アルゴリズム 36－7
（1993. 11. 25）

二変数整数計画問題の幾何学的解法

吉原貴仁

東京工業大学 理工学研究科
情報工学専攻 渡辺研究室

目黒区大岡山2-12-1

yoshi@cs.titech.ac.jp

本論文では，二変数整数計画問題を解くアルゴリズムの一つを提案する．今回のアルゴリズムではまずはじめに与えられた実行可能領域をいくつかの三角形領域に分割する．そして最適解が存在すると思われる三角形領域から順に図形を小さくして解を求める手法を用いずにこれを求める．それによってn個の制約条件式からなる問題を$O\ (n\log n + K\log L)$の手間で解くことができる．但し，Kは分割した三角形領域の中で実際に最適解を探索したものの個数であり，$K = O\ (n)$である．そしてLは与えられた問題中で最も絶対値の大きい数である．

A Geometric Solution for the Two-variable Integer Programming

Kiyohito Yoshihara

Department of Computer Science,
Tokyo Institute of Technology

Meguro-ku Ookayama 1-12-1, Tokyo 152, Japan

yoshi@cs.titech.ac.jp

In this paper, we propose a geometric algorithm for the solving two-variable integer programming problem. This algorithm divides a given feasible region into triangles and searches the optimal solution within the triangular regions in the order we expect the optimal solution to exist . This algorithm can solve the problem with n constraints in $O\ (n\log n + K\log L)$ time, where K is the number of the triangles actually searched in the algorithm , L is the maximum absolute value of numbers in the given problem.

1 序論

本論文では数理計画法の一分野である二変数整数計画問題をその幾何学的な性質を利用して解くアルゴリズムを提案する．

二変数整数計画問題とは二つの整数変数からなる線形の不等式で与えられるいくつかの条件 (制約条件) の下でこれらの変数に関する線形な式 (目的関数) を最適化 (最大化もしくは最小化) する変数の値を求める問題である．特に二変数の場合にはその解の存在領域を座標平面上の幾何学図形としてとらえることができる．

以前にも [LC92] や [KNA92] によって幾何学的性質を用いたアルゴリズムが提案された．これらアルゴリズムは探索領域全体に対してある座標変換を作用させて探索領域を段々小さくしていく．そして最適解が求められるか，もしくは探索領域が十分に小さくなり解が存在しないことがわかるまで同様の計算を続けていく帰納的な繰り返しを用いたものであった．

今回のアルゴリズムの特徴は次の点にある．

- 探索領域全体を何度も小さくして最適解を求める手法を用いない．
- 探索領域全体を一度に探索するのではなく，最適解が存在すると期待される部分から順に探索していく．

本論文は次のような構成をとる．第 2 節では二変数計画問題の一般的な定義とそれに関する用語の説明をする．そして本論文で取り扱う問題を定義して両者の関係を明らかにする．第 3 節では探索領域を分割するアルゴリズムを示す．次の第 4 節では分割した三角形領域内の最適解を探索するためのアルゴリズムを与える．そして最後に第 5 節で全体のまとめを行なう．

2 準備

二変数整数計画問題とは与えられた二つの整数値変数からなる整数係数の線形不等式系の下でそれらの変数からなる整数係数の線形関数を最大化する問題である．形式的には次のように与えられる．

(問題 G)

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & a_{0,1}x_1 + a_{0,2}x_2 \\ \text{制約条件} & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \geq c_1 \\ & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 \geq c_2 \\ & \vdots \\ & a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 \geq c_n \\ & x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \in Z \\ & a_{i,j} \in Z \ (i = 0, \cdots, n, \ j = 1, 2) \\ & c_i \in Z \ (i = 1, \cdots, n) \end{array}$$

ここでは最大化すべき関数 $a_{0,1}x_1 + a_{0,2}x_2$ を**目的関数**といい，変数の非負条件を含む不等式を**制約条件**という．また集合

$$\begin{aligned} X_I \quad = \quad & \{ \ x = (x_1, x_2)^t \mid \\ & a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 \geq c_i, \ i = 1, \cdots, n, \\ & x_1, x_2 \geq 0 \ \} \end{aligned}$$

