

リアプノフ関数の構成と動的凸包問題について

太田有三, 今西浩, 野々村剛, 羽根田博正

神戸大学工学部電子工学科

本報告では, 凸多面体によって定義されるリアプノフ関数の構成について, 理論的根拠となる安定定理およびそれに基づく経験的なアルゴリズムを紹介する. 非線形特性を全空間で線形関数の凸結合によって評価する場合やその改良版である全空間を原点を頂点とする凸錐によって分割し, その各凸錐内において非線形特性を線形関数の凸結合によって評価するという場合については, 比較的標準的な凸包問題となり, このばあいについて動的凸包問題を線形計画問題として定式化する場合にシンプレックス法を用いる場合について検討を加え, シンプレックス法の感度解析を応用することを提案する. また, 提案している方法の有効性を例題を通して確認する.

Computer Generated Lyapunov Functions and Dynamic Convex Hull Problem

Yuzo Ohta, Hiroshi Imanishi, Tsuyoshi Nonomura and Hiromasa Haneda

Department of Electronics Engineering
Faculty of Engineering, Kobe University

1-1 Rokkodai-Cho, Nada-Ku, Kobe City, 657 Japan

In this paper, a problem constructing Lyapunov functions for nonlinear systems is considered. The Lyapunov function is given by a gauge functions of the corresponding polytope. Stability theorems and algorithms for constructing Lyapunov function are illustrated. Moreover, it is shown that one of the major problems of the algorithm is the dynamic convex hull problem, which can be formulated as a linear programming problem. Methods applying the sensitivity analysis in simplex method in solving series of the dynamic convex hull problem are proposed. Two examples are shown to demonstrate the usefulness of these approach.

1. はじめに

リアプノフの方法は、安定性を解析するに当たって最も有力な手段の一つである。このリアプノフの方法が有効に適用されるためには、適切なリアプノフ関数が構成される必要がある。線形定係数系に対しては、一定の方法によってリアプノフ関数を構成できる。しかし、非線形システムに対しては、どのようなシステムに対しても有効な一定の方法というのは知られていない。このため種々の方法が提案されているが、これらの多くはリアプノフ関数またはその解に沿った勾配の関数の形を仮定し、それに含まれるパラメータを逐次近似の方法や試行錯誤により定めるとしている[1]-[6]。一方、BraytonとTong[7],[8]によって提案された方法（以下この方法をBT法と呼ぶ）は、関数の形を仮定する代わりに、リアプノフ関数の「等高線」が多面体で与えられるということを仮定し、適当な凸多面体を求めることによってリアプノフ関数を構成しようとするもので、パラメータの数等を予め決める必要がないことに特徴がある。

本論文では、BT法を改良・拡張した安定定理を示すと共に、それを用いてリアプノフ関数を構成する際に必要となる動的凸包問題とその解法について述べる。非線形特性を全空間で線形関数の凸結合によって評価する場合やその改良版である全空間を原点を頂点とする凸錐によって分割し、その各凸錐内において非線形特性を線形関数の凸結合によって評価するという場合については、比較的標準的な凸包問題だけを考えれば十分であるが、このような評価の仕方では十分でない場合に、その対策として全空間を凸多面体によって分割し、その各凸多面体内において非線形特性をアフィン関数の凸結合によって評価することが考えられるが、その場合には問題はかなり複雑になる。本文ではこれについても述べる。

本論文では、 \mathcal{R} は実数を表し、 \mathcal{R}^n は、 n 項組 $x = (x_1, \dots, x_n)$ のベクトル空間を示す。行列演算のために特に断らない限りベクトルは列ベクトルと見なすことにする。また、 $x \in \mathcal{R}^d$ に対して、 x^T はその転置を示す。与えられた2つの整数 $m, n (m < n)$ に対し、 $[m..n]$ は、集合 $\{m, m+1, \dots, n\}$ を表す。 \mathcal{R}^n の2つのベクトル x と y の内積は $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ で与えられる。ベクトル x のノルムは $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ で表される。中心が x で半径が r である超開球を $S(x; r)$ で表す。空集合を \emptyset で表す。ベクトルの集合 $V = \{v^1, \dots, v^m\}$ に対して、それらを含む最小の凸包を $\text{conv}(V)$ で示す。また、原点を頂点とし、凸多面体 P を含む最小の凸錐を $\text{cone}(P)$ で示す。さらに、凸多面体 P に対して、 P の端点の集合、 P の極大面 (facet) の集合を、それぞれ、 $\text{ext}(P)$ 、 $\mathcal{F}(P)$ で表す。原点を含まないある極大面 F と原点を含む最小の凸包を $\text{pyramid}(F)$ で表す。 \mathcal{R}^n における集合 C に対して、その内部を、 $\text{int}(C)$ で表す。

2. 凸多面体とリアプノフ関数

次の時間不変系を考える。

$$\dot{x} = f(x). \quad (1)$$

ここで、 $x \in \mathcal{R}^d$ は状態変数を表し、 $f: \mathcal{R}^d \rightarrow \mathcal{R}^d$ は連続とする。また、 $f(0) = 0$ であると仮定する。従って、原点が平衡点である。ここでは、任意の初期値 $x(0) = x^0$ に対して、式(1)の初期値問題は一意解を有すると仮定し、それを $x(t) = x(t; 0, x^0)$ で示す。

系(1)の指数安定性に関して次の結果はよく知られている[14]。

[補題1] 原点の開近傍を含むある集合 $M \subseteq \mathcal{R}^d$ と関数 $v: \mathcal{R}^d \rightarrow \mathcal{R}_+$ が存在して、次の3条件を満足するとする。

I) 正数 α と β が存在して、

$$\alpha \|x\| \leq v(x) \leq \beta \|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{R}^d \quad (2)$$

が成り立つ；

II) 正数 η が存在して、

$$|v(x) - v(y)| \leq \eta \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{R}^d \quad (3)$$

