

グラフの多重辺付加を許さない4辺連結化問題

高藤大介 田岡智志 渡辺敏正

広島大学工学部第二類(電気系)
724 東広島市鏡山一丁目4-1
(電話) 0824-24-7662 [渡辺]
(ファクシミリ) 0824-22-7195
(電子メール) watanabe@huis.hiroshima-u.ac.jp

重みなしの k 辺連結化問題 (UW- k ECA と略記) とは、与えられた無向グラフ $G = (N, A)$ に付加して得られるグラフ $G' = (N, A \cup A')$ が k 辺連結となるような最小辺集合 A' を求める問題である。 G, G' 共に単純グラフとした UW- k ECA を UW- k ECA(S,SA) と表し、 G は多重グラフでもよいが G' 構成時に多重辺の追加は許さない場合を UW- k ECA(*,SA) と表す。本稿では与えられたグラフの辺連結度 $ec(G) = 2$ の場合の UW-4ECA(S,SA) に対する $O(|N|^2 + |A|)$ 時間のアルゴリズムを提案する。本結果は未解決問題である一般的な UW- k ECA(*,SA) の解決に向けての第一歩である。

辺付加問題, 辺連結度, 4 辺連結性, 多項式時間アルゴリズム

The 4-edge-connectivity augmentation problem without adding multiple edges

Daisuke Takafuji, Satoshi Taoka and Toshimasa Watanabe

t Department of Circuits and Systems, Faculty of Engineering, Hiroshima University,
4-1 Kagamiyama, 1 Chome, Higashi-Hiroshima, 724 Japan
Phone: +81-824-24-7662 (Watanabe) Facsimile: +81-824-22-7195
E-mail: watanabe@huis.hiroshima-u.ac.jp

The unweighted k -edge-connectivity augmentation problem (UW- k ECA for short) is defined by "Given a graph $G = (N, A)$, find an edge set A' of minimum cardinality, with each edge connecting distinct vertices of N , such that $G' = (N, A \cup A')$ is k -edge-connected." Our subject is UW-4ECA(S,SA) for λ -edge-connected graphs G with $\lambda = 2$, where both G and G' are simple in UW- k ECA(S,SA). We propose an $O(|N|^2 + |A|)$ algorithm for solving UW-4ECA(S,SA), where G is 2-edge-connected, simple and $|N| \geq 5$. The result is a first step toward an open problem UW- k ECA(*,SA).

connectivity augmentation problems, edge-connectivity, 4-edge-connectedness, polynomial-time algorithms

1 はじめに

グラフの重みなし k 辺連結化問題 (UW- k ECA) は以下のように定義される: “無向グラフ $G = (N, A)$ が与えられているときに, G に辺集合 A' を付加して得るグラフ $G + A' = (N, A \cup A')$ が k 辺連結グラフとなり, 且つ $|A'|$ が最小である辺集合 A' を求めよ.” 以下の (1), (2) を満たすような UW- k ECA を UW- k ECA(*,**) と定義する. (1) G が単純グラフならば, ** を S と表す. G が多重グラフでもよい場合, * を表す. (2) A' を付加することによって, 新しく多重辺が生成されてもよい場合, ** を MA と表す. A' を付加することによって, 新しく多重辺が生成されてはならない場合, ** を SA と表す.

本稿では, 与えられたグラフの辺連結度が 2 であるときの UW-4ECA(S,SA) に対する解法を提案する. この結果は, 与えられたグラフの辺連結度が 2 よりも小さい場合の UW-4ECA(S,SA), 更には UW-4ECA(*,SA) に対しても使うことができると考えられる. 本稿は, より一般的な UW- k ECA(*,SA) を解くための第一歩の役割を果たすと考えられる.

最小コスト k 辺連結化問題については [1, 3, 6, 12, 13, 18, 19, 20] を, また, 同様に定義される点連結化問題に対しては, 例えば [1, 3, 12, 15, 16, 17] を参照されたい.

UW- k ECA は主に UW- k ECA(*,MA) が議論の対象となっており, 最適解を求める多項式時間の解法が提案されている. Eswaran, Tajar は, [1] で UW-2ECA(*,MA) に対する $O(|N|+|A|)$ の算法を提案している. これは UW-2ECA(*,SA) にも適用できる. Watanabe, Yamakado は, [2] で UW-3ECA(*,MA) に対する $O(|N|+|A|)$ の算法を提案し, 一般の k に対する UW- k ECA(*,SA) に対する算法にもなることを示している. 一般の k に対する UW- k ECA(*,MA) については, [2, 4, 8, 11] を参照されたい.

UW- k ECA(*,SA) に対しては, [10] で 3 辺連結グラフ G が与えられたときの UW-4ECA(*,SA) に対する $O(|N|\log|N|+|A|)$ の算法, 及び 4 辺連結グラフ G が与えられたときの UW-5ECA(*,SA) に対する $O(|N|^2)$ の算法が提案されている.

本稿の目的は, 2 辺連結グラフ G が与えられたときの UW-4ECA(S,SA) に対する $O(|N|^2)$ 算法を提案する.

2 辺連結グラフが与えられたときの UW-4ECA(S,SA) の解法は UW- k ECA(*,MA) とほぼ同様であるが, 唯一異なるのは G において隣接していない頂点対が存在するような 2 つの t -pendant を見つける辺付加の操作である. そのような 2 つの k -pendant を特に注目して, 非隣接対と呼び, 2 組の非隣接対が disjoint であるならば, それらを D -pair となる非隣接対と呼ぶ. また, 非隣接対の中でも 2 つの t -pendant が異なる $(\lambda+1)$ -pendant ($t \geq \lambda+1$) に含まれるものを s -admissible-pair と呼ぶ. [5] で示されている構造グラフは, UW- k ECA(*,MA) を解くときに [4, 8] で計算量を小さくするために使われたが, そのような 2 つの t -pendant を見つけるためには使うのは困難である.

本稿ではまず, s -admissible-pairs に辺を付加して 3 辺連結化し, [9, 10] で提案されている手法を用いて 4 辺連結化する. 我々は与えられたグラフの辺連結度が 2 のときの UW-4ECA(S,SA) に対する最小辺集合 A' の本数について考察する. 辺連結度を 3 から 4 へ上げるときの解となる辺集合の本数は, D -pair となる非隣接対の数によって決まることが [9, 10] で示されている. そこでこのことを考慮しながら, 辺連結度を 2 から 3 へ上げるための解を決定してゆくことに基づいた $O(|N|^2)$ の算法を提案する. Section 3 で辺連結度を 3 にするための解について, Section 4 で辺連結度を 4 にするための解について考察を行う.

2 準備

2.1 諸定義

紙面の都合上で以下に述べる事項以外の諸定義, 用語等は [9, 10] を参照されたい.

グラフ (graph) $G = (V(G), E(G))$ は, 有限な空でない点集合 $V(G)$ と辺集合 $E(G)$ から成る. $V(G), E(G)$ をそれぞれ簡単に V, E と表すこともある.

