アルゴリズム 19－2
（1991. 1. 29）

木の公平な重み付けについて

栗野俊一・深澤良彰
早稲田大学理工学部

本論文では、対称木と呼ぶ重みの公平に付けられた木の性質について述べる。この対称木は、木の各節点に正の値を重みとして割り振ったもので、その値には次の様な３つの制限が設けられている。(1) 全ての値は０より大きく、有限である。(2) 親の節点の値は、子の節点の値の総和である。(3) 木の中の対称な位置にある節点の値は同じである。一つの木に対して、この様な条件満たすような重み付けは、多々考えられる。本論文では、明かに対称木を作成するような重み付けを示し、それを拡張した方法を、幾つか紹介する。また、これらの方法によって重み付けられた対称木の性質を示す。

A Fair Weighting Method For Trees

Syun'ichi Kurino, Yoshiaki Fukazawa

School of Science and Engineering, Waseda University, 3-4-1, Okubo Shinjuku-ku, Tokyo 160, Japan

We show some attributes of fairly weighted trees which are called the symmetric tree. Each node in a symmetric tree has a weight which has following conditions: (1) Each weight is positive and finite. (2) Each weight is the sum of its children's weight. (3) Each weight is equal to that in a symmetric position. For a given tree, there are many fairly weighting methods with these conditions. In this paper, at first, we introduce some weighting methods that obviously make a symmetric tree, and extencd this methods. And we show various attributes of the symmetric tree which are weighted by our methods.

1 はじめに

同等な能力を持った複数のオブジェクトが一つの資源を共有しているとする。例えば、複数の同一構成のワークステーションが一つのネットワークを共有している、複数の同一樹勢の枝が一つの幹を共有しているなどの場合である。この時、本来ならばn個のオブジェクトがあれば、全体としてn倍の能力を持つにもかかわらず、この共有部分のために、それ以下の能力しか遂行できないことが多い。さらに、このような共有資源をもつ集団を一つの単位として考え、それらが複数集って、また別の資源を共有することを考える。ワークステーションの例では、単一のLANからゲートウエイを介したLANへの拡張を、枝の例では、幹が更に根を共有している状態を考えれば良い。このように考えると、全体は、共有資源を葉以外の節点とし、それを共有するオブジェクトを葉とする木構造をなす。このようなシステムが複雑になると、全体の能力の推定や、システムの一部分を変更した時の影響など、システムの性質を解析することが難しくなる。例えば、ワークステーションを複数接続する場合では、ワークステーションの特性によって、単一のLANにすべきか、ゲートウエイを介した方が良いのか判定する必要がある。また、新たに一台のワークステーションを追加した時のネットワークシステム全体の性能の変化はどうなるかを予想しなければならない。枝の例であれば、枝に実る果実を大きくする為に、栄養の集りやすい枝の実を残し、その他の枝の実を落とすが、その時、どの枝の実を選ぶべきかは問題である。

このようなシステムを、木構造で表わし、その節点に重みと呼ばれる値を割り付けモデル化する。この時、この重み付けは、次のような性質を満たさなければならない。第一に、それぞれの重みは、有限であると考える。第二に、階層と重みの関係から、ある節点の重みはその子の重みの総和になる。特に木構造の根の重みは、システム全体の能力の和を表わすと考えて良い。第三に、同等な位置にある、同等な能力をもったオブジェクトには、同じ重みを与える必要がある。これは、上記のような問題を扱う上で妥当な仮定である。

本論文では、このような性質を持つモデルを定義し、これを木の公平な重み付けと呼ぶことにする。そして、この定義を満たす重み付けの方法を述べ、その性質を示す。全体としては、単純な重み付け法からはじめ、次第に一般化した重み付け法を定義し、その性質について述べていく。

まず、2章では、準備として、木構造に対するいくつかの一般的な定義を示す。3章では、対象となるオブジェクトが同等である場合の公平な重み付けを定義する。そして、その定義を満たすような重み付け法をいくつか示し、その性質を述べる。また、この章では、明らかに公平であるような重み付けを、一般化することによって、新しい重み付けを導く。4章では、3章で述べた重み付け方法に対し、深さを考慮した拡張を行なう。5章では、3章で述べた重み付け方法に対し、能力差のあるオブジェクトを含むシステムが扱えるように拡張する。