が成り立つ；

III) 正数 γ が存在して、

$$v'_{(1)}(x) \leq -\gamma v(x), \quad \forall x \in M \quad (4)$$

が成り立つ。ここで、

$$v'_{(1)}(x) \equiv \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{v[x + \Delta f(x)] - v(x)}{\Delta} \quad (5)$$

である。

このとき、零解 $x(t) \equiv 0$ は、指数安定である。より精確には、 $\Omega(\sigma) \equiv \{x \in \mathcal{R}^d \mid v(x) \leq \sigma\}$ とし、 $v_{\max} \equiv \max\{\sigma > 0 \mid \Omega(\sigma) \subseteq M\}$ で与えられる正数とすると、任意の $x^0 \in \Omega(v_{\max})$ に対して、系(1)の解 $x(t; 0, x^0)$ 、 $t \geq 0$ は、 $\Omega(v_{\max})$ に留まり、かつ

$$\|x(t; 0, x^0)\| \leq (\beta/\alpha) \|x^0\| \exp(-\gamma t), \quad t \geq 0 \quad (6)$$

が成り立つ。 ■

ここでは、凸多面体を用いてリアプノフ関数 $v(x)$ を構成することを考える。次の結果が証明されている[9]。

[補題2] 凸多面体 P は、 $0 \in \text{int}(P)$ を満足するとする。このとき、以下のことが成り立つ。

I) $v(x) \equiv \inf\{\rho > 0 \mid x \in \rho P\}$ とすると、補題1の条件I)とII)が成り立つ。

II) 任意に $x \in \mathcal{R}^d$ を与える。このとき、ある $\Delta_0 > 0$ と $F_j \in \mathcal{F}(P)$ が存在して、

$$x, x + \Delta f(x) \in \text{cone}(F_j), \quad \forall \Delta \in [0, \Delta_0] \quad (8)$$

が成り立つ。そして、

$$v(x) = \langle x, a^j \rangle, \quad (9)$$

および

$$v'_{(1)}(x) = \langle f(x), a^j \rangle \quad (10)$$

が成り立つ。ここで、 a^j は F_j の正規化された法線ベクトルである、すなわち、 a^j は

$$\langle y, a^j \rangle = 1, \quad \forall y \in H_j = \text{aff}[\text{ext}(F_j)] \quad (11)$$

を満足する。 ■

3. 安定定理

前節の補題2のII)から,

$$\langle f(x), a^j \rangle \leq -\gamma \langle x, a^j \rangle,$$

$$\forall x \in M \cap \text{cone}(F_j), \quad \forall F_j \in \mathcal{F}(P) \quad (12)$$

が成り立てば, 補題1の条件III)が成り立つので, 補題2のI)から補題1の全ての条件が満足されることになり, 系(1)の零解は指数安定で, 式(6)が成り立つことがわかる. 式(12)では, 任意の $x \in M \cap \text{cone}(F_j)$ に対して条件が成り立つことを調べるのが要求されているが, これを直接的に実行することは現実的には不可能である. ここでは, 有限個の点に対して同様な条件を調べることによって, 式(12)が成り立つことが保証できる条件について述べる. 凸多面体 P が与えられているとする. 任意に $x \in \mathbb{R}^d$ を与える. ある $F_j \in \mathcal{F}(P)$ が存在して, $x \in \text{cone}(F_j)$ となる. $\text{ext}(F_j) = \{x^1, \dots, x^m\}$ とすると, ある非負の数 $\rho, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ が存在して,

$$x = \rho[\lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_m x^m], \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1 \quad (13)$$

を得る. このことを利用して, 次の結果が得られている[9].

【補題3】 凸多面体 P は, $0 \in \text{int}(P)$ を満足するとする. このとき, 以下のことが成り立つ.

I) $F_j \in \mathcal{F}(P)$ とする. $f(x)$ が $\text{cone}(F_j)$ において線形関数であるとする. もし,

$$\langle f(x^j, i), a^j \rangle \leq -\gamma, \quad \forall x^j, i \in \text{ext}(F_j) \quad (14)$$

が成り立つならば,

$$\langle f(x), a^j \rangle \leq -\gamma \langle x, a^j \rangle, \quad \forall x \in \text{cone}(F_j) \quad (15)$$

が成り立つ.

II) $F_j \in \mathcal{F}(P)$ とする. 線形関数 $f^q(x) = A_q x$, $q \in [1..Q]$ が存在して,

$$f(x) \in \text{conv}\{f^1(x), \dots, f^Q(x)\}, \quad \forall x \in \text{cone}(F_j) \quad (16)$$

が成り立つとする. このとき,

$$\langle f^q(x^j, i), a^j \rangle \leq -\gamma, \quad \forall x^j, i \in \text{ext}(F_j), \quad \forall q \in [1..Q] \quad (17)$$

が成り立つならば, 式(15)が成り立つ. ■

補題3において, 式(14)および式(17)の条件はこのままでは調べにくい, これに関しては, 次の結果が成り立つ[9].

【補題4】 凸多面体 P は, $0 \in \text{int}(P)$ を満足するとする. 任意に $x \in \mathbb{R}^d$ を与える. このとき, 次の2条件は等価である.

I) $\exists \gamma > 0, \exists \Delta_0 > 0:$
 $x + \Delta[f(x) + \gamma x] \in P, \quad \forall \Delta \in [0, \Delta_0] \quad (18)$

II) $\exists \gamma > 0: \langle f(x), a^j \rangle \leq -\gamma \langle x, a^j \rangle$
 $\forall F_j \in \mathcal{F}(P): x \in \text{cone}(F_j) \quad (19)$

ただし, a^j は F_j の正規化された法線ベクトルを示す. ■

以上をまとめると, 次のようになる[15].

【定理1】 ある集合 M , 凸多面体 $P \subseteq M$, 凸錐の集

合 $K = \{K_k \mid k \in [1..K]\}$ と各 K_k の内部では, 線形であるような区分的線形関数の集合 $\{f^q: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid q \in [1..Q]\}$ が存在して, 次の条件を満足するとする.