連結な無向グラフ $G = (V, E)$ において, 2 つの空でない部分点集合 X, Y ($X \subset V, Y \subset V, X \cap Y = \emptyset$) に対して, 辺集合 (X, Y) を次のように定義する. $(X, Y) = \{(u, v) | (u, v) \in E, u \in X, v \in Y\}$. $Y = \bar{X} (= V - X)$ のとき, 辺集合 (X, \bar{X}) を G のカットという. k 本の辺から成るカットを k -カットという. 辺の数が最小の G のカットを最小カットと呼び, その辺の数を G の辺連結度という. グラフ G の辺連結度を $ec(G)$ で表す. k 辺連結グラフ G とは, 辺連結度が k 以上であるグラフ, すなわち, $ec(G) \geq k$ であるグラフである. k 成分とは, グラフ G の点集合で, それに辺を共有する任意の 2 点間に共有しない道が少なくとも k 本あるような極大な点集合である. $|(S, V - S)| < k$ なる k 成分 S を k -pendant と呼ぶ.

2.2 h 成分 ($\lambda+1 \leq h \leq k$)

$ec(G) = 2$ となる単純グラフ $G = (N, A)$ が与えられたとする. 但し, $|N| \geq 5$ である. 以下, $G_2 = G$ とする. $Z = Z(3) \cup Z(4)$ は $G_4 = G_2 + Z$ が単純グラフで, $ec(G_4) = 4$ となるような最小本数の辺集合とする. $Z(3)$ は $G_3 = G_2 + Z(3)$ が単純グラフで, $ec(G_3) = 3$ となるような辺集合とする. $Z(4)$ は $G_4 = G_3 + Z(4)$ が単純グラフで, $ec(G_4) = 4$ となるような辺集合とする.

$ec(G) = \lambda$ なるグラフ G は t 成分 ($\lambda \leq t \leq k$) で構成される. $S \subseteq N$ が m -pendant であるとは, S が m 成分で且つ $d_G(S) \leq m-1$ のときをいう. また, $S \subseteq N$ が external m -pendant であるとは, S が m -pendant であって, しかも $(S, N-S)$ が (S, S') -cut であるような m 成分 S' が存在するときをいう. ここでは, m -pendant と external m -pendant を区別しないで共に m -pendant と呼ぶことにする. また, [14] で m -pendant の中に external $(m+1)$ -pendant が存在することが示されている.

$ec(G) = \lambda$ のグラフ G を $ec(G) = k$ にするために最低必要な辺の本数 $EA(G)$ は, 以下に定義される $D(G)$ によって,

$$EA(G) = \lceil D(G)/2 \rceil$$

と定義される. これを k -augmentation number と呼ぶ. G における全ての $S \in \kappa(t)$ ($\lambda \leq t \leq k-1$) に対し,

$$ED(S) = \max\{0, k - d_G(S)\}, LD(S) = \sum_{S' \in \kappa(t+1), S' \subseteq S} D(S'),$$

とするとき, $D(S) = \max\{ED(S), LD(S)\}$ である. 特に, $S = N$ のとき, $D(N) = LD(N)$ である. よって, $D(G) = D(N) = LD(N)$ である.

UW- k ECA(S,SA) (それぞれ, UW- k ECA(*,MA)) の最適解の辺の本数を $OPT(S)$ ($OPT(M)$) とする. 既に, $OPT(M) = EA(G)$ となることは証明されている. 本稿では, $EA(G) = OPT(M) \leq OPT(S) \leq OPT(M) + 1 = EA(G) + 1$ となることを示す.

それでは, $ec(G_2) = 2$ となるグラフ $G = (N, A) = G_2$ における 4-augmentation number $EA(G) = EA(G_2)$ を求める. グラフ G_2 における 3-pendant を $S_i(3)$ ($1 \leq i \leq n$), 3-pendant でない 3 成分 (以下, 単に 3 成分と呼ぶことにする) を $T_k(3)$ ($1 \leq k \leq m$) とすると, $N = \bigcup_{i=1}^n S_i(3) \cup \bigcup_{k=1}^m T_k(3)$ である. また, 3-pendant $S_i(3)$ は 4-pendant $S_i^2(4)$ ($1 \leq j \leq p(i)$) を含むものとする. なお, $S_i(4)$ や $T_k(4)$ で $S_i(3)$ に含まれる 3-pendant, 4 成分を表すこともある. 3-pendant でない 3 成分 $T_k(3)$ は 4-pendant $T_k^4(4)$ ($0 \leq h \leq q(k)$) を含むものとする. $EA(G_2)$ の定義より, 3-pendant $S_i(3)$ に対する $D(S_i(3))$ は,

$$D(S_i(3)) = \max\{ED(S_i(3)), LD(S_i(3))\} = \max\{2, p(i)\}$$

また, 3-pendant でない 3 成分 $T_k(3)$ に対する $D(T_k(3))$ は,

$$D(T_k(3)) = \max\{ED(T_k(3)), LD(T_k(3))\} = \max\{\max\{0, 4 - d_{G_2}(T_k(3))\}, q(k)\} = \max\{0, 4 - d_{G_2}(T_k(3)), q(k)\}$$

Proposition 2.1 [2] 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ において, 全ての $X, Y \subseteq V$ に対し, 以下の等式が成り立つ.

$$d_G(X) + d_G(Y) = d_G(X \cup Y) + d_G(X \cap Y) + 2|(X, Y)| \quad (2.1)$$

$$d_G(X) + d_G(Y) = d_G(X - Y) + d_G(Y - X) + 2|(V - X \cup Y, X \cap Y)| \quad (2.2)$$

但し, $d_G(\emptyset) = 0$ である.

$4 - d_{G_2}(T_k(3)) \leq q(k)$ であることを示す. $d_{G_2}(T_k(3)) \geq 4$ ならば, 明らか. よって, $d_{G_2}(T_k(3)) = 3$ の場合を考える. $d_{G_2}(T_k(3)) = 2$ は $T_k(3)$ が 3-pendant であることになり, 矛盾する. よって, この場合はない.

以上の議論より, $4 - d_{G_2}(T_k(3)) \leq q(k)$ である.

$q(k) \geq 0$ だから, $D(T_k(3)) = q(k)$ である.

$$D(N) = LD(N) = \sum_{i=1}^n (\max\{2, p(i)\}) + \sum_{k=1}^m q(k) = D(G)$$

$\sum_{k=1}^m q(k) = q$, つまり全ての 3-pendant でない 3 成分に含まれる 4-pendant の総数を q とすると,

$$D(G) = \sum_{i=1}^n (\max\{2, p(i)\}) + q$$

である。ゆえに、

$$\begin{aligned} EA(G_2) &= EA(G) \\ &= \lceil D(G)/2 \rceil \\ &= \lceil \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (\max\{2, p(i)\}) + q \right) \rceil \end{aligned}$$

となる。 G_2 における3-pendantを $S_i(3)$ ($1 \leq i \leq n$)とし、それぞれ4-pendant $S_i^j(4)$ ($1 \leq j \leq p(i)$)を含むものとする。また、全ての3成分に含まれる4-pendantを $T_k(4)$ ($1 \leq k \leq q$)とする。このとき、 $G_4 = G_2 + Z$ が単純グラフで $ec(G_4) = ec(G_2) + 2 = 4$ となるような Z は、以下のことを満たす。

$$|Z| \geq \lceil \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (\max\{p(i), 2\}) + q \right) \rceil$$