2 準備

節点と呼ばれる要素の集合に対して、階層的な(親子の)関係を与えたものを木 [1, 2] といい、その関係を弧と呼ぶ。節点の内の1つを根と呼んで、他の節点と区別する。rを節点とし、$T_1, T_2, \dots, T_k$が木であって、これらの根が$r_1, r_2, \dots, r_k$であるとする。この時rを$r_1, r_2, \dots, r_k$の全ての親とすると、新しい木が得られる。この木ではrが根で$T_1, T_2, \dots, T_k$はこの根の部分木である。節点$r_1, r_2, \dots, r_k$は節点rの子と呼び、$Sn(r)$で表す。節点rを根とする部分木を$Tr(r)$で表す。

$n_1, n_2, \dots, n_k$が木の中の節点の列であって、$1 \leq i < k$に対してn_iがn_{i+1}の親になっている時、この列のことを節点n_1から節点n_kへの経路と呼ぶ。経路の長さ(距離)は、その経路に含まれる節点の数から1を引いた値である。根からある節点までの経路の長さを、その節点の深さという。

節点xから節点yへの経路が存在する時、xはyの先祖であるといい、yはxの子孫であるという。どの節点も自分自身の先祖であり、子孫でもある。自分自身以外の子孫を、真の子孫と呼ぶ。真の子孫をもたない節点を葉と呼ぶ。また、葉以外の節点を内部節点と呼ぶ。

同じ親をもつ節点同士を兄弟と呼ぶ。兄弟の中で最も左にある節点を長男と呼ぶ。

次に、同型の概念を定義する。節点r_1, r_2を根とする2つの部分木$Tr(r_1)$, $Tr(r_2)$が同型であるとは、$Sn(r_1)$から$Sn(r_2)$への、1対1で上への写像fが存在し、かつ全ての$Sn(r_1)$の要素xについて、$Tr(x)$と$Tr(f(x))$が同型になることである。ただし、単独の葉同士は同型と定義する。同型な木の例を図1に示す。同型の定義にしたがって対応する節点同士を、同型木対応節点と呼ぶ。図1のaとa', dとd'などがその例である。

一つの内部節点nに着目し、この節点の二つの子x、yを根とする部分木$Tr(x)$と$Tr(y)$が同型であるする。この時、$Tr(x)$と$Tr(y)$の同型対応節点n_xとn_yは対称であると言い、この対称な節点を対称節点と呼ぶ。特に対称な葉を対称葉と呼ぶ。

木の全ての節点に一定の規則で正の有限な数値を

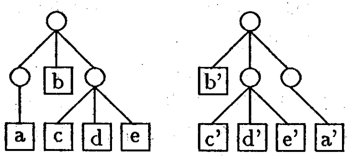

図 1: 同型な木

与えることがある。この時、この数値を節点 n の重みと呼び、$Wt(n)$ で表す。

木の中で、葉の深さは全て d であり、内部節点は全て w 個の子を持つようなものを幅 w、深さ d の完全木と呼び、Ct^d_w で表わす。この完全木は w^d 個の葉をもち、その全ての葉が対称葉である。

3 公平な重み付け法

定義 3.1 (対称重み付き木)
次の性質を持つ木を、対称重み付き木 *(*以下単に対称木*)* と呼ぶ。

正規性 全て節点 n には、重み $Wt(n)$ が与えられており、全ての節点の重みをそれらの最大値で割ることで正規化することができる。

加法性 各内部節点の重みは、子の節点の重みの和である。

対称性 対称節点は同じ重みを持つ。

この定義から直ちに次の性質が導かれる。

性質 3.1 (対称木の性質)
対称木の第三の条件、対称性は、次のように弱くすることができる。

弱対称性 対称葉は同じ重みを持つ。

つまり、正規性、加法性と弱対称性から対称性を導くことができる。

定義 3.2 (公平な重み付け法)
木に対する重み付けの結果が常に対称木となる時、その重み付け法は公平であると言う。そして、このような重み付け法を公平な重み付け法と呼ぶ。

3.1 従来の公平な重み付け法

ここでは、公平な重み付け法を紹介するために、二つの単純な重み付け法を示す。

定義 3.3 (トップダウン法)
次の規則を根から葉の方向に、繰返し適用する重み付けの方法をトップダウン法 *(*以下、単に *TD*法*)* と呼ぶ。この方法では、根に近い節点からトップダウン式に重みが定まる。