I) $\mathbb{R}^d = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_K, \quad 0 \in K_k, \quad \forall k \in [1..K]$
 $K_j \cap K_k = \emptyset, \quad \forall j, k \in [1..K]: j \neq k.$

II) $\forall x \in M, f(x) \in \text{conv}\{f^1(x), \dots, f^Q(x)\}.$ (20)

III) $0 \in \text{int}(P) \subseteq \text{int}(M).$

IV) $\exists \gamma, \Delta > 0: \forall q \in [1..Q], \forall \Omega_k, j \in \Omega(P)$

$\forall x \in \text{ext}(\Omega_k, j), x + \Delta[f^q(x) + \gamma x] \in P.$ (21)

ここで,

$$\Omega_k, j = \text{Pyramid}(F_j) \cap K_k \neq \emptyset, \quad (22)$$

$$\text{Pyramid}(F_j) = \text{conv}\{F_j \cup \{0\}\}, \quad (23)$$

$$\Omega(P) = \{\Omega_k, j \neq \emptyset \mid K_k \in K, F_j \in \mathcal{F}(P)\} \quad (24)$$

である.

このとき, 任意の $x^0 \in P$ に対して, 系(1)の解 $x(t; 0, x^0)$, $t \geq 0$ は, P 内に留まり, かつ, 式(6)が成り立つ. ■

4. 多面体の構成アルゴリズム

ここでは, 定理1の条件を満足する凸多面体 P を求めるための経験的方法と手続きconst_p1について述べる. 便宜上, 関数 $h(\cdot; f, \Delta, \gamma): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ を次式で定義する.

$$h(x; f, \Delta, \gamma) = x + \Delta[f(x) + \gamma x], \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (25)$$

また, $x, y \in \mathbb{R}^d$ に対して, x と y を結ぶ線分を $[x, y]$ で表す. また, $(x, y) \equiv [x, y] - \{x\}$ とする. $x \in K_k$ とするとき, 十分小さい $\Delta > 0$ に対して, $(x, h(x; f, \Delta, \gamma)) \cap K_k \neq \emptyset$ であるならば, f は x において K_k に内向きであるということにする. もし, $x \in \text{int}(K_k)$ ならば, 明らかに, f は x において K_k に内向きである. 関数 $H(\cdot; f, \Delta, \gamma): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ を

$$H(x; f, \Delta, \gamma) = \begin{cases} h(x; f, \Delta, \gamma), & (x, h(x; f, \Delta, \gamma)) \subseteq K_k \\ y(K_k), & (x, h(x; f, \Delta, \gamma)) \not\subseteq K_k \end{cases} \quad (26)$$

で定義する. ここで, K_k は, x を含みかつ f が x において内向きである凸錐を示し, $y(K_k)$ は, $[x, h(x; f, \Delta, \gamma)] \cap \text{bd}(K_k)$ で定められる点である. また, ϵ を充分小さい正の数として,

$$\Omega_0 = \text{conv}\{\pm \epsilon e^i \mid i \in [1..d]\} \quad (27)$$

$$\Omega_k = \Omega_0 \cap K_k, \quad k \in [1..K] \quad (28)$$

とおく. ここで, $e^i \in \mathbb{R}^d$ は i 番目の座標ベクトルを示す. 区分的線形関数 $\bar{f}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ を

$$\bar{f}(x) = [f^1(x) + \dots + f^Q(x)]/Q, \quad x \in K_k. \quad (29)$$

で定義する. 先ず, f 自身が区分的線形関数である場合(定理1において, $Q=1, f^q(x)=f(x)$ である場合)について考える. この場合に, 定理1の条件を満足する凸多面体 P を求める経験的方法の一つは, 次の手続きconst_p0aで与えられる. 以下では, var, for, while

do, repeat ... until, begin ... end等のPascalの予約語は通常のPascal言語と同様な意味で用いる。また、POLYTOPE, POINTは、それぞれ、 $0 \in \text{int}(P)$ であるような凸多面体、 \mathcal{R}^d における点を示す抽象データを示す。正の数 γ' と Δ は与えられているものとする。

```

Procedure const_P0a(var P: POLYTOPE);
  var P̄: POLYTOPE; x, w: POINT;
  begin
  1. P̄:=P;
  2. for w∈ext(P̄) do begin
  2.1. x:=H(w;P̄, Δ, γ');
  2.2. wにおいてP̄が内向きである $K_k$ を求める;
  2.3. while x∉P do begin
  2.3.1. while (x∈int( $K_k$ ) and x∉P)
          do x:=H(x;P̄, Δ, γ');
  2.3.2. if x∈bd( $K_k$ ) then P:=conv[ext(P)∪{x}];
  2.3.3. if (there exists z∈ext(P̄) such that
          z∈int(P)) then stop;
  2.3.4. x:=H(x;P̄, Δ, γ');
  2.3.5. xにおいてP̄が内向きである $K_k$ を求める;
  2.3. end
  2. end
  3. P̄:=P;
  4. for each w∈ext(P̄) do begin
  4.1. x:=H(w;P̄, Δ, γ');
  4.2. done:=false;
  4.3. while (not done) do begin
  4.3.1. if x∉P then begin
  4.3.1.1. P:=conv[ext(P)∪{x}];
  4.3.1.2. if (there exists z∈ext(P̄) such that
          z∈int(P)) then stop;
  4.3.1.3. x:=H(x;P̄, Δ, γ');
  4.3.1. end
  4.3.2. else begin done:=true end
  4.3. end
  4. end
  end;

```

リアプノフ関数を構成する1つの目的は、安定性の解析であり、この場合には、あらかじめ安定であるか否かを仮定することはできない。しかし、安定領域の推定などの問題の際には、局所的な安定性そのものは仮定してもそれほど不自然ではない。手続きconst_P0aは、3つのwhile-ループを含んでおり、一般的に、これらが有限回で停止する保証はない。特に不安定な場合には停止しない。しかし、システムが指数安定である場合には、(適当に Δ と γ' を選んでいれば)有限回で停止する。