Proposition 2.2 [10] 任意の k -pendant $S(k)$ は $|S(k)| = 1$ 又は $|S(k)| \geq k+1$ である。

3 3 辺連結化

UW-kECA(*,MA) は、 k -pendant に含まれる頂点間に辺を付加することによって、辺連結度を $\lambda+1, \lambda+2, \dots, k$ と上げている。こうして、 $OPT(M) = EA(G)$ とすることができる。UW-4ECA(S,SA)においても、この方法が使えるならば、最適解の辺の本数 $OPT(S)$ を $OPT(S) = EA(G) = OPT(M)$ となる。

グラフ $G = (N, A)$ において、任意の異なる4-pendant $S_1(4), S_2(4)$ に対し $(\forall u_1 \in S_1(4), \forall u_2 \in S_2(4)), (u_1, u_2) \in A$ となるとき、この4-pendantのpairを隣接対と呼び、 $S_1(4) \chi S_2(4)$ と表す。そうでない4-pendantのpairを非隣接対と呼び、 $S_1(4) \bar{\chi} S_2(4)$ と表す。2組の非隣接対 $\{S_1(4), S_2(4)\}, \{S_3(4), S_4(4)\}$ が $S_1(4), S_2(4) \cap \{S_3(4), S_4(4)\} = \emptyset$ を満たすならば、この2組の非隣接対がdisjointであるという。また、 t 個の非隣接対 $\{S_1(4), S_{1+t}(4)\}, \dots, \{S_t(4), S_{2t}(4)\}$ が任意の2組がdisjointとなるならば、この t 個の非隣接対をD-pairとなる非隣接対という。

4-pendant $S_j(4), S_k(4)$ に対し、以下の条件を満たすならば、この $S_j(4), S_k(4)$ のpairを特にs-admissible-pairと呼ぶ。

- (1) $S_j(4) \bar{\chi} S_k(4)$,
- (2) $S_j(4) \subseteq S_j(3), S_k(4) \subseteq S_k(3)$ 且つ $S_j(3) \cap S_k(3) = \emptyset$ なる3-pendant $S_j(3), S_k(3)$ がある。

s-admissible-pair から点を選んで辺を結ぶときには、 $u_j \in S_j(4), u_k \in S_k(4)$ を選ぶものとする。 u_j, u_k は既存のグラフでは非隣接対である。以下ではこのことを単に"s-admissible-pair $S_j(4), S_k(4)$ を辺で結ぶ"という表現をする。また、admissible-pair $S_j(4), S_k(4)$ を $S_j(4) \cup S_k(4)$ と表す。

2組のs-admissible-pairs $\{S_1(4), S_2(4)\}, \{S_3(4), S_4(4)\}$ が $\{S_1(3), S_2(3)\} \cap \{S_3(3), S_4(3)\} = \emptyset$ を満たすならば、 $\{S_1(4), S_2(4)\}, \{S_3(4), S_4(4)\}$ はdisjointであると呼ぶ。

$ec(G_2) = 2$ なるグラフ G_2 に $n (\geq 2)$ 個の互いに異なる3-pendantが存在すると仮定する。 n が偶数のとき、 $\lceil n/2 \rceil$ 個のs-admissible-pairs $\{S_1(4), S_{1+\lceil n/2 \rceil}(4)\}, \dots, \{S_{\lceil n/2 \rceil}(4), S_n(4)\}$ 中の任意の2組がdisjointとなるならば、これらを単に、 $\lceil n/2 \rceil$ 個のdisjointなs-admissible-pairsと呼ぶ。一方、 n が奇数のとき、 $\lceil n/2 \rceil$ 個のs-admissible-pairs $\{S_1(4), S_{1+\lceil n/2 \rceil}(4)\}, \dots, \{S_{\lceil n/2 \rceil}(4), S_n(4)\}, \{S_{\lceil n/2 \rceil}(4), S_{n+1}(4)\}$ が以下の(1),(2)を満たすならば、これらを単に、 $\lceil n/2 \rceil$ 個のdisjointなs-admissible-pairsと呼ぶ。

- (1) $\lceil n/2 \rceil - 1$ 個の s-admissible-pairs $\{S_1(4), S_{1+\lceil n/2 \rceil}(4)\}, \dots, \{S_{\lceil n/2 \rceil}(4), S_n(4)\}$ 中の任意の2組が disjoint である;
- (2) $S_n(4) \cup S_{n+1}(4) \subseteq S_n(3)$ であり、 $S_n(3)$ に含まれる4-pendant が1個のときは $S_n(4) = S_{n+1}(4)$ とし、4-pendant が2個以上るとき $S_n(4) \neq S_{n+1}(4)$ である。

UW-4ECA(S,SA)においては、まず $n (\geq 2)$ 個の3-pendantが存在すると仮定すると、 $\lceil n/2 \rceil$ 個のdisjointなs-admissible-pairsを見つける必要がある。そこで、まず以下の3つのpropositionを証明なしで述べておく。

Proposition 3.1 グラフ $G = (N, A)$ において $(\lambda+1)$ -pendant $S(\lambda+1)$ は、 k -pendant $S(k)$ を含むものとする。また、 $k > \lambda+1$ 且つ $S(k) \subseteq S(\lambda+1)$ とする。このとき、 $|S(k), N - S(\lambda+1)| \leq \min\{\lfloor \frac{k-\lambda}{2} \rfloor, \lambda\}$ となる。

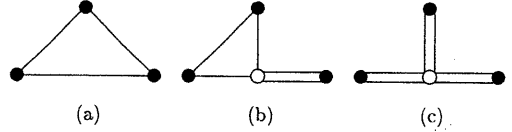


Figure 1: $n = 3$ のときに各3成分を1点に縮約したグラフ $S(G_2)$

Proposition 3.2 [10] $ec(G) = \lambda$ ($1 \leq \lambda \leq 3$) となるグラフ $G = (N, A)$ において、 $(\lambda+1)$ -pendant $S_i(\lambda+1)$ ($1 \leq i \leq 2$) に含まれる4-pendantを $S_i(4)$ とする。 $S_1(4) \chi S_2(4)$ ならば、 $|S_1(4)| = |S_2(4)| = 1$ である。

Proposition 3.3 $ec(G) = \lambda$ となるグラフ $G = (N, A)$ において n 個の $(\lambda+1)$ -pendants $S_i(\lambda+1)$ ($1 \leq i \leq n$) が存在するとし、これらが含む k -pendant を $S_i^j(k)$ ($1 \leq j \leq p(i)$) とする。

任意の $S_a(\lambda+1), S_b(\lambda+1)$ ($a \neq b$) が $\forall r$ ($1 \leq r \leq p(a)$), $\forall m$ ($1 \leq m \leq p(b)$) に対し、 $S_r^{(k)} \chi S_m^{(k)}$ を満たすならば、以下の(1),(2)のいずれかが成り立つ。

- (1) $n = 2$ ならば、 $p(a)p(b) \leq \lambda$
 - (2) $n \geq 3$ ならば、 $p(a)p(b) \leq \lambda/2$
- 今、 $\lambda = 2, k = 4$ のときを考える。

Proposition 3.4 $n = 2$ のとき、 $S_1(4) \cup S_2(4)$ となる4-pendant $S_i(4) \subseteq S_i(3)$ ($i = 1, 2$) が存在しないための必要十分条件は、一般性を失わず、次の条件(1)-(4)が成り立つことである。

- (1) $p(1) = 1$ 且つ $p(2) = 2$,
- (2) $S_1(4) \chi S_2^1(4)$ 且つ $S_1(4) \chi S_2^2(4)$,
- (3) $N = S_1(3) \cup S_2(3)$,
- (4) $S_1(3) = S_1(4)$ 且つ $S_2(3) \neq S_2^1(4) \cup S_2^2(4)$.