を**実行可能領域**という．但し，$x = (x_1, x_2)^t$ は 2 次元列ベクトルを表す．集合 X_I に含まれる点を**実行可能解**，x_1, x_2 がともに整数である点を**格子点**という．実行可能解の中で格子点でしかも目的関数の値を最大にする解を**最適解**という．

[Feit84] によれば，問題 (G) を次のように変換することができる．g を目的関数の係数 $a_{0,1}$，$a_{0,2}$ の正の最大公約数とする．この時 Euclid の互除法により

$$r a_{0,1} + s a_{0,2} = g \ , \ |r| < |a_{0,2}| \ , \ |s| < |a_{0,1}|$$

を満足する整数 r, s が存在する．これより座標変換

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{0,2}}{g} & -r \\ -\frac{a_{0,1}}{g} & -s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

を構成する．この変換を T_0 ということにする．そして問題 (G) に対して変換 T_0 を作用させる．すると問題 (G) の目的関数は $-gy$ となる．したがって問題 (G) を解く代わりに，変換して得られる問題 (以降問題 (S) という) で y 座標が最小である実行可能領域内の格子点を求めればよい．

定義 1 凸多角形内の格子点で y 座標が最小であるものを**最小格子点**という．これは問題 (S) の最適解ともいえる．

ここで問題 (S) に変換するための手間を述べる．$a_{0,1}$ と $a_{0,2}$ の最大公約数 g を Euclid の互除法を使って計算する．これは O (log max $(a_{0,1}, a_{0,2})$) で計算可能である [Knu81]．構成した座標変換 T_0 で n 個の制約条件式を変換するのは $O(n)$ で計算可能である．したがって全体で O ($n+$log max $(a_{0,1}, a_{0,2})$) で計算可能である．但し本論文を通じて計算量を考える時には，基本演算 (つまり，$+, -, \times, \div$, そして大小比較) を単位とする．

一般に X_I は座標平面上の凸多角形に対応する．しかし与えられた制約条件によっては X_I が空集合であったり，またはちょうど1点，線分，非有界領域などになってしまうこともある．本論文では X_I が凸多角形であることを仮定する．n 個の制約条件式が与えられた時，それらが座標平面上につくる凸多角形を $O(n \log n)$ で計算することができる [PS85]．

3 アルゴリズムの全体像

この節では問題 (S) を解くアルゴリズム`two-int`の概略を述べる．

prog two $-$ int (**input** 問題 (S)) ;
begin
　制約式から凸多角形を求める ;
　凸多角形の三角形分割 $R_1, \cdots, R_{2n-4}$ を求める. ;
　if R_1 が最小格子点を持つ
　then 最小格子点を出力して終了 ;
　for i := 1 **to** $n-2$ **do**
　　if R_{2i} または R_{2i+1} 内に格子点が存在する
　　then R_{2i} の最小格子点と R_{2i+1} の最小格子点の大きくない方を出力して終了
　end $-$ **for** ;
　if R_{2n-4} が最小格子点を持つ
　then 最小格子点を出力して終了 ;
　" 解なし " と出力して終了
end.

まずはじめに実行可能領域に対応する凸多角形 P を求める．そして P をいくつかの三角形領域 R_i に分割する．具体的にアルゴリズムの内容を述べる．図1のように P が与えられたとする．但し P の頂点数を n とする (例では $n=6$)．はじめに各頂点 P_i を通って x 軸に平行な直線 l (P_i) を引く．この時に P は2つの三角形領域と $(n-3)$ 個以下の台形に分割される．次にこれらの台形それぞれに対角線をちょうど一本引いて二つの三角形に分割する．このようにして P を $(2n-4)$ 個以下の三角形領域に分割する．分割した三角形領域は必ず x 軸に平行な辺を持つ．これによって y 座標に対して下から三角形領域内を順に探索して最初に見つけられた格子点が必ず最適解になることが保証