上の手続きconst_P0aを用いた定理1の条件を満たす凸多面体Pを求める経験的方法の一つは、次の手続きconst_P1である。正の数 $\gamma < \gamma'$ は与えられているものとする。なお、const_P1がリアプノフ関数の構成に失敗しても、リアプノフ関数が存在する場合はある。

```

procedure const_P1(var P: POLYTOPE);
  begin
  1. const_P0a(P);

```

```

2. for q∈[1..Q] do begin
2.1. for x∈ext(P) do begin
2.1.1. if H(x; fq, Δ, γ)∉P then stop;
      {const_P1 fails to construct P}
2.1.2. for z∈boundary_pt(x, P) do
      if H(z; fq, Δ, γ)∉P then stop;
      {const_P1 fails to construct P}
2.1. end
2. end
end;

```

5. 動的凸包問題

4. で示した手続きを実行するためには、多面体Pとxが与えられとき、1)x∈Pであるか否かを判断する問題、2)x∉Pであるとき、 $P' = \text{conv}[P \cup \{x\}]$ を求める問題、そして3)z∈int(P)であるか否かを判断する問題を解く必要がある。3番目の問題は、z∈Pであれば、z∈int(P)ではありえないし、十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して、 $(1 + \varepsilon)z \in P$ であれば、z∈int(P)となることがわかるので、動的凸包問題が主要な問題となる。多次元空間における動的凸包問題の解法としては、beyond-beneath法[16] (以下、BB法と略す)が知られている。BB法は、次数dが小さいとき ($d \leq 3$ の場合)は、計算時間も短く非常に有効であるが、dが大きくなると、面構造(facical graph)を記憶する必要があるため、膨大な記憶領域を必要とし、メモリの実行が困難となる。一方、文献[7],[8]では、動的凸包問題を解くために次の線形計画問題を解くことが提案されている。

$$\text{minimize } 0 \quad (30.a)$$

$$\text{subject to } \lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_n x^n = x, \quad (30.b)$$

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1, \quad (30.c)$$

$$\lambda_i \geq 0, i \in [1..n]. \quad (30.d)$$

ここで、 $x, x^i \in \mathcal{R}^d$ で、 $P = \text{conv}[x^1, \dots, x^n]$ である。線形計画問題(30)が実行可能解を持てば、 $x \in P$ であり、実行可能解を持たなければ、 $x \notin P$ である。線形計画問題(30)は、例えば、シンプレックス法を用いて解くことができる。シンプレックス法では、第1段階として、人為変数を導入した次の線形計画問題:

$$\text{minimize } z = \lambda_1 + \dots + \lambda_{d+1} \quad (31.a)$$

subject to

$$\lambda_1 e^1 + \dots + \lambda_d e^d + \lambda_{d+2} x^1 + \dots + \lambda_{d+1+n} x^n = x, \quad (31.b)$$

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_d + \dots + \lambda_{d+1+n} = 1, \quad (31.c)$$

$$\lambda_i \geq 0, i \in [1..d+1+n]. \quad (31.d)$$

が考えられる。ここで、 $e^i \in \mathcal{R}^d$ は、i番目の座標ベクトルを示す。線形計画問題(31)では、実行可能解は必ず存在する。また、最適値が $z=0$ であれば、 $x \in P$ であり、 $z>0$ であれば、 $x \notin P$ である。後の議論の便宜上、

$$r \equiv \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \text{L}_{d+1} & \text{L}_n & & \text{J} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{1 \times (d+1+n)} \quad (32)$$

$$\bar{x} \equiv [x^T \quad 1]^T, \bar{x}^i \equiv [(x^i)^T \quad 1]^T \in \mathcal{R}^{d+1} \quad (33)$$

$$\Lambda \equiv [I_{d+1} \quad \bar{x}^1 \quad \dots \quad \bar{x}^n] \in \mathcal{R}^{(d+1) \times (d+1+n)} \quad (34)$$

$$u \equiv [\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_{d+1} \quad \dots \quad \lambda_{d+1+n}]^T \quad (35)$$

とおき、問題(31)を

$$\text{minimize } z = ru \quad (36.a)$$

$$\text{subject to } Au = \bar{x}, u \geq 0 \quad (36.b)$$

と書き改めることにする。

手続きconst_P0aなどにおいて、 $x \in P$ である場合には、単にその x を捨て、whileループを終了することになるが、 $x \notin P$ の場合には、新しい点 y に対して、 $x' \in P' = \text{conv}[P \cup \{x\}]$ であるか否かを判断することが必要となる。このためには、線形計画問題：

$$\text{minimize } z = \bar{r}u \quad (37.a)$$

$$\text{subject to } \bar{A}u = \bar{x}' \equiv [(x')^T \quad 1]^T, \bar{u} \geq 0 \quad (37.b)$$

を解けば十分である。ここで、

$$\bar{r} \equiv \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{1 \times (d+2+n)} \quad (38)$$

$$\bar{A} \equiv [A \quad \bar{x}] \in \mathcal{R}^{(d+1) \times (d+2+n)} \quad (39)$$

$$\bar{u} \equiv [\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_{d+1} \quad \dots \quad \lambda_{d+2+n}]^T \quad (40)$$

である。 $x \notin P$ のとき、 $x \in \text{ext}(P') \subseteq \{x^1, \dots, x^n, x\}$ であるが、全ての $x^i, i \in [1..n]$ が P' の端点であるとは限らないので、この操作を単純に繰り返すと、線形計画問題における変数の数（問題(37)の場合は、 $d+n+2$ ）が不必要に大きくなる可能性がある。すなわち、 $\{y^1, \dots, y^m\} = \text{ext}(P')$ とすると、

$$\text{minimize } z = f\bar{u} \quad (41.a)$$

$$\text{subject to } \bar{A}\bar{u} = \bar{x}', \bar{u} \geq 0 \quad (41.b)$$

$$\bar{r} \equiv \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{1 \times (d+1+m)} \quad (42)$$

$$\bar{\Lambda} \equiv [I_{d+1} \quad \bar{y}^1 \quad \dots \quad \bar{y}^m] \in \mathcal{R}^{(d+1) \times (d+1+m)} \quad (43)$$

$$\bar{u} \equiv [\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_{d+1} \quad \dots \quad \lambda_{d+2+m}]^T \quad (44)$$