- *TD*法の重み付け規則*:*

  1. 根に適当な重みを付ける。

  2. 親の重みを子の数で等分した重みを全ての子に等しく付ける。

性質 3.2 (トップダウン法の性質)
*TD*法では、新たな節点を木に追加すると、追加した節点の親の子孫の重みが変化する。

定義 3.4 (ボトムアップ法)
次の規則を根から葉の方向に、繰返し適用する重み付けの方法をボトムアップ法 *(*以下、単に *BU*法*)* と呼ぶ。この方法では、*TD*法とは逆に、葉に近い節点からボトムアップ式に重みが定まる。

- *BU*法の重み付け規則*:*

  1. 葉に同一の重みを付ける。

  2. 親の重みは、子の重みの総和にする。

性質 3.3 (ボトムアップ法の性質)
*BU*法では、新たな節点を木に追加すると、追加した節点の祖先の重みが変化する。

この二つの重み付け法が共に公平である事は明らかである。次節では、この二つの重み付け法を統合・一般化した重み付け法を示す。

3.2 *TD*法と *BU*法の統合と一般化

前節の二つの重み付け方法の例は、単純であるが、次の二つの性質をそれぞれ表わしている。

***TD*法** 対称性を保つには、根から葉へ、親の重みと子の数を用いて、子の重みを平等に決めて行けば良い。

***BU*法** 加法性を保つには、葉から根へ、子の重みの合計を親の重みと決めて行けば良い。

したがって、この二つの重み付け法を含み、かつ一般化した重み付け法には、この根から葉への過程 (*TD*過程) と葉から根への過程 (*BU*過程) の双方を含む必要がある。この時、重み付け木の性質 3.1に注目すると、次の二つが成立すれば、自動的に内部節点の対称性が成立し、対称木になることがわかる。

- 葉の重みを、対称性を保証するように定める。
- 葉の重みを用いて、加法性を保証するように内部節点の重みを定める。

この結果、BU過程 (葉の重みの決定とその対称性の保証) とTD過程 (内部節点の重みの決定とその加法性の保証) をこの順に、独立に行なえば良いことがわかる。

以上から、次のTD法とBU法を一般化した重み付け法が定義できる。

定義 3.5 ($TD-BU$型重み付け法)

木の重み付けを重みとは別に、割当てというものを考え、それを節点に割り振る過程と、その割り当てに基づいて重みを定める過程の二つの過程で、重みを定める重み付け法を$TD-BU$型の重み付け法と呼ぶ。

TD過程 初めに根の割当てを固定する。次に、対称性を保つように、根から葉の方向へ、親の割当てと子の数を用いて、子の割当てを平等に決める。

BU過程 子が葉のとき、その割当てを葉の重みと定義する。加法性を保つ為に、内部節点に対して、葉から根の方向へ、子の重みの合計を親の重みと定義する。

この重み付け法は、TD法とBU法を統合した重み付け法であり、双方の性質 (性質 3.2と性質 3.3) を受け継ぐ。この結果、次の性質が成り立つ。

性質 3.4 ($TD-BU$型重み付け法の性質)

$TD-BU$型の重み付け法では、新たに節点を追加しても、その節点の祖先とその親の子孫の２種類の節点以外の節点の重みは変わらない。

これは、節点の追加が与える変化のTD法における範囲と、BU法おける範囲の和集合である。

更に、二つの重み付け過程に注目すると、BU過程における重みの決定法はただ一通りしかない。これに対し、TD過程は、親の割当てと子の数から、子の割当てを求める方法の決め方によって、種々な選択が可能である。例えば、前出の二つの単純な重み付け法は次のようなTD過程を選んだ結果である。

TD法 親の割当てを子の数で等分したもの

BU法 常に親と同じもの

つまり、$TD-BU$型重み付け法を特徴付けるのは、対称性を保存する割当ての決定方法である。

この対称性を保存する割当て方法は、木や節点の重みが表わす対象の性質に基づいて定めることができる。次の節で述べる重み付け法は、対象の性質を固定した時の例である。これらは、いずれもTD法とBU法の一般化になっているが、子の数が増えた時に別の挙動を示す異なる例である。