できる．もちろん同一の台形を構成している二つの三角形については両方の探索を行なってから最適解として出力しなければならない．

このようにして $l\,(P_i)$ と Pの交点で P_iでない方の交点 Q_iを求めることは $O\,(\log n)$ で計算可能である．

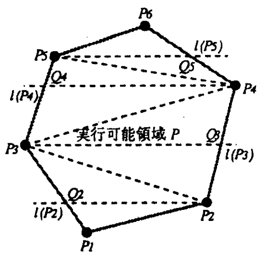

図 1: 凸多角形 Pの三角形分割

この分割で得られる三角形はいずれも一辺が x 軸に平行な三角形である．したがって，これからの考察ではこのような一辺が x 軸に平行な三角形内の最小格子点探索となる．アルゴリズム two-int では三角形の形によって異なった探索方法を用いる．ここではをその形によって四つに分類しておく (図 2 参照)．

定義 2 x 軸に平行な辺をもつ三角形を考える．x 軸に平行な辺を **horizontal side** という．また horizontal side に隣接していない頂点を **origin** という．

定義 3 x 軸に平行な辺を持つ三角形で，y座標に対して horizontal side が origin よりも上側にある三角形を **good located** という．また下側にある三角形を **bad located** という．

定義 4 三角形 Dの origin を原点に一致させた時，y軸が Dと交わりを持つものを **simple**，持たないものを **critical** という．

以上の定義から三角形は図 2 のように分類することができる．

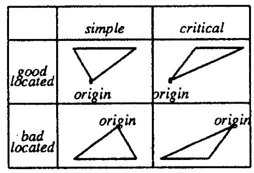

図 2: 三角形領域の分類

4 最小格子点探索

この節では分割した三角形内のすべての最小格子点を求める方法について述べる．先にも述べたようにアルゴリズム two-int では三角形の種類によって異なる探索方法を用いる．

4.1 good located

4.1.1 simple な三角形の最小格子点探索

このような三角形の最小格子点探索の方法は [LC92] に譲る．

4.1.2 critical な三角形の最小格子点探索

ここでははじめに Dの harizontal side を無視して得られるくさび形内で y座標が最小の格子点を求める (以降このような点も最小格子点という)．そして求めた格子点が y座標に対して horizontal side の上下どちら側にあるかを調べる (求め方は後述する)．もし下側にあるのならば，まさにこの点が求める格子点となる．そうでなければ horizontal side は y軸に平行なので D内には格子点が一つもないことがわかる．

定義 5 critical な三角形 Dに対して horizontal side を取り除いて得られる非有界のくさび形領域を $w\,(s_1, s_2)$ と表す．(図 3 参照) 但し s_i $(i = 1, 2)$ $(s_1 < s_2)$ はそれぞれ点 origin を通る直線の傾きとする．

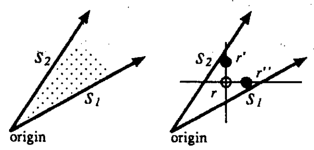

図 3: くさび形 $w\ (s_1, s_2)$

次にくさび形 $w\ (s_1, s_2)$ 内にある最小格子点について有用な補題を与える．

補題 6 $w\ (s_1, s_2)$ 内の格子点 $r\ (x_r, y_r)$ が頂点 origin に最も近い格子点であるための必要十分条件は $w\ (s_1, s_2)$ 内のすべての格子点の中で x 座標，y 座標ともに最小であることである．

証明は [LC92] に譲る．

アルゴリズム `two-int` はくさび形 $w\ (s_1, s_2)$ を次に示す座標変換を用いて変形することによって最小格子点を求める．

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (m \text{ は自然数})$$

補題 7 座標変換 T は以下に示す性質を持つ．

1. 変換前の座標 (以下旧座標とよぶ) での格子点と変換後の座標 (以下新座標とよぶ) での格子点を 1 対 1 に対応付ける．
2. 旧座標での各点の y 座標の値は新座標でもその値が保存される．
3. 旧座標で傾きが $\frac{1}{m}$ の直線は新座標で y 軸に平行な直線に移される．

証明

1 T が unimodular (行列式の値が 1 でしかも行列の各要素が整数である) 行列であることからいえる．

2,3 T の定義より明らか． …証明終り

補題 7 の 3 よりくさび形 $w\ (s_1, s_2)$ に対して，$s_1 < \frac{1}{m} < s_2$ なる自然数 m が存在する時には，T による変換後の D は good located で simple な三角形になる．しかも補題 7 の 2 より $w\ (s_1, s_2)$ での最小格子点は変換後の領域内でも最小格子点である．したがって 4.1.1 節での方法を適用することによってこれを求めることができる．