(Proof) (十分性) 明らかに成り立つ。

(必要性) 3-pendant $S_i(3)$ ($i = 1, 2$) に含まれる4-pendantを $S_i^j(4)$ ($1 \leq j \leq p(i)$) とする。仮定より、 $S_i^j(4) \chi S_i^k(4)$ である。よって、Proposition 3.3より、 $p(1)p(2) \leq 2$ である。

$p(1) = p(2) = 1$ のとき、 $S_1^1(4) \chi S_2^1(4)$ だから、 $S_1^1(4) = \{u_1\}, S_2^1(4) = \{u_2\}$ 且つ $(u_1, u_2) \in A$ である。 $d_{G_2}(S_i(3)) = 2$ ($1 \leq i \leq 2$) より、まず、ある $x_i \in S_i(3)$ ($1 \leq i \leq 2$)、 $y_1, y_2 \in N - S_1(3) \cup S_2(3)$ が存在して、 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ であると仮定する。このとき、2-cut $(S_1(3) \cup S_2(3), N - S_1(3) \cup S_2(3))$ が存在するので、 $N - S_1(3) \cup S_2(3)$ は1つ以上3-pendantを含む。これは、 G_2 における3-pendantが $S_1(3), S_2(3)$ のみであることに矛盾する。

次に、 $(x_1, x_2) \in A$ とする。 $d_{G_2}(S_i^1(4)) = 3$ より、 $Y = S_1(3) - S_1^1(4)$ とすると、 $|S_1^1(4), Y| = 2$ である。よって、 $|Y, N - Y| = 3$ となり、 Y に少なくとも1個の4-pendantが存在する。これは、 $p(1) = 1$ に矛盾する。

よって、一般性を失わず、 $p(1) = 1$ 且つ $p(2) = 2$ が成り立つ。 $S_1^1(4) \chi S_2^1(4)$ 且つ $S_1^1(4) \chi S_2^2(4)$ だから、 $S_1(4) = \{u_1\}, S_2^1(4) = \{u_2\}, S_2^2(4) = \{v_2\}$ 且つ $(u_1, u_2), (u_1, v_2) \in A$ である $S_1^1(4) \neq S_1(3)$ ならば、Proposition 3.1に矛盾するので、 $S_1^1(4) = S_1(3)$ である。

$p(2) \geq 2$ と Proposition 2.2より、 $|S_2(3)| \geq 4$ である。今、 $|S_2^1(4)| = 1$ ($i = 1, 2$) だから、 $S_2(3) \neq S_2^1(4) \cup S_2^2(4)$ である。よって、(2),(4)が成り立つ。

また、 $d_{G_2}(S_1(3)) = d_{G_2}(S_2(3)) = 2$ より、 $|(S_1(3) \cup S_2(3), N - S_1(3) \cup S_2(3))| = 0$ となり、 $N \neq S_1(3) \cup S_2(3)$ ならば、 $ec(G_2) = 2$ に矛盾する。よって、 $N = S_1(3) \cup S_2(3)$ である。つまり、(3)が成り立つ。□

$ec(G_2) = 2$ となるグラフ $G_2 = (N, A)$ に3-pendantが3個存在するときを考える。このとき、各3成分を1点に縮約したグラフ $S(G_2)$ はカタスになるので、縮約したグラフ $S(G_2)$ は Figure 1の(a)-(c)のいずれかの形になる。

$S(G_2)$ が Figure 1の(a)のようになるグラフ G_2 を type C、 $S(G_2)$ が Figure 1の(b),(c)のようになるグラフ G_2 を type Tとそれぞれ定義する。

Proposition 3.5 $n = 3$ のとき、2個のdisjointなs-admissible-pairsが存在する。

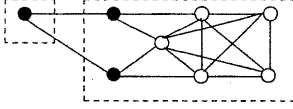


Figure 2: type M のグラフ但し、破線の四角は 3-pendant であり、実線の楕円は 3 成分である。また、黒丸は 1 点のみで 4-pendant である。以降、Fig. 中では同様に表す。

(Proof) G_2 が type T のとき、明らかに成り立つ。

G_2 が type C のとき、 G_2 における 3-pendant を $S_i(3)$ ($1 \leq i \leq 3$) とする。また、3-pendant $S_i(3)$ ($1 \leq i \leq 3$) が含む 4-pendant を $S_i^j(4)$ ($1 \leq j \leq p(i)$) とする。

一般性を失わず、 $\forall j$ ($1 \leq j \leq p(1)$)、 $\forall r$ ($1 \leq r \leq p(2)$) に対し、 $S_1^j(4) \cap S_2^r(4)$ 且つ $S_1^j(4) \cap S_3^r(4)$ と仮定する。Proposition 3.3 より、 $p(1) = p(2) = 1$ である。同様に $\forall j$ ($1 \leq j \leq p(1)$)、 $\forall m$ ($1 \leq m \leq p(3)$) に対し、 $S_1^j(4) \cap S_3^m(4)$ と仮定すると、 $p(1) = p(3) = 1$ である。よって、3-pendant $S_1(3)$ に含まれる 4-pendant は $S_1(4) \subseteq S_1(3)$ のみであり、 $|S_1(4)| = 1$ である ($1 \leq i \leq 3$)。また、 $S_1(4) = \{u_i\}$ 且つ $(u_1, u_2), (u_1, u_3) \in A$ である。 $S_1(4) \neq S_1(3)$ とすると、 $|(S_1(4), N - S_1(3))| = 2$ となり、Proposition 3.1 に矛盾する。よって、 $S_1(4) = S_1(3) = \{u_1\}$ である。また、 $|N| \geq 5$ より、 $|S_2(3)| \geq 2$ 又は $|S_3(3)| \geq 2$ である。つまり、 $S_2(3) - S_2(4) \neq \emptyset$ 又は $S_3(3) - S_3(4) \neq \emptyset$ である。一般性を失わず、 $S_2(4) \subset S_2(3)$ とする。Proposition 3.1 より、 $(u_2, u_3) \notin A$ である。つまり、 $x \in S_2(3) - S_2(4)$ 、 $u'_3 \in S_3(3)$ に対し、 $(x, u'_3) \in A$ である。 $d_{G_2}(S_2(4)) = 3$ より、 $Y = S_2(3) - S_2(4)$ とすると、 $|(Y, S_2(4))| = 2$ である。よって、 $S_2(3) - S_2(4)$ は少なくとも 1 個の 4-pendant を含む。これは、 $p(2) = 1$ に矛盾する。ゆえに、 $S_1(4) \cap S_2(4)$ となる非隣接対が存在する。