3.3 $TD-BU$型重み付け法の例

ここでは、$TD-BU$型である二つの新しい重み付け法を示し、その定義と性質を示す。

前節で述べたように、$TD-BU$型の重み付け法を定義するには、親の節点の割当てと、その子の数を用いてどのように子の割当てを定義するかを述べれば良い。そこで、以下では次のような形で割当て方を述べる。

- 割当て規則の表現法
  1. 子が１個の時に、親の割当てから定める。
  2. 子がn個の時は、子がnと$n-1$個の時の割当てを用いて定義する。

つまり、新たに子が一つ増えた時に、その影響がどのように、兄弟あるいは親に波及するかを考えれば、重み付けを特徴付けられる。

また、この章では、次のような形の制限を設ける。

- 割当て規則の制限
  1. 子が１個の時は、子の割当ては親の割当てと等しい。
  2. 割当ては子の数nに対して単調減少する。

1.の制限は、単に、TD法とBU法が共にこの性質を有していることから、規則を簡単にする為に設けた。ただし、この制限は 4章で取り除かれる。一方、2.の制限は、1章で述べたような、複数のオブジェクトが互に妨害するモデルを表現するためである。したがって、以下では一貫してこの制限を仮定する。逆に、複数を集める事によって、相乗効果が得られるようなモデルでは、割当てが子の数nに対して単調増加することになる。

3.3.1 損失が現在の親の重みに比例する例

二つの事象が確率pで同時に生じ、その結果として一方が失われるような場合が考えられる。これは、複数のオブジェクトが共同した結果として、損失が生じる典型的な例である。

これは、それぞれの面積が１の領域で、重複の確率がpであるベン図をn個書いた場合の全体の面積に相当する (図 2参照)。これは、次のように形式化できる。

定義 3.6 (損失が現在の親の重みに比例するモデル)

n番目のオブジェクトと他の$n-1$個のオブジェクトがそれぞれp($0 \leq p \leq 1$:以下このpを損失率と呼ぶ)だけ干渉し、その重複部分の一方が失われることを考える。

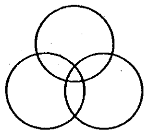

図 2: ベン図の例

この規則の下に、具体的に重み付け法を求めると次のようになる。

$n-1$ 個の事象の合計を S_{n-1}とする。これに新たに一つの事象を追加すると、重複する事象は仮定より $S_{n-1}\times 1\times p$ となる。したがって、S_nは次のように表現できる。

$$
\begin{aligned}
S_n &= 1+S_{n-1}-S_{n-1}\times p \\
&= 1+(1-p)S_{n-1} \\
&= 1+(1-p)+\cdots+(1-p)^{n-1} \\
&= \begin{cases} \frac{1-(1-p)^n}{p} & (p\neq 0) \\ n & (p=0) \end{cases}
\end{aligned}
$$

よって、子が $n-1$ の時の割当て Wt_{n-1}を用いて、次のように n の時の割当て Wt_nを求めることができる。

$$
\begin{aligned}
Wt_n &= \frac{1+(n-1)(1-p)}{n}Wt_{n-1} \\
&= \begin{cases} \frac{1-(1-p)^n}{np} & (p\neq 0) \\ 1 & (p=0) \end{cases}
\end{aligned}
$$

3.3.2 損失が追加する子の重みに比例する例

TD法と BU法を節点を追加した時の影響の観点から比較する。TD法では、節点を追加すると、その重みは兄弟の重みを減らすことに利用され、親の重みは変化しない。つまり、追加した子の重みの影響は $0:1$ の比率で親と兄弟に伝わる。同様に、BU法では、追加した節点の影響は全て親の重みを増加することに利用され、兄弟の節点の重みは変化しない。つまり、追加した節点の重みの影響は $1:0$ の比率で親と兄弟に伝わる。

そこで、この比を一般化し、新たな子の重みの影響が $p:(1-p)$ の比率で親と兄弟に伝わるものを考える [3] (図 3参照)。これは、次のように形式化できる。

定義 3.7 (重みが移動するモデル)
新たに増加するオブジェクトの $p(0\leq p\leq 1)$ の部分が、他の $n-1$ 個のオブジェクトから差引かれる場合を考える。