を解けば十分である（一般に、 $n \geq m$ である）。このためには、 $\{y^1, \dots, y^m\} = \text{ext}(P')$ を特定する必要がある、文献[1],[2]では、 $x \notin P$ であったとき、例えば、 $x^1 \in \text{ext}(P')$ であるか否かを判断するために、問題(31)において x と x^1 を入れ換えた問題：

$$\text{minimize } z = \lambda_1 + \dots + \lambda_{d+1} \quad (45.a)$$

subject to

$$\lambda_1 e^1 + \dots + \lambda_d e^d + \lambda_{d+2} x + \dots + \lambda_{d+1+n} x^n = x^1 \quad (45.b)$$

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_d + \lambda_{d+1} = 1, \quad (45.c)$$

$$\lambda_i \geq 0, i \in [1..d+1+n]. \quad (45.d)$$

を解くことを提案している。同様に、 $x^i \in \text{ext}(P')$ であるか否かを判断するためには、問題(31)において、 x と x^i を入れ換えた問題を解けばよい。しかし、この操作を、 $x \notin P$ であった度に行うと、その計算時間が大きくなる。また、const_P0aの実行、特に、4.3.1.1における $x \notin P$ か否かの判断では、 x と新しい点 $x' = H(x; f, \Delta, \gamma)$ が非常に近い点であり、4.3のwhileループの最初の実行時を除いては、 $x^i \in \text{ext}(P')$ となることが、少ないという特殊性もあるので、何回かに1回この操作を行う方が得策である。

さらに、 x と x' が非常に近い点であることを考えれば、問題(37)を解くのではなく、まず、

$$\text{minimize } z = ru \quad (46.a)$$

$$\text{subject to } Au = \bar{x}', u \geq 0 \quad (46.b)$$

を解く。もし、 $z=0$ であれば、 $x' \in P$ 、したがって、 $x' \in P' \supseteq P$ という結論を得る。もし、 $z>0$ ならば、続いて問題(37)を解くという方法をとる。この際、問題(46)は、予備知識なしに最初からシンプレックス法を用いて解くのではなく、問題(36)と(46)が右辺の \bar{x} と \bar{x}' だけが異なる（定数項だけが変化する[17]）ということに注目し、感度解析の手法を適用する。すなわち、問題(36)を解いたときの最適基底解の添字集合を $J = \{j_1, \dots, j_{d+1}\}$ とし、最適基底行列を $B = A[1..d+1, J]$ とすると、もし、

$$u_j = B^{-1} \bar{x} \geq 0 \quad (47)$$

であれば、最適性規準

$$r_I - r_j B^{-1} A[1..d+1, J] \geq 0, I \equiv [1..d+1+n] - J \quad (48)$$

が満足されるので、 u_B は、問題(46)の最適解となり、最適値は

$$z = r_j u_j = r \bar{x} \quad (49)$$

で与えられる。

また、 $u_j \geq 0$ でないときは、基底変数に負のものが現れたことになるが、不等式(48)が成り立っていることに注意して、双対シンプレックス法を用いて問題(46)を解く。問題(46)の最適値が $z>0$ であれば、問題(37)を解くことになるが、問題(37)は問題(45)と比べて、新しい変数 λ_{d+2+n} が追加された場合であるので、問題(46)の最適基底解の添字集合を $J \subseteq [1..d+2+n]$ とし、最適基底行列を $B = A[1..d+1, J]$ とすると、もし、

$$\Delta r \equiv r_{d+2+n} - r_j B^{-1} \bar{x}' = -r_j B^{-1} \bar{x}' \geq 0 \quad (50)$$

であれば、問題(37)の最適値は、問題(46)の最適値と等しく、 $z>0$ であるので、 $x' \notin P'$ という結論を得る。

また、 $\Delta r < 0$ の場合（不等式(50)が成り立たない場合）は、シンプレックス法により、 λ_{d+2+n} を基底に入れるピボット操作を行い、最適解の求解作業を続けることになる。

上で述べた方法により、最終的に得られた多面体 P に対しては、その端点集合 $\text{ext}(P)$ を求めることは、リアブノフ関数を得られた後の応用にとって便利ことが多いと思われるが、途中の段階で得られている P に対して、 $\text{ext}(P)$ をいつも求める必要があるかどうかは検討する余地がある。一方、BB法の場合は、 $P' = \text{conv}[P \cup \{x\}]$ を求めた段階で、自動的に $\text{ext}(P')$ が求められている。

6. 検討

以上では、式(20)が成り立つ場合、すなわち、各凸錐 K_k 内において非線形特性を線形関数の凸結合によって評価する場合について考えてきたが、以下では、これでは十分でない場合について考える。このために、

例えば, $f(x)$ が,

$$f(x) = Ax + b^1 g_1(\langle c^1, x \rangle) + \dots + b^L g_L(\langle c^L, x \rangle) \quad (51)$$

で与えられる場合を考える。ここで, A は $d \times d$ 行列, b^i と c^i は d 次元のベクトル, g_i は \mathcal{R} からそれ自身への関数である。注目している $g_i(\sigma)$ の σ の変化する範囲を, $M_i = [-\sigma_i^-, \sigma_i^+]$ とする。今, M_i を $M_{i,-} = [-\sigma_i^-, 0]$ と $M_{i,+} = [0, \sigma_i^+]$ に分けて, それぞれの部分区間線形関数で評価して,

$$\alpha_i(\sigma) \leq g_i(\sigma) \leq \beta_i(\sigma), \quad \sigma \in M_i \quad (52)$$