$s_1 < \frac{1}{m} < s_2$ なる自然数 m が存在するか否かの判定と存在する時の m の値の求め方を次の補題で与える．ここでは連分数についての数学的事実は [Knu81] に譲る．

補題 8 2 つの有理数 m_1，m_2 $(0 \le m_1 < m_2 \le 1)$ の間に $\frac{1}{c}$ (c は自然数) なる有理数が存在するための必要十分条件は m_1，m_2 の第一近似分数の分母が異なることである．

証明

(必要性) 対偶を示す．ある自然数 m，$0 < \delta_2 < \delta_1 < 1$ なる有理数 δ_1，δ_2 が存在して $m_1 = \frac{1}{m+\delta_1}$，$m_2 = \frac{1}{m+\delta_2}$ であったとする．この時 $\frac{1}{m+1} < \frac{1}{m+\delta_1} < \frac{1}{m+\delta_2} < \frac{1}{m}$ となり，m_1 と m_2 の間に $\frac{1}{c}$ (c は自然数) なる有理数が存在しないことになる．

(十分性) ある自然数 m と $0 < \delta_1, \delta_2 < 1$ なる有理数 δ_1，δ_2 が存在して $m_1 = \frac{1}{m+1+\delta_1}$，$m_2 = \frac{1}{m=\delta_2}$ となる時を考えれば十分である．この時 $m_1 = \frac{1}{m+1+\delta_1} < \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m+\delta_2} = \frac{1}{m_2}$ となり，$c = m + 1$ としてやればよい． …証明終り

残された場合は $s_1 < \frac{1}{m} < s_2$ なる自然数 m が存在しない場合である．この場合に観察できる事実を次の補題にまとめておく．

補題 9 くさび形 $w\ (s_1, s_2)$ 内の最小格子点を $r\ (x_r, y_r)$ とする．

1. $s_1 < s_2 < 1$ ならば $w\ (s_1, s_2)$ 内に r と等しい x 座標を持つ格子点は存在しない．
2. $s_1 < \frac{1}{m} < s_2$ なる自然数 m が存在しなければ，$w\ (s_1, s_2)$ 内には r と等しい y 座標を持つ格子点は存在しない．

証明

1 背理法で示す．rと等しいx座標を持つ格子点r'が存在したとする．傾きが1で点r'を通る直線lを考える．$s_1 < s_2 < 1$よりlと格子線$y = x_r$の交点r'' $(x_r - 1, y_r)$がやはりw (s_1, s_2)内の格子点になる．これはrがw (s_1, s_2)内で origin に最も近い格子点であることに矛盾する．

2 背理法で示す．rと等しいy座標を持つ格子点sが存在したとする．傾きが$\frac{1}{m}$で点rを通る直線l_1と傾きが$\frac{1}{m+1}$で点sを通る直線l_2の交点をs'とする．この時s' $(x_r - m, y_r - 1)$はやはりw (s_1, s_2)内の格子点になる．これはrがw (s_1, s_2)内の最小格子点であることに矛盾する．　　　　…証明終り

以上の観察のもとで$s_1 < \frac{1}{m} < s_2$なる自然数

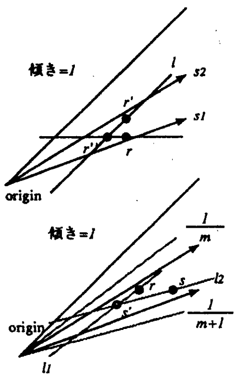

図 4: 補題 10 の証明

mが存在しない時の最小格子点の求め方について述べる．補題10より，以降で考察する問題では$s_1 < s_2 < 1$を仮定しても一般性は失われない．したがって$s_1 = \frac{1}{m+\delta_1}$，$s_2 = \frac{1}{m+\delta_2}$とおける．但し，$m$は整数，$\delta_1$，$\delta_2$は$0 < \delta_2 < \delta_1 < 1$なる有理数とする．まずはじめに$w$ (s_1, s_2)に座標変換Tを作用させてw (s_1, s_2)を変形する．(図 5 の上二つの図参照) そしてさらに変換したくさび形を直線$y = x$に対して対称移動する．この結果，