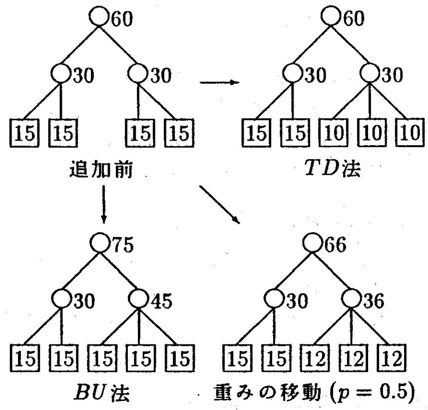

図 3: 重みの移動

この規則の元に、具体的な重み付け法を求めると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
S_n &= S_{n-1}+Wt_n-Wt_n\times p \\
&= S_{n-1}+Wt_n\times(1-p)
\end{aligned}
$$

ただし、Wt_nの割当ては、n 個の子に共通になるので (対称性)、それを用いて Wt_nを一意に定めることができる。

$$
\begin{aligned}
Wt_n\times n &= Wt_{n-1}\times(n-1)+Wt_n\times(1-p) \\
Wt_n &= \left(\frac{n-1}{n-1+p}\right)Wt_{n-1} \\
&= \frac{n-1}{n-1+p}\times\frac{n-1}{n-1+p}\times\cdots\times\frac{1}{1+p}W \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-1+p)!}Wt_0
\end{aligned}
$$

ただし、記号!は階乗を表わし、次のように実数まで拡張定義されている。

$$
n! = \begin{cases} n\times(n-1)! & (n>1) \\ 1 & (n\leq 1) \end{cases}
$$

3.4 重み付け方法の性質

この節では、前節で述べた二つの重み付け法の性質として、共通の性質と異なる性質を示す。

性質 3.5 (TD法と BU法の一般化)
何れの方法も損失率 p が 1 の時 TD法、損失率 p が 0 の時 BU法と一致する。

性質 3.6 (幅が無限の時の収束性)
子が無限個あった時、ベン図の例は収束し、重みが移動する例では、発散する。

証明 3.1 (幅が無限の時の収束性)

- ベン図の例では子の数 n に対して総和は、$\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = \frac{1-(1-p)^n}{p}$ である。したがって、$p > 0$ であれば、$n \to \infty$ の時、総和は $1/p$ である。ただし、$p = 0$ では、BU と同じなので発散する。

- 重みが移動する例では子の数 n に対して総和は、$n\frac{(n-1)!}{(n-1+p)!} = \frac{n!}{(n-1+p)!}$ である。したがって、$p < 1$ であれば、$n \to \infty$ の時、総和は ∞ に発散する。ただし、$p = 1$ では、TD と同じなので 1 である。

4 深さと重み付け

これまでの章では、割当てを決める際、子の数が 1 ならば、その子の割当てを親と同じにしてきた。また、次男以降の割当てを行なう規則も常に一定である。その結果、木の深さが重み付けに対して、間接にしか影響しない。例えば、子の数が 1 である内部節点の存在は、木の深さを増加させるが、重み付けには反映されない。しかし、一般に木の深さは節点間の距離を表わすことが多い。そしてこの場合には、浅い (近い) 場合と深い (遠い) 場合では、値が異なるように割り当てる。そこでこの章では、木の深さの要素を重み付けに取り入れるため方法を二つ述べる。この二つの方法は、既に述べた重み付けが、BU過程によって特徴付けられ、しかも、BU過程が長男の割当てと子の数が増えた時の子の割当ての変化の二つの部分からなっている事を利用する。この二つの反映のさせ方は次の通りである。

- 深さの反映の仕方
  1. 長男の重み付けに対して深さを反映させる。
  2. 子が増えた時の重みの変化に対して深さを反映させる。

したがって、この取り入れ方は、既に紹介した重み付けとは独立であり、任意の組合せが可能である。

なお、ここでは、深くなるにつれて割当てが小さくなるという制限を加える。この制限は、距離が遠くなるにつれて、重要度が減衰して行く現象をモデル化する為である。

4.1 深さを考慮した割当て方法

定義 4.1 (深さを考慮した長男の割当て)
親の割当てを Wt とした時、長男割当てを $Wt \times q$($0 < q \leq 1$:以下 qを減衰率と呼ぶ) で与える。