を得るとする。ただし, $\alpha_i(\sigma)$, $\beta_i(\sigma)$ は, $M_{i,-}$ または $M_{i,+}$ で線形であるような区分的線形関数である。集合 K_k を

$$K_k = \bigcap_{i \in [1..L]} \{x \in \mathcal{R}^d \mid s_{ki} \langle c^i, x \rangle \leq 0\} \quad (53)$$

とする。ここで, $s_{ki} \in \{-1, 1\}$ は, K_k が法線ベクトル c^i を持ち原点を通る超平面のどちら側にあるかを定めるために用いられている。 K_k 全体の集合を K とする。 \mathcal{R}^d の全空間は K の要素に分割される。 K の要素数を κ とすると, $\kappa \leq 2^L$ である。便宜上, $q = 2^L$, $q \in [1..Q]$, に対して, $q = r_1 + r_2 * 2 + \dots + r_L * 2^{L-1} + 1$, $r_i \in \{0, 1\}$ とすると, q と (r_1, \dots, r_L) は1対1に対応する。 $r_i = 0$ ならば, $\kappa_i(\sigma) = \alpha_i(\sigma)$, $r_i = 1$ ならば, $\kappa_i(\sigma) = \beta_i(\sigma)$ として,

$$\begin{aligned} f^q(x) &= f(x; \kappa_1, \dots, \kappa_L) \\ &= Ax + b^1 \kappa_1 \langle c^1, x \rangle + \dots + b^L \kappa_L \langle c^L, x \rangle \end{aligned} \quad (54)$$

とすると,

$$f(x) \in \text{conv}\{f^1(x), \dots, f^Q(x)\}, \quad \forall x \in M \quad (55)$$

となる。以上のようにして, 定理1の条件I), II)を満足する凸包の集合と区分的線形関数が得られるが, これらが $f(x)$ の近似としては, 十分でない場合には, 区間 M_i を2つの部分区間 $(M_{i,+}$ と $M_{i,-})$ より多くの部分区間 $\{M_{i,p} \mid p \in [1..P_i]\} \subseteq M_i$ に分割し, 各々の範囲でアフィン関数で評価するようにする。ここで, α_i , β_i は, 区間の端では連続でなくともよいが, $\alpha_i(0) = \beta_i(0) = 0$ であるとする。集合 K_k を

$$K_k = \bigcap_{i \in [1..L]} \{x \in \mathcal{R}^d \mid \langle c^i, x \rangle \in M_{i,p(k,i)}\} \quad (56)$$

とする。ここで, $p(k,i) \in [1..P_i]$ である。 K_k 全体の集合を K とする。 \mathcal{R}^d の全空間は K の要素に分割される。このようにすると, 定理1の条件I), II)と同様な性質が成り立つ。また, 区間の数を増やし, α_i と β_i を適当に選べば, 幾らでも精度よく評価できる。このように考えて, 補題3を拡張すると次のようになる[15]。

[補題5] 凸多面体 P は, $0 \in \text{int}(P)$ を満足するものとする。 $F_j \in \mathcal{F}(P)$ と凸多面体 K_k を与え, $\Omega_{k,j} = \text{Pyramid}(F_j) \cap K_k$ とする。

I) $f(x)$ は $\Omega_{k,j}$ 内においてアフィン関数であるとする。もし,

$$\begin{aligned} \langle f(x^j, i), a^j \rangle &\leq -\gamma \vee (x^j, i), \\ \forall x^j, i &\in \text{ext}(\Omega_{k,j}) \end{aligned} \quad (57)$$

が成り立つならば,

$$\langle f(x), a^j \rangle \leq -\gamma \vee (x), \quad \forall x \in \Omega_{k,j} \quad (58)$$

が成り立つ。ここで, $\vee(x)$ は, 式(7)で与えられる。

II) アフィン関数 $f^q(x)$, $q \in [1..Q]$ が存在して,

$$f(x) \in \text{conv}\{f^1(x), \dots, f^Q(x)\}, \quad \forall x \in \Omega_{k,j} \quad (59)$$

が成り立つとする。このとき,

$$\begin{aligned} \langle f^q(x^j, i), a^j \rangle &\leq -\gamma \vee (x^j, i) \\ \forall x^j, i &\in \text{ext}(\Omega_{k,j}), \quad \forall q \in [1..Q] \end{aligned} \quad (60)$$

が成り立つならば, 式(58)が成り立つ。 ■

補題4, 5から次の結果が得られる[15]。

[定理2] ある集合 $M \subseteq \mathcal{R}^d$, 凸多面体 $P \subseteq M$, 凸多面体の集合 $K = \{K_k \subseteq M \mid k \in [1..K]\}$ とアフィン関数の集合 $\{f^q: \mathcal{R}^d \rightarrow \mathcal{R}^d \mid q \in [1..Q]\}$ が存在して, 次の条件を満足するとする。

I) $M = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_K$, $0 \in K_k$, $\forall k \in [1..K]$

$$K_j \cap K_k = \emptyset, \quad \forall j, k \in [1..K]: j \neq k.$$

II) $\forall x \in M$, $f(x) \in \text{conv}\{f^1(x), \dots, f^Q(x)\}$. (61)

III) $0 \in \text{int}(P)$.