同様に $S_2(4) \cap S_3(4)$ となる非隣接対が存在する。 \square

次に、 $n \geq 4$ のときを考える。[21] は、UW-3ECA(*,MA) の解法を提案しているが、 $|N| \geq 4$ ならば、その解法で得られた解が UW-3ECA(*,SA) に対する解であることも示している。今、 $n \geq 4$ だから、明らかに [21] の解法を用いて多重辺付加を許さないで、辺連結度を 3 にすることができる。[21] の結果より、 G において $|(S_j(3), S_r(3))| = 0$ とする 3-pendant $S_j(3), S_r(3)$ ($1 \leq j \neq r \leq n$) が $\lfloor n/2 \rfloor$ 個存在する。

3-pendant $S_i(3)$ に含まれる 4-pendant を $S_i^j(4)$ ($i = j, r$) とすると、 $|(S_j^i(4), S_r(4))| = 0$ となり、 $S_j^i(4) \cap S_r(4)$ である。つまり、 $S_j^i(4) \cap S_r(4)$ である。よって、 $n \geq 4$ のとき、 $\lfloor n/2 \rfloor$ 個の disjoint な s -admissible-pairs が存在する。

Proposition 3.4, 3.5 と合わせて、以下の lemma が成り立つ。

Lemma 3.1 $ec(G) = 2$ である $G = (N, A)$ は G_2 に n (≥ 2) 個の 3-pendant が存在すると仮定する。 $\lfloor n/2 \rfloor$ 個の disjoint な s -admissible-pairs が存在しないための必要十分条件は、以下の (1)-(5) が成り立つことである。

- (1) $p(1) = 1$ 且つ $p(2) = 2$,
- (2) $S_1(4) \cap S_2^1(4)$ 且つ $S_1(4) \cap S_2^2(4)$,
- (3) $N = S_1(3) \cup S_2(3)$,
- (4) $S_1(3) = S_1(4)$ 且つ $S_2(3) \neq S_2^1(4) \cup S_2^2(4)$,
- (5) $n = 2$.

Lemma 3.1 の (1)-(5) を満たすグラフを type M と呼ぶ (Fig. 2 参照)。

Proposition 3.6 与えられたグラフ $G = (N, A)$ が type M ならば、 $OPT(S) = OPT(M) + 1$ である。

(Proof) $OPT(S) \geq 3 = OPT(M) + 1$ は明らかである。 $S_2^1(4) \cap S_2^2(4)$ より、 $OPT(S) \leq 3 = OPT(M) + 1$ も容易に分かる。 \square

Proposition 3.7 G_2 が type M でないならば、次の (1) と (2) が成り立つ。

- (1) 与えられたグラフ G_2 の disjoint な s -admissible-pairs を $\lfloor n/2 \rfloor$ 本の辺で結ぶことによって辺連結度が 3 となる単純グラフ G_3 を作ることができる。
- (2) $EA(G_3) = EA(G_2) - \lfloor n/2 \rfloor$ である。

(Proof) type M でないとする。 $n \geq 3$ ならば、Lemma 3.1 より、disjoint な s -admissible-pairs が $\lfloor n/2 \rfloor$ 個存在する。よって、[21] の結果より、(1) が成り立つ。 $n = 2$ のときには、Proposition 3.4 より、 s -admissible-pair が 1 組存在する。よって、やはり (1) が成り立つ。

なお、 $ED(S_i(3)) = 2$ である。 G_2 における 3-pendant $S_i(3)$ に対し、 $S_i(3)$ に 1 本の辺を付加されたとき、 $(S_i(3))$ は 1 本の辺を付加した後では単なる集合であるが $D(S_i(3))$ は次のようになる。

$$D(S_i(3)) = \max\{ED(S_i(3)), LD(S_i(3))\} - 1$$

また、 $S_i(3)$ に 2 本辺を付加されたとき、 $ED(S_i(3))$ と $LD(S_i(3))$ の大小関係で 2 通り考えられるが、いずれにしても $D(S_i(3))$ は次のようになる。

$$D(S_i(3)) = \max\{ED(S_i(3)), LD(S_i(3))\} - 2$$

となる。 G_3 における 4-pendant はいずれも集合としてのある $S_i(3)$ または $T_i(3)$ に含まれている。

n が偶数のとき、

$$\begin{aligned} D(G_3) &= \left\{ \sum_{i=1}^n (\max\{ED(S_i(3)), LD(S_i(3))\} - 1) \right\} + q \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n (\max\{2, p(i)\} - 1) \right\} + q \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n (\max\{2, p(i)\}) \right\} - n + q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EA(G_3) &= \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\max\{2, p(i)\}) - n + q \right] \\ &= \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\max\{2, p(i)\}) + q \right] - n/2. \end{aligned}$$

n が奇数のとき、

$$\begin{aligned} D(G_3) &= \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (\max\{ED(S_i(3)), LD(S_i(3))\} - 1) \right\} \\ &\quad + \max\{ED(S_n(3)), LD(S_n(3))\} - 2 + q \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (\max\{2, p(i)\} - 1) \right\} + \max\{2, p(n)\} - 2 + q, \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n (\max\{2, p(i)\}) \right\} - n - 1 + q \end{aligned}$$

$$EA(G_3) = \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n (\max\{2, p(i)\}) + q \right\} \right] - (n+1)/2.$$

ゆえに、 n の偶数、奇数の場合を合わせて、

$$\begin{aligned} EA(G_3) &= \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n (\max\{2, p(i)\}) + q \right\} \right] - \lfloor n/2 \rfloor \\ &= EA(G_2) - \lfloor n/2 \rfloor, \end{aligned}$$

$$D(G_3) = \sum_{i=1}^n (\max\{2, p(i)\}) + q - 2\lfloor n/2 \rfloor$$

となる。よって、(2) が成り立つ。 \square

4 4 辺連結化

この section では、以下の lemma が成り立つことを証明する。

Lemma 4.1 G_2 が以下のいずれかを満たす場合、 $OPT(S) = OPT(M) + 1$ となる。そうでない場合、 $OPT(S) = OPT(M)$ となる。

(1) $n = 2$ 且つ以下の (a)-(e) のどれかが成り立つ:

- (a) $p(1) = 1, p(2) = 2, q = 0, S_1(4) = S_1(3)$ 且つ $(S_1(4) \cap S_2^1(4))$ 又は $(S_1(4) \cap S_2^2(4))$ (なお、 $S_1(4) \cap S_2^1(4)$ 且つ $S_1(4) \cap S_2^2(4)$ ならば type M である),
- (b) $p(i) = 1, q = 0, S_i(4) = S_i(3), |S_i(4)| = |S_i(3)| = 1$ ($i = 1, 2$).