拡張法＼対象	ベン図	重みの移動
通常	発散	発散
長男に反映	制御可	制御可
損失率に反映	収束	収束

表 1: 無限完全木に対する重み付け

この方法は、重み付けに深さを直接反映させるが、次の方法は、間接的に反映させる。具体的には、3章で紹介した重み付けが何れも損失率と呼ばれる一つのパラメータを持っていることに着目し、深さに応じて、この損失率を変化させることにする。

定義 4.2 (深さを考慮した損失率の変更)
深さ 1 の子の割当てを決める時に用いた損失率を p とする時、深さ d の子の割当てを決める損失率を $p = 1 - (1-p)/d$ とする。

この二つの定義は、3章で述べた重み付けとは独立なので、次の性質が成立つ。

性質 4.1 (深さを考慮した重み付けへの拡張)
深さを考慮しない公平な重み付けを上記の方法で拡張すると、それは深さを考慮した公平な重み付けになる。

4.2 無限の深さをもつ木の重み付け

ここでは、深さを考慮した重み付けの拡張方法の性質を調べる為に、無限の深さを持つような木を考えることにする。また、重み付けが簡単になるように、全ての葉が対称葉で、その数が規則正しいものが望ましい。そこで、完全木を重み付けの対象として考える。

性質 4.2 (完全木と重み付けの関係)
もし、重み付け方法が次の性質を持つとする。

1. 子の幅数 wに対し、親の重みが単調増加
2. 子の深さ d に対し、親の重みが単調増加

すると、次の事が言える。

1. 任意の木 Tに対して、ある完全木 Ct が存在し、Ct は Tの成長した結果であり、かつ、Tの根の重さは、Ct の根の重さより小さい。
2. 任意の木 Tに対して、ある完全木 Ct が存在し、Tは Ct の成長した結果であり、かつ、Ct の根の重さは、Tの根の重さより小さい。

したがって、完全木の重さの振舞いを調べることによって、一般の木の重さの振舞いを近似することができる。

深さを無限にした時の完全木の重み付けの結果は表1のようになる。

5 同等でないオブジェクトを含む木への拡張

これまでの章では、個々のオブジェクトは全て同等であるという仮定をしたが、能力差があるオブジェクトが含まれる場合もある。本章では、このような同等でないオブジェクトを含むシステムが扱えるようにするため、次の様な分配比を考え、木の重み付けを拡張する。

定義 5.1 (分配比)
親から見た時の子同士の能力の大きさの比を分配比と呼ぶ。

5.1 分配比付き付きの木

この節では、分配比付きの木とこれに関する定義をそれぞれ2章と3章で用意した定義(木，木の同型，対称節点，対称性，対称木，公平な重み付け)に対応させ、それらを拡張する形で、定義(分配比付きの木，分配比付きの木の同型，分配比付きの木での対称節点，分配比付きの木の対称性，分配比付きの対称木，分配比付きの木に対する公平な重み付け)を行なう。

定義 5.2 (分配比付きの木)
弧に自然数を振ったものを分配比付きの木と呼ぶ。ある節点に着目すると、その親から節点への弧に付けられた分配比 n は、分配比 1 をもつ兄弟の n 倍の割当てが行なわれるものとする。

定義 5.3 (分配比付きの木の同型)
木として同型でありかつ、それぞれの同型木対応節点に対して、その節点に入る弧の分配比が全て互に等しい時、この二つの木は分配比付き同型であると呼ぶ。

定義 5.4 (分配比付きの木の対称節点)
同じ親を持ち、分配比付の同型木対応の節点を分配比付きの木の対称節点と呼ぶ。

定義 5.5 (分配比付きの木の対称性)
分配比付きの木の対称節点の重みの比が、共通先祖から各々の対称節点の所属する木の始祖への分配比の比に等しい時、この重み付けは、分配比付での対称性を持つと言う。

定義 5.6 (分配比付きの対称木)
与えられた木の重み付けが、正規性、加法性に加え、分配比付きの木の対称性をもつ時、その木を分配比付きの対称木と呼ぶ。

定義 5.7 (分配比付きの木に対する公平な重み付け)