IV) $\exists \gamma, \Delta > 0: \forall q \in [1..Q_k], \forall \Omega_{k,j} \in \Omega(P)$

$$\begin{aligned} \forall x \in \text{ext}(\Omega_{k,j}), \\ x + \Delta \{f^q(x) + \gamma x\} \in \vee(x)P. \end{aligned} \quad (62)$$

ここで,

$$\Omega(P) = \{\Omega_{k,j} \neq \emptyset \mid K_k \in K, F_j \in \mathcal{F}(P)\} \quad (63)$$

であり, $\vee(x)$ は, 式(8)で与えられる。

このとき, 任意の $x^0 \in P$ に対して, 系(1)の解 $x(t; 0, x^0)$, $t \geq 0$ は, P 内に留まり, かつ, 式(6)が成り立つ。 ■

定理1と2とは, 見かけ上, 非常に類似しているが, 定理1では K_k が凸錐で f^q が全て K_k 内で線形関数であるのに対して, 定理2では K_k が凸多面体である点と f^q が区分的線形関数であり線形関数とは限らない点と異なる。 K_k が凸錐ではないので, 一つの $\text{Pyramid}(F_j)$ に対して, 定理1の場合に比べて $\{x \in \text{ext}(\Omega_{k,j}) \mid \Omega_{k,j} \neq \emptyset\}$ の要素数かなりが多くなる。

また, 定理2の条件IV)を調べるためには, 次のような働きを持った手続き(または関数)が必要である。

including_facet(x, P):

集合 $\{F_j \in \mathcal{F}(P) \mid x \in \text{Pyramid}(F_j)\}$ を返す関数

このためには, 凸多面体 P の端点集合の情報だけでは, 不十分で, P の極大面 (facet-($d-1$)次元面) と稜線 (ridge-($d-2$)次元面) の関係を必要とする。文献[19]には, BB法の場合と異なり, 面構造全体でなく, P の極大面と稜線の関係を表す極大面グラフ (facet graph)を用いる方法が提案されており, 注目される。しかし, 常にこの情報を保つとすると, 極大面自体の数の上限 ($0(\lceil n \text{ceil} \lfloor d/2 \rfloor \rceil)$)も非常に大きく, やはり d が大きくなると, 記憶領域の大きさが問題になると思われる。

上の関数including_facetが実現されると, 次の関数も比較的容易に実現される。

boundary_pt(x, P):

集合 $\{z \in \text{ext}(\Omega_{k,j}) \mid z \neq 0, z \notin \text{ext}(P), \Omega_{k,j} = F_j, \cap K_k \neq \emptyset, F_j \in \text{including_facet}(x, P)\}$ を返す関数。
このとき、手続きconst_P0aよりも失敗することの少ない次の手続きconst_P0bが考えられる。

```

Procedure const_P0b(var P: POLYTOPE);
var F: POLYTOPE; x, w: POINT;
begin
1. F:=P:=Ω0;
2. for w∈ext(F) do begin
2.1. x:=H(x; F, Δ, γ');
2.2. done:=false;
2.3. while (not done) do begin
2.3.1. if x∉P then begin
2.3.1.1. P:=conv[ext(P)∪{x}];
2.3.1.2. for z∈boundary_pt(x, P) do
if H(z; F, Δ, γ')∉P then stop;
{const_P0 fails to construct P}
2.3.1.3. x:=H(x; F, Δ, γ');
2.3.1. end
2.3.2. else begin done:=true end;
2.3. end
2. end
end;

```

先に示した手続きconst_P1において、const_P0aを上
のconst_P0bに替えた場合、(時間はかかるが) 定理1
の条件を満足する凸多面体を求められる可能性が大
きい。さらに、場合によっては、定理2の条件を満足
する凸多面体Pを求められる場合もある。

7. 例題

上で提案した方法の有効性を例題を通して確かめる。

[例題1] 次のシステムを考える。

$\dot{x} = Ax + b^1 g_1(\langle c^1, x \rangle) + b^2 g_2(\langle c^2, x \rangle)$ (64)
ただし、A, b¹, b², c¹, c²は、次式で与えられる。

$$A = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.9 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad b^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (65.a)$$

$$b^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (65.b)$$

また、

$$\alpha_i(\sigma) = \begin{cases} \alpha_i^+ \sigma, & 0 \leq \sigma \\ \alpha_i^- \sigma, & \sigma < 0, \end{cases} \quad (66.a)$$

$$\beta_i(\sigma) = \begin{cases} \beta_i^+ \sigma, & 0 \leq \sigma \\ \beta_i^- \sigma, & \sigma < 0, \end{cases} \quad (66.b)$$

として、g₁, g₂は、α₁⁺=0.485, β₁⁺=0.515, α₁⁻=
1.02, β₁⁻=0.98, α₁⁺=0.72, β₁⁺=0.82, α₁⁻=
0.52, β₁⁻=0.48に対して、式(52), (66)を満足する
非線形関数とする。また、σ₁⁺=σ₁⁻=σ₂⁺=σ₂⁻=

1.5とする。ところで、A₁=A+(α₁⁻+β₁⁻)2b¹(c¹)^T
+(α₁⁺+β₁⁺)2b²(c²)^Tの固有値は、0.0283178と-1.3
6416±j0.80394であり、不安定である。従って、BT法
[7], [8]は適用できない。一方、Δ=0.5, γ'=0.05
として、手続きconst_P0aを用いた手続きconst_P1を用
いると、図1に示される凸多面体が得られ、系(64)が
指数安定であることが示される。なお、得られた凸多
面体の端点数は、13であった。以上により、定理1お
よび手続きconst_P1の有効性が確かめられた。 ■

[例題2] 次のシステムを考える。

$$\dot{x} = Ax + b^1 g_1(\langle c^1, x \rangle) \quad (67)$$

ただし、A, b, cは、次式で与えられる。

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad b^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

g₁は、α₁⁺=0.385, β₁⁺=0.415, α₁⁻=7.02, β₁⁻=
6.98に対して、式(52), (66)を満足する非線形関数
とする。また、σ₁⁺=σ₁⁻=1.5とする。この例では、
図2, 3に示すように、ポポフの定理[20]の条件と円
板定理[20]-[22]の条件の両方とも満たさないことが
わかる。一方、Δ=0.5, γ'=0.05として、手続き
const_P0aを用いた手続きconst_P1を用いると、図1に
示される凸多面体が得られ、系(64)が指数安定である
ことが示される。なお、得られた凸多面体の端点数は、
13であった。以上により、定理1および手続きconst_
P1の有効性が確かめられた。 ■

8. おわりに

本報告では、凸多面体によって定義されるリアプノ
フ関数の構成について、理論的根拠となる安定定理お
よびそれに基づく経験的なアルゴリズムを紹介すると
共に、それを実行するために必要な動的凸問題につ
いて述べた。そして、動的凸問題を線形計画問題と
して定式化する場合にシンプレックス法を用いる場合
について検討を加え、シンプレックス法の感度解析を
応用することを提案した。