- (c) $p(1) = 1, p(2) \leq 2, q = 2, S_1(4) = S_1(3), S_1(4)\chi T_1(4), S_1(4)\chi T_2(4)$ 且つ $T_1(4)\chi T_2(4)$,
 (d) $p(1) = p(2) = 1, q = 2, S_1(4) = S_1(3), S_1(4)\chi T_1(4)$ 且つ $S_1(4)\chi T_2(4)$,
 (e) $p(i) = 1, S_i(4) = S_i(3) (i = 1, 2), q = 2, S_1(4)\chi T_1(4)$ 且つ $S_2(4)\chi T_1(4)$.

- (2) $n = 3, S_i(3) = S_i(4) (i = 1, 2), p(3) \leq 2$ 且つ $S_1(4)\chi S_2(4)$.
 (3) $n = 4, S_i(3) = S_i(4) (1 \leq i \leq 3), p(4) \leq 2, S_1(4)\chi S_2(4)$ 且つ $S_2(4)\chi S_3(4)$.

G_2 が type M のときは, Proposition 3.6 より, $OPT(S) = OPT(M) + 1$ である. よって, 以下, G_2 が type M でない と仮定する.

以下では, $OPT(S) = OPT(M)$ となる場合について, $OPT(S) = OPT(M) + 1$ となる場合については $2 \leq n \leq 4$ と $n \geq 5$ の 2 つの場合についてそれぞれ考える.

次の結果は以下で用いる.

Theorem 4.1 [9, 10] $ec(G_3) = 3$ となるグラフ G_3 に 4-pendant が p 個存在するとする. $G_4 = G_3 + Z(4)$ が $ec(G_4) = ec(G_3) + 1 = 4$ なる単純グラフで, しかも $|Z(4)| = \lfloor p/2 \rfloor$ なる辺集合 $Z(4)$ が存在するための必要十分条件は, 任意の 2 組が D -pair となる非隣接対が $\lfloor p/2 \rfloor$ 個存在することである.

まず, Proposition 4.1 で $OPT(S) = OPT(M)$ となる場合を扱う.

Proposition 4.1 以下の (1) と (2) が成り立つならば, $OPT(S) = OPT(M)$ となる.

- (1) G_2 が type M でない.
 (2) $G_3 = G_2 + Z(3)$ における 4-pendant の数を p とすると, G_3 に任意の 2 組が D -pair となる非隣接対が $\lfloor p/2 \rfloor$ 個存在する.

(Proof) (1) より, 4-pendant の数 p は, Proposition 3.7 の証明より, 以下のようになる.

$$p = D(G_3) = \sum_{i=1}^n (\max\{2, p(i)\}) + q - 2\lfloor n/2 \rfloor.$$

(2) より, G_3 に D -pair となる非隣接対が $\lfloor p/2 \rfloor$ 個存在するので, Theorem 4.1 より, $G_4 = G_3 + Z(4)$ が $ec(G_4) = ec(G_3) + 1 = 4$ なる単純グラフで, $|Z(4)| = \lfloor p/2 \rfloor$ なる辺集合 $Z(4)$ が存在する.

ゆえに, $Z = Z(3) \cup Z(4)$ とすると, $G_4 = G_2 + Z$ は単純グラフで $ec(G_4) = ec(G_2) + 2 = 4$ であり, 且つ

$$\begin{aligned} |Z| &= |Z(3)| + |Z(4)| \\ &= \lfloor n/2 \rfloor + \lfloor p/2 \rfloor \\ &= \lfloor n/2 \rfloor + \left\lceil \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n (\max\{p(i), 2\}) + q - 2\lfloor n/2 \rfloor \right\} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n (\max\{p(i), 2\}) + q \right\} \right\rceil \end{aligned}$$

$OPT(S) \geq OPT(M)$ 且つ $|Z| \geq OPT(S)$ より,

$$\begin{aligned} OPT(S) &= \left\lceil \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n (\max\{p(i), 2\}) + q \right\} \right\rceil \\ &= EA(G_2) \\ &= OPT(M) \end{aligned}$$

となる. \square

4.1 $2 \leq n \leq 4$ のとき

4.1.1 $n = 2$ のとき

$n = 2$ のとき, $ec(G_3) = 3$ となる単純グラフ G_3 に対し, $G_4 = G_3 + Z(4)$ が $ec(G_4) = ec(G_3) + 1 = 4$ なる単純グラフとなる辺集合 $Z(4)$ が $|Z(4)| > EA(G_3)$ なる場合を次の Proposition 4.2 にまとめておく.

Proposition 4.2 $n = 2$ のとき, G_3 において D -pair となる非隣接対が $\lfloor p/2 \rfloor$ 個存在しないならば, G_2 が type M でなく, 以下の (1)-(6) のどれかを満たす場合である.

- (1) $p(1) = 1, p(2) = 2, q = 0, S_1(4) = S_1(3), (S_1(4)\chi S_2^1(4))$ 又は $S_1(4)\chi S_2^2(4)$;

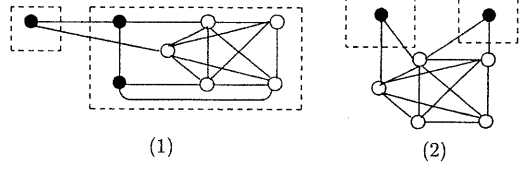


Figure 3: $n = 2, q = 0$ のとき (Proposition 4.3).

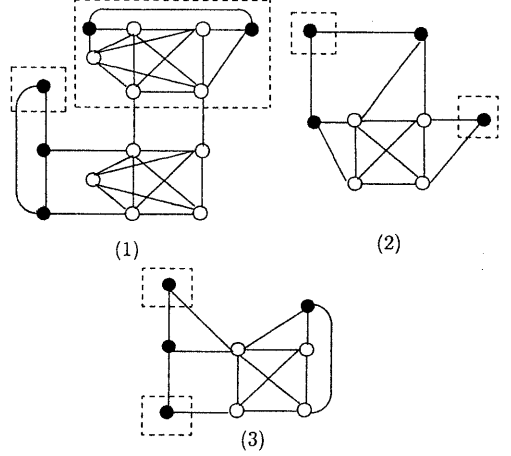


Figure 4: $n = 2, q = 2$ のとき (Proposition 4.4).

- (2) $p(i) = 1, q = 0, S_i(4) = S_i(3), |S_i(4)| = |S_i(3)| = 1 (i = 1, 2), S_1(4)\chi S_2(4)$;
 (3) $p(1) = 1, p(2) = 2, q = 2, |S_1(3)| = 1, S_1(4)\chi T_1(4), S_1(4)\chi T_2(4), T_1(4)\chi T_2(4)$;
 (4) $p(1) = p(2) = 1, q = 2, |S_1(3)| = 1, S_1(4)\chi T_1(4), S_1(4)\chi T_2(4)$;
 (5) $p(i) = 1, |S_i(3)| = 1 (i = 1, 2), q = 2, S_1(4)\chi T_1(4), S_2(4)\chi T_1(4)$;
 (6) $N = \{u_i | 1 \leq i \leq 6\}, N_a = \{u_1, u_2, u_3\}, N_b = \{u_4, u_5, u_6\}, A = \{(u_a, u_b) | \forall u_j \in N_j (j = a, b)\} - \{(u_1, u_4)\}$.

