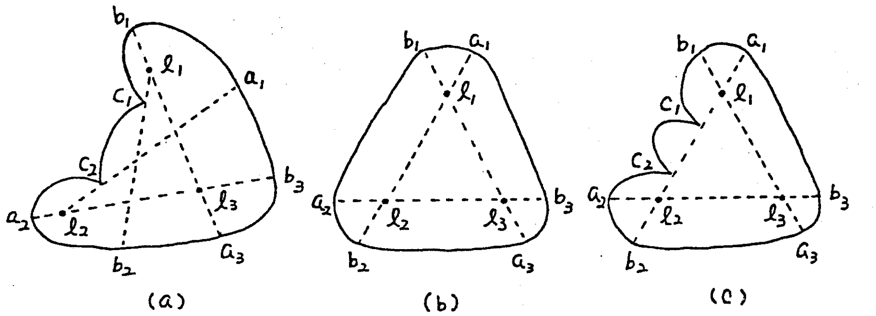


図９．定理６,７,８の説明図

［定理７］ Pに対する探索スケジュールが存在するのはPが浅くかつ，次の条件のうちの１つが成立するときである．（サーチライトの名前は周期的に付け替えることができる．）

（ｄ１） $[a_1,b_1]_{b(D)} \subseteq V_{l_2}$ または $[a_1,b_1]_{b(D)} \subseteq V_{l_3}$ が成立する．

（ｄ２）次の２条件が同時に成立する．

1. $[a_1,b_1]_{b(D)} \subseteq V_{l_2}\cup V_{l_3}$.
2. $[b_2,a_3]_{b(D)} \subseteq V_{l_1}\cup V_{l_3}$かつ $[p,a_3]_{b(D)} \subseteq V_{l_1}\cup V_{l_2}$となる点 $p\in[b_2,a_3]_{b(D)}$が存在する．

（ｄ３） $[a_2,p]_{b(D)} \subseteq V_{l_1}\cup V_{l_3}$ かつ$[p,b_3]_{b(D)} \subseteq V_{l_1}\cup V_{l_2}$となる点 $p\in[b_2,a_3]_{b(D)}$が存在する．

（ｄ４）次の２条件が同時に成立する．

1. $[b_3,b_1]_{b(D)} \subseteq V_{l_2}\cup V_{l_3}$.
2. 次の３条件のうちの１つが成立する．
   (a) $q\in V_{l_2}$, $[a_3,q]_{b(D)} \subseteq V_{l_1}\cup V_{l_2}$, $[q,b_3]_{b(D)} \subseteq V_{l_2}\cup V_{l_3}$となる点 $q\in[a_3,b_3]_{b(D)}$が存在する．
   (b) $r\in V_{l_3}$かつ $[r,b_2]_{b(D)} \subseteq V_{l_1}\cup V_{l_3}$となる点 $r\in[a_2,b_2]_{b(D)}$が存在する．
   (c) $s\in V_{l_3}$かつ $[b_2,s]_{b(D)} \subseteq V_{l_1}$となる点 $s\in[b_2,a_3]_{b(D)}$が存在する．

（ｄ５）次の２条件が同時に成立する．

1. $[a_1,a_2]_{b(D)} \subseteq V_{l_2}\cup V_{l_3}$.
2. 次の３条件のうちの１つが成立する．
   (a) $q\in V_{l_3}$, $[a_2,q]_{b(D)} \subseteq V_{l_2}\cup V_{l_3}$, $[q,b_2]_{b(D)} \subseteq V_{l_1}\cup V_{l_3}$となる点$q\in[a_2,b_2]_{b(D)}$が存在する．
   (b) $r\in V_{l_2}$かつ $[a_3,r]_{b(D)} \subseteq V_{l_1}\cup V_{l_2}$となる点$r\in[a_3,b_3]_{b(D)}$が存在する．
   (c) $s\in V_{l_2}$かつ $[s,a_3]_{b(D)} \subseteq V_{l_1}$となる点 $s\in[b_2,a_3]_{b(D)}$が存在する．□

4.2.3. どんな $i,j\in\{1,2,3\}$ に対しても $l_i\in V_{l_j}$ でかつ，ある $i,j\in\{1,2,3\}$ に対しても $\overline{l_il_j}\cap b(D)\neq\phi$ であるとき

一般性を失うことなく，$\overline{l_1l_2}\cap b(D)\neq\phi$と仮定できる．図９(c)で与えられる記号を用いる．

［定理８］ Pに対する探索スケジュールが存在するのは，Pが浅くかつ，（ｃ１）−（ｃ１０），（ｄ１）−（ｄ５）のうち１つが成り立つときである．□

5. 参考文献

[1] V.Chvátal,"A combinatorial theorem in plane geometory," *J.Combinatorial Theory(B)* 18,1975,pp.39-41.

[2] H.Edelsbrunner, J.O'Rourke and E.Welzl, "Stationing guards in rectilinear art galleries," *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 27,1984,pp.167-176.

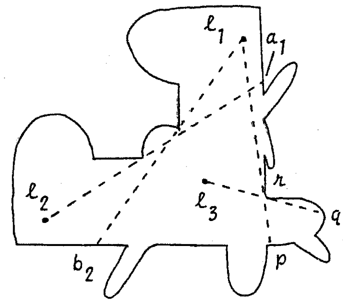
[3] S.Fisk,"A shor proof of Chvátal's watchman theorem," *J. Combinatorial Theory(B)* 24,1987,pp.374.

[4] J.Kahn, M.Klawe and D.Kleitman,"Traditional galleries require fewer watchmen," *SIAM J.Algebraic and Discrete Methods* 4,No.2,1983,pp.194-206.

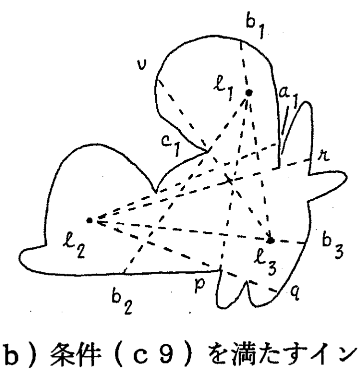
[5] D.T.Lee and A.K.Lin,"Computational complexity of Art Gallery problems," *Transactions on Information Theory* IT-32,No.2,1986,pp.276-282.

[6] J.O'Rourke,"An alternate proof of the rectilinear Art Gallery thorem," *J.Geometry* 21,1983,pp.118-130.

[7] K.Sugihara, I.Suzuki and M.Yamashita, "The searchlight scheduling problem,"Tech.ep.,EECS, University of Wisconsin-Milwaukee, in preparation.



（ａ）条件（ｃ７）を満たすインスタンス



（ｂ）条件（ｃ９）を満たすインスタンス

図１０．