謝辞 文献[18], [19]を送って戴き、動的凸問題に
線形計画法を用いることについてご助言を戴いた日本
IBM徳山豪氏に感謝します。また、本研究の一部は、
(財)實吉奨学金の補助を受けたものです。

9. 参考文献

- [1] W. Hahn, Stability of Motion, New York: Springer-Verlag (1967).
- [2] S. G. Margolis and W. G. Vogt, "Control engineering application of V. I. Zubov's construction procedure for Lyapunov functions," IEEE Trans. Autom. Control, AC-8, pp.104-113 (1963).
- [3] A. Vannelli and M. Vidyasagar, "Maximal Lyapunov Functions and domain of attraction for autonomous nonlinear systems," Automatica, vol.21, no.1, pp.69-80 (1985).
- [4] N. N. Krasovski, "Stability of Motion," Stanford Univ. Press (1963).
- [5] D. G. Shults and J. E. Gibson, "The variable gradient method for generating Liapunov

- functions," Trans. AIEE, vol.81, Pt.2, Application and Industry, pp.203-210 (1962).
- [6] J. L. Peczkowski and R. W. Liu, "A format method for generating Liapunov functions," ASME Trans., J. Basic Engineering, vol.89, pp.433-439 (1967).
- [7] R. K. Brayton and C. H. Tong, "Stability of dynamical systems: a constructive approach," IEEE Trans. Circuits and Systems, vol.CAS-26, pp.224-234 (1979).
- [8] R. K. Brayton and C. H. Tong, "Constructive stability and asymptotic stability of dynamical systems," IEEE Trans. Circuits and Systems, vol.CAS-27, pp.1121-1130 (1980).
- [9] Y. Ohta, L. Gong, H. Imanishi and H. Haneda, "Construction of Lyapunov functions for a class of nonlinear dynamical systems," Proc. of ISCAS'91, Singapore, pp.872-875 (1991).
- [10] E. J. Davison and E. M. Kurak, "A computational method for determining quadratic Lyapunov functions for nonlinear systems," Automatica, vol.7, pp.627-636 (1971).
- [11] A. N. Michel, N. R. Sarabudla, and R. K. Miller, "Stability analysis of complex dynamical systems: some computational methods," Circuits Systems Signal Process, vol.1, pp.171-202 (1982).
- [12] R. Genesio, M. Tartaglia and A. Vicino, "On the estimation of asymptotic stability regions: state of the art and new proposal," IEEE Trans. on Automatic Control, vol.AC-30, pp.747-755 (1985).
- [13] H. D. Chiang and J. S. Thorp, "Stability regions of nonlinear dynamical systems: a constructive methodology," IEEE Trans. Automatic Control, vol.AC-34, pp.1229-1241 (1989).
- [14] T. Yoshizawa, Stability Theory by Liapunov Second Method, The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1966.
- [15] 太田, 今西, 野々村, 羽根田, "計算機によるリアプノフ関数の自動構成と安定領域の推定," 非線形問題研究会資料 (1991-11).
- [16] H. Edelsbrunner, Algorithms in Combinatorial Geometry, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1987.
- [17] 坂和正敏, 線形システムの最適化, 森北出版 (1987)
- [18] R. Seidel, "Construction higher-dimensional convex hulls at logarithmic cost per face," Proc. 18th ACM STOC, pp.404-413 (1986).
- [19] R. Seidel, "Linear programming and convex hulls made easy," Proc. 22nd ACM STOC, pp.211-215 (1990).
- [20] C. A. Desoer and M. Vidyasagar, Feedback Systems: Input-Output Properties, Academic Press, New York, 1975.
- [21] I. W. Sandberg, "A frequency domain condition for stability of feedback systems containing a single time-varying nonlinear element," Bell Sys. Tech. J. vol.43, pp.1601-1608, Pt-II, 1964.
- [22] G. Zames, "On the input-output stability of systems with nonlinear time-varying feedback

systems, Pt.I and II," IEEE Trans. Automatic Contr. vol.AC-11, pp.228-238 and pp.465-477, 1966.

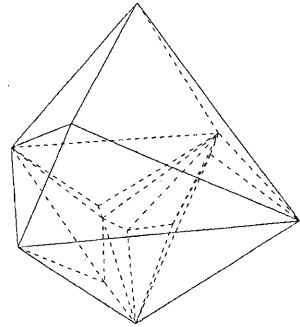


図1 構成された凸多面体P

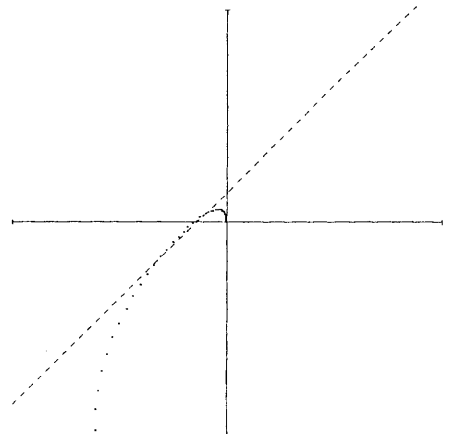


図2 ポポフ軌跡

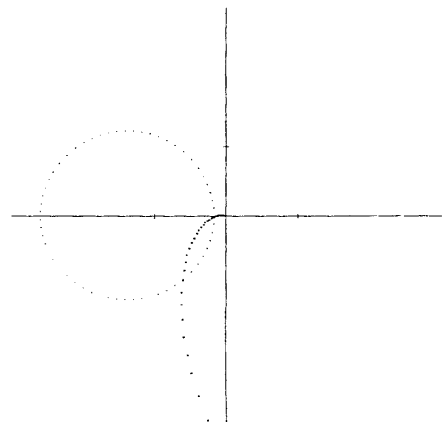


図3 ナイキスト線図と円板条件