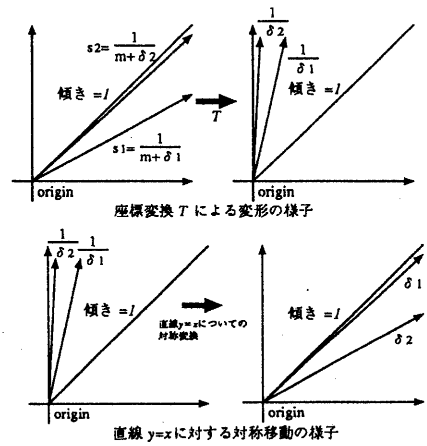

図 5: 座標変換

w (δ_2, δ_1)が得られる．もし$\delta_2 < \frac{1}{n} < \delta_1$なる自然数$n$が存在しないならばこのような変換$T$による変形と$y = x$に対する対称移動を自然数$n$が見つかるまで繰り返す．補題7と9によって図5の左上の図での最適解は図5の右下の図での最適解にもなっている．なぜならば，この時最小格子点と同じx座標，y座標を持つ格子点はくさび形内には存在しないからである．もし何回かの変形で自然数nが存在するならば変換後のDは 4.1.1 節での good located で simple な三角形となる．厳密にいえば horizontal side はその時のx軸とは平行ではない．実際に最小格子点を計算するには最終的に得られた最小格子点にその時までの変換に用いたすべての行列の積の逆行列を一回作用させればよい．

最後にこのような変換の回数の上限について述べる．変換の回数は補題9よりs_1，s_2をそれぞれ連分数展開した時に得られる部分商の個数の多くない方の数に等しい．これはO ($\log \max$ (s_1とs_2

の分母))[Knu81] となる.

4.2 bad located

4.2.1 simple な三角形の最小格子点探索

(図6参照) horizontal side を表す直線の式を $y = c$ (c は定数) とする. 格子線 $y = \lceil c \rceil$ と頂点 origin を通る二辺の交点 $p_1\ (x_1, \lceil c \rceil)$, $p_2\ (x_2, \lceil c \rceil)$ を求める. この時格子点 $q_1\ (\lceil x_1 \rceil, \lceil c \rceil)$ が D内の格子点であるならば, 格子点 $q_1\ (\lceil x_1 \rceil, \lceil c \rceil)$, $(\lceil x_1 \rceil + 1, \lceil c \rceil)$, $\cdots$, $q_2\ (\lfloor x_2 \rfloor, \lceil c \rceil)$ が最小格子点である. q_1が D内の格子点でなければ, 補題7より D内に格子点は一つも存在しないことがわかる.

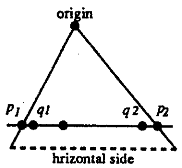

図 6: bad located,simple な三角形の最小格子点探索

4.2.2 critical な三角形の最小格子点探索

horizontal side を表す直線を $y = c$ とする (c は定数). はじめに格子線 $y = \lceil c \rceil$ と三角形領域 Dの交点を計算する. それぞれ $p_1\ (x_1, \lceil c \rceil)$, $p_2\ (x_2, \lceil c \rceil)$ とする. 図6参照. もし格子点 $q_1\ (\lceil x_1 \rceil, \lceil c \rceil)$ が D内の格子点であるならば, 格子点 $q_1\ (\lceil x_1 \rceil, \lceil c \rceil)$, $(\lceil x_1 \rceil + 1, \lceil c \rceil)$, $\cdots$, $q_2\ (\lfloor x_2 \rfloor, \lceil c \rceil)$ を最適解として出力する. そうでなければ, 頂点 origin に最も近い格子点 rを 4.1.2 節での手続きで求める. もし origin に隣接する辺の傾きの第一近似分数が異なるならば, ちょうど一回の座標変換で Dは bad located, simple な三角形に変形できる. したがって以降では第一近似分数が等しいものと仮定する.