$|Z(4)| > EA(G_3)$ ならば G_3 に含まれる 4-pendant の数 p は $p = 2, p = 4, p = 6$ のいずれかである [9, 10]. $p = 2$ のときは Proposition 4.3 で, $p = 4$ のときは Proposition 4.4 で, $p = 6$ のときは Proposition 4.6 でそれぞれ証明する. これらより, Proposition 4.2 が証明される.

Proposition 4.3 $n = 2, p = 2$ のとき, G_3 において D -pair となる非隣接対が $\lfloor p/2 \rfloor$ 個存在しないならば次の (1) 又は (2) が成り立つ. しかも, もしこれらのいずれかが成り立つとき, $OPT(S) = OPT(M) + 1$ である (Fig. 3 参照).

- (1) $p(1) = 1, p(2) = 2, q = 0, S_1(4) = S_1(3), (S_1(4)\chi S_2^1(4))$ 又は $S_1(4)\chi S_2^2(4)$;
 (2) $p(1) = p(2) = 1, q = 0, |S_i(4)| = |S_i(3)| = 1 (i = 1, 2), S_1(4)\chi S_2(4)$.

(Proof) $n = 2, p = 2$ より,

$$\begin{aligned} p &= \sum_{i=1}^2 (\max\{p(i), 2\}) + q - 2\lfloor 2/2 \rfloor \\ &= \max\{p(1), 2\} + \max\{p(2), 2\} + q - 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

よって,

$$\max\{p(1), 2\} + \max\{p(2), 2\} + q = 4$$

である。 $\max\{p(i), 2\} \geq 2$ ($i = 1, 2$) より, $q = 0$ 且つ $p(i) \leq 2$ ($i = 1, 2$) である。

$p(1) = p(2) = 2$ とする。 $u_i \in S_i(4)$ ($i = 1, 2$) に対し, $Z(3) = \{(u_1, u_2)\}$ とすると, $G_3 = G_2 + Z(3)$ に D-pair となる非隣接対が $\lfloor p/2 \rfloor (= 1)$ 個存在しないと仮定する。このとき, $p(1) + p(2) \leq 3$ である。よって, 一般性を失わず, $p(1) = 1$ とする。このとき, $S_1(3)$ は G_3 における一つの 4-pendant になる。よって, $|S_1(3)| = 1$ つまり $S_1(3) = S_1(4)$ であり, $S_2^1(4), S_2^2(4)$ のうち u_2 を含まない $S_2^1(4)$ に対し, $S_1(4) \setminus S_2^1(4)$ でなければならない。 $p(1) = p(2) = 1$ とする。上述と同様に考えれば, $|S_1(3)| = |S_2(3)| = 1$ である。よって, (2) が成り立つ。 Fig. 3 より, $OPT(S) = OPT(M) + 1$ となる。 \square

Proposition 4.4 $n = 2, p = 4$ のとき, G_3 において D-pair となる非隣接対が $\lfloor p/2 \rfloor$ 個存在しないならば, 次の (1)-(3) のいずれかが成り立つ。しかも, もしこれらのいずれかが成り立つとき, $OPT(S) = OPT(M) + 1 = 4$ である (Fig. 4 参照)。

- (1) $p(1) = 1, p(2) = 2, q = 2, |S_1(3)| = 1, S_1(4) \setminus T_1(4), S_1(4) \setminus T_2(4), T_1(4) \setminus T_2(4)$,
- (2) $p(1) = p(2) = 1, q = 2, |S_1(3)| = 1, S_1(4) \setminus T_1(4), S_1(4) \setminus T_2(4)$,
- (3) $p(i) = 1, |S_i(3)| = 1$ ($i = 1, 2$), $q = 2, S_1(4) \setminus T_1(4), S_2(4) \setminus T_1(4)$ 。

(Proof) $n = 2, p = 4$ より,

$$\begin{aligned} p &= \sum_{i=1}^2 (\max\{p(i), 2\}) + q - 2 \lfloor 2/2 \rfloor \\ &= \max\{p(1), 2\} + \max\{p(2), 2\} + q - 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

よって,

$$\max\{p(1), 2\} + \max\{p(2), 2\} + q = 6$$

である。 $\max\{p(i), 2\} \geq 2$ ($i = 1, 2$) より, $0 \leq q \leq 2$ である。

$u_1 \in S_1(4), u_2 \in S_2(4)$ に対し, $Z(3) = \{(u_1, u_2)\}$ とし, $G_3 = G_2 + Z(3)$ において D-pair となる非隣接対が $\lfloor p/2 \rfloor = 2$ 個存在しないと仮定する。

$q \leq 1$ のとき, 例えば Fig. 5 の (a), (b) のように $G_3 = G_2 + e$ においては D-pair となる非隣接対が $\lfloor p/2 \rfloor = 2$ 個存在しない。しかし, $G_3 = G_2 + e'$ においては D-pair となる非隣接対が $\lfloor p/2 \rfloor = 2$ 個存在する。よって, $G_3 = G_2 + Z(3)$ において D-pair となる非隣接対が $\lfloor p/2 \rfloor = 2$ 個存在するような $Z(3)$ をとることができる。

$q = 2$ のとき, $p(1) = p(2) = 2$ ならば, Fig. 6 のようになり, $n = 2, q = 1$ のときと同様の議論ができる。よって, D-pair となる非隣接対が $\lfloor p/2 \rfloor = 2$ 個存在するような $Z(3)$ をとることができる。

$p(1) + p(2) \leq 3$ 且つ $q = 2$ のときを考える。一般性を失わず, $p(1) = 1$ とする。

まず, $p(1) = 1, p(2) = 2$ とする。これより, G_2 において 3-pendant $S_1(3)$ に含まれる 4-pendant を $S_1(4) \subseteq S_1(3)$, G_2 において 3-pendant $S_2(3)$ に含まれる 4-pendant を $S_2^1(4), S_2^2(4)$ とする。 $(S_1(3), S_2(3)) = \emptyset$ より, $S_1(4) \setminus S_2^1(4)$ ($1 \leq k \leq 2$) である。3成分 T に含まれる 4-pendant を $T_1(4), T_2(4)$ とする。

$u_1 \in S_1(4), u_2 \in S_2^1(4)$ に対し, $Z(3) = \{(u_1, u_2)\}$ とすると, $G_3 = G_2 + Z(3)$ は単純グラフで $ec(G_3) = ec(G_2) + 1 = 3$ となる。このとき, 4-pendant は $S_1(3), S_2^1(4), T_1(4), T_2(4)$ である。仮定より, G_3 では (a) $S_2^1(4) \setminus T_1(4)$ 且つ $S_2^2(4) \setminus T_2(4)$ 且つ $T_1(4) \setminus T_2(4)$, (b) $S_1(3) \setminus T_1(4)$ 且つ $S_1(3) \setminus T_2(4)$ 且つ $T_1(4) \setminus T_2(4)$, (c) $T_1(4) \setminus S_1(3)$ 且つ $T_1(4) \setminus S_2^1(4)$ 且つ $T_1(4) \setminus T_2(4)$ のいずれかである。