任意の与えられた分配比付きの木に対して、常に分配比付きの対称木を作るような重み付けを分配比付きの木に対する公平な重み付けと呼ぶ。

ここで、従来の木と分配比付きの木を区別する為に、以下では、従来の木を分配比無しの木と呼び、それに関連した用語もそれに習うことにする。

5.2 分配比付きの木の重み付け

分配比の付いた木の重み付けは、分配比をどのように扱うかによって、様々な形が考えられる。ここでは、既に与えられた分配比無しの木の公平な重み付け方法を拡張して、分配比付きの重み付け方法を作ることを考える。このためには、TD過程の際に、分配比に応じて、割当てをどのように決定するかの規則を定めれば良い。

分配比のない重み付けの割当て規則が与えられている時、親の割当てが Wt で子の数が n 、それぞれの子に対する分配比が $p_1,\ldots,p_n$ であるような場合の拡張方法は次の二つが考えられる。

定義 5.8 (単純に定数倍する方法)
与えられた分配比のない重み付けの割当て規則を用いて、Wt と n から一個の子の割当てを計算し、その値に分配比を掛けたものを、それぞれの子の割当てとする。

定義 5.9 (非サイクル有向グラフと解釈する方法)
これは分配比を子の数と同一視し、分配比はグラフの縮退の個数であると考える方法である。したがって、与えられた分配比のない重み付けの割当て規則を用いて、Wt と $\Sigma\ p_n$(n 個の子の分配比の総和)から一個の子の割当てを計算し、その値に分配比を掛けたものを、それぞれの子の割当てとする。

前者の方は単純という利点があり、後者は分配比を大きくした時に、その振舞が、拡張しようとしている分配比なしの重み付けに従うという性質がある。例えば、ベン図の例を前者で拡張した場合は、分配比を大きくすると、その節点の割当ては限りなく大きくなるが、後者で拡張した場合は割当てが収束する。

5.3 分配比付きの重み付けの性質

性質 5.1 (分配比付きの重み付けへの拡張)
分配比のない公平な重み付けを上記の方法で拡張すると、それは分配比を考慮した公平な重み付けになる。

性質 5.2 (分配比の設定法)
正規性と加法性を満たす任意の重み付け木に対して、分配比を適当に割当てることによって、対称木と見なすことができる。

6 終わりに

木構造をもったモデルの要素に、値を割当てることを考える。すると、一般に、同等な位置にある要素は、同じ値になることが多い。本論文では、このような重み付けを定義し、その性質を幾つか述べた。また、節点が追加された時に、その影響範囲が限られるような、重み付けの一つを一般的に定義し、その例を二つ挙げた。そして、この二つの重み付けを、深さと、分配比を導入して一般化した。このような重み付けの方法は、多くの応用範囲があると思われる。

今後の課題としては、

1. 節点を追加した時の影響範囲がもっと大きな場合の重み付けを考える。
2. 重み付けの対象を木だけでなくＤＡＧや、一般のグラフに拡張する。
3. 重み付けを高速に行なうアルゴリズムの開発。
4. 木が動的にに変化した時の重み付け方法の開発

などが挙げられる。

1.に関してであるが、これは、3章の$TD-BU$重み付け法が、親の重みと子の数だけの一代の情報だけで子の割当てを定めていることに起因する。そこで、子の更に子、つまり孫の数までの二代、あるいはもっと一般的に、n代の子孫の数を考慮した、$TD-BU$重み付け法の拡張を用いることによって対処できると考えている。また 2.は、DAGや一般のグラフを一度、木の形に変形し、重み付けを施し、元に戻す事によって対処できると考えている。この時、一般のグラフを単純に木に展開すると、無限木になる為、無限に幅があったり無限に深さがあるような木の重み付けが利用できる。

7 謝辞

本稿の執筆にあたり、日頃御指導をいただいている早稲田大学理工学部の中島勝也教授、ならびに、応用例の示唆や、アルゴリズムの実現を担当して下さっている早稲田大学大学院理工学研究所の中村憲一郎氏に感謝します。

参考文献

[1] C. ベルジュ著，伊理他訳「グラフの理論」サイエンス社 (1976)

[2] 朴他「重み最小生成木更新問題を解く分散アルゴリズム」電子情報通信学会論文誌，Vol.J73-D-I No.10 Oct. 1990 pp.802-811

[3] 栗野他「木の公平な重み付けの手法について」情報処理学会アルゴリズム研究会 (1990)