もし格子点 rが D内の格子点でなければ, D内には格子点が一つもないことがわかる. D内にある時には実は D 内の格子点は rに限られることがいえる. したがって格子点 rを最適解として出力する. 以下の補題でこれを示す.

補題 10 bad located, critical な三角形 Dにおいて, horizontal side を表す直線を $y = c$ とする. また頂点 origin に最も近い格子点を $r\ (x_r, y_r)$ とする. もし格子線 $y = \lceil c \rceil$ と Dの交線分 l上に格子点がなく, 格子点 rが D内にあるならば, D内の格子点は rに限られる.

証明 Dから得られるくさび形を $w\ (s_1, s_2)$ とする. 傾きが$\frac{1}{m}$で互いの間隔が1である直線群 $y = \frac{1}{m}\ (x - k)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ を考える. この直線群上にない格子点は存在しないことに注意する. さらに交線分 lと直線群が交わると仮定すると交点は格子点 $(k + m\lceil c \rceil, \lceil c \rceil)$ となり補題の仮定に反する. したがって直線群と lは交わらない. 次に直線群の中で格子点 rを通るものを $L\ : y = \frac{1}{m}\ (x - k_0)$ とする. これから二つに場合を分けて考察する.

まず s_1と s_2の第一近似分数が同じ時, 直線群とくさび形が交わりを持つならば, ちょうど2点で交わる. 実はこの場合, くさび形と交わりを持つ直線群中の直線は L だけである. 他にもあると仮定する (図7の右の図参照). L と s_1の交点 p と y 座標が同じで x 座標がちょうど1だけ小さい点 q を考える. この時簡単な計算によって qもこのくさび形内の点であることがわかる. これは lの長さが1より小さいことに矛盾する.

次に第一近似分数が異なる時, s_1, s_2のそれらを m_1, m_2 $(m_2 < m_1)$ とする. 直線群 $y = \frac{1}{m_2}\ (x - k)$ とくさび形を構成する半直線は交わるならばちょうど1点で交わる. したがって, くさび形と交わる直線群中の直線は必ず lとも交わることになるので不合理である. …証明終り

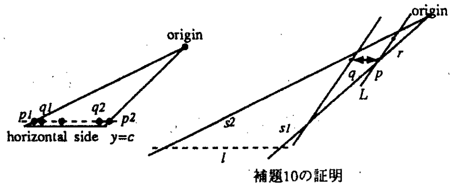

図 7: bad,critical な三角形の最小格子点探索

5 結論

本論文では二変数整数計画問題を幾何学的に解くアルゴリズムを提案した．このアルゴリズムでは

1. 問題の前処理に O $(\log \max(a_{01}, a_{02}))$.但し a_{01}，a_{02}は目的関数の係数
2. 実行可能領域の分割に O $(n \log n)$．但し n は制約条件式の数
3. 分割した一つの三角形の格子点探索に O $(\log L)$．但し L は問題中で絶対値が最大の数

のそれぞれ手間を要する．したがってアルゴリズム全体では，O $(n \log n + c \log L)$ で最適解があればそれを求め，なければ解がないことを出力する．

謝辞

本研究に関して重要な意見や助言・御指導をくださいました渡辺研究室の皆様に感謝を申し上げます．

参考文献

[Feit84] S. D. Feit, "A fast algorithm for the two-variable integer programming problem", *J. of ACM* 31-1 (1984), 99–113.

[KNA92] 金丸 直義, 西関 隆夫, 浅野 哲夫, "Efficient Enumeration of Grid Points in a Polygon and its Application to Integer Programming", 情報処理学会研究報告 92-AL-26, 情報処理学会 (1992.3.23).

[Knu81] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Addison-Wesley, second edition,1981.

[LC92] H. S. Lee, R. C. Chung, "Approximating Vertices of a Convex Polygon with Grid Points in the Polygon", *ISAAC '92 Algorithms and Computation, Lect. Note. in Compt. Sci.* 650 (Springer-Verlag, Dec.1992) 269–278.

[PS85] F. P. Preparata, M. I. Shamos, *Computational Geometry*, (Springer-Verlag, 1985).