(a) $S_2^1(4) \setminus T_1(4)$ 且つ $S_2^2(4) \setminus T_2(4)$ 且つ $T_1(4) \setminus T_2(4)$ のとき。これより, $S_2^1(4) = \{v_2\}, T_1(4) = \{t_1\}, T_2(4) = \{t_2\}$ 且つ $(v_2, t_1), (v_2, t_2), (t_1, t_2) \in A \cup Z(3)$ である。 $Z(3) \cap \{(v_2, t_1), (v_2, t_2), (t_1, t_2)\} = \emptyset$ より, $(v_2, t_1), (v_2, t_2), (t_1, t_2) \in A$ である。これは, $S_2^1 \neq S_2(3)$ より, Proposition 3.1 に矛盾する。

(b) $S_1(3) \setminus T_1(4)$ 且つ $S_1(3) \setminus T_2(4)$ 且つ $T_1(4) \setminus T_2(4)$ のとき。これより, $S_1(3) = \{u_1\} = S_1(4), T_1(4) = \{t_1\}, T_2(4) = \{t_2\}$ 且つ $(u_1, t_1), (u_1, t_2), (t_1, t_2) \in A \cup Z(3)$ である。 $Z(3) \cap \{(u_1, t_1), (u_1, t_2), (t_1, t_2)\} = \emptyset$ より, $(u_1, t_1), (u_1, t_2), (t_1, t_2) \in A$ である。 $(S_1(3), S_2(3)) = \emptyset$ より, $S_1(3) \setminus S_2^1(4)$ である。よって, $u_1 \in S_1(4), u_2 \in S_2^1(4)$ に対し, $Z(3) = \{(u_1, u_2)\}$ とすると, $G_3 = G_2 + Z(3)$ は単純グラフで $ec(G_3) = ec(G_2) + 1 = 3$ となる。 G_3 における 4-pendant は $S_1(3), S_2^1(4), T_1(4), T_2(4)$ である。 $S_1(3) \setminus T_1(4)$,

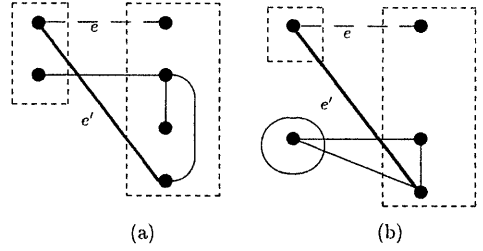


Figure 5: $n = 2, q \leq 1$ のとき。

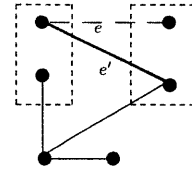


Figure 6: $n = 2, q = 2$ のとき。

$S_1(3) \setminus T_2(4), T_1(4) \setminus T_2(4)$ だから, D-pair となる非隣接対は 2 個存在しない。よって, (1) が成り立つ。

(c) $T_1(4) \setminus S_1(3)$ 且つ $T_1(4) \setminus S_2^1(4)$ 且つ $T_1(4) \setminus T_2(4)$ のとき。

これより, $S_1(3) = \{u_1\} = S_1(4), S_2^1(4) = \{v_2\}, T_1(4) = \{t_1\}, T_2(4) = \{t_2\}$ 且つ $(t_1, u_1), (t_1, v_2), (t_1, t_2) \in A \cup Z(3)$ である。 $Z(3) \cap \{(t_1, u_1), (t_1, v_2), (t_1, t_2)\} = \emptyset$ より, $(t_1, u_1), (t_1, v_2), (t_1, t_2) \in A$ である。 $S_1(3) \setminus T_2(4)$ のときは, (b) で議論したので, ここでは, $S_1(3) \setminus T_1(4)$ とする。 $d_{G_3}(T_1(4)) = d_{G_2}(T_1(4)) = 3$ より, $S_2^1(4) \setminus T_1(4)$ である。ここで, $u_1 \in S_1(4), v_2 \in S_2^1(4)$ に対し, $Z'(3) = \{(u_1, v_2)\}$ とすると, $G_3' = G_2 + Z'(3)$ は単純グラフで $ec(G_3') = ec(G_2) + 1 = 3$ となる。 G_3' における 4-pendant は $S_1(4), S_2^1(4), T_1(4), T_2(4)$ であり, $S_2^1(4) \setminus T_1(4)$ 且つ $S_1(3) \setminus T_2(4)$ となる。これは, 仮定に矛盾する。

次に, $p(1) = p(2) = 1$ とする。これより, G_2 において 3-pendant $S_1(3)$ ($i = 1, 2$) に含まれる 4-pendant を $S_i(4) \subseteq S_i(3)$, 3成分 T に含まれる 4-pendant を $T_1(4), T_2(4)$ とする。

$u_1 \in S_1(4), u_2 \in S_2(4)$ に対し, $Z(3) = \{(u_1, u_2)\}$ とすると, $G_3 = G_2 + Z(3)$ は単純グラフで $ec(G_3) = ec(G_2) + 1 = 3$ となる。このとき, 4-pendant は $S_1(3), S_2(3), T_1(4), T_2(4)$ である。 G_3 に D-pair となる非隣接対が 2 個存在しない場合を考える。このとき, 一般性を失わず, G_3 において次の (a)-(c) のいずれかが成り立つ:

- (a) $S_1(3) \setminus S_2(3)$ 且つ $S_1(3) \setminus T_1(4)$ 且つ $S_1(3) \setminus T_2(4)$,
 - (b) $S_1(3) \setminus T_1(4)$ 且つ $S_1(3) \setminus T_2(4)$ 且つ $T_1(3) \setminus T_2(4)$,
 - (c) $S_1(3) \setminus S_2(3)$ 且つ $S_1(3) \setminus T_1(4)$ 且つ $S_2(3) \setminus T_1(4)$ 。
- G_2 において, $(S_1(3), S_2(3)) = \emptyset$ より,
- (a') $S_1(3) \setminus T_1(4)$ 且つ $S_1(3) \setminus T_2(4)$ 且つ $S_i(3) = S_i(4)$ ($i = 1, 2$),
 - (b') $S_1(3) \setminus T_1(4)$ 且つ $S_1(3) \setminus T_2(4)$ 且つ $T_1(3) \setminus T_2(4)$ 且つ $S_1(3) = S_1(4)$,
 - (c') $S_1(3) \setminus T_1(4)$ 且つ $S_2(3) \setminus T_1(4)$ 且つ $S_i(3) = S_i(4)$ ($i = 1, 2$),

のいずれかである。よって, (a') より (2) が, (b') より (1) が, (c') より (3) がそれぞれ成り立つことが分かる。よって, Fig. 4 を得るグラフより $OPT(S) = OPT(M) + 1 = 4$ となることが分かる。 \square

Proposition 4.5 [9, 10] $G_3 = K_{3,3}$ ならば, G_3 には D-pair となる非隣接対は高々 2 個存在する。また, $p = 6$ であり, 4成分は存在しない。 $p = 6$ なる G_3 に対して D-pair となる非隣接対が $\lfloor p/2 \rfloor$ は存在しないための必要十分条件は G_3 が $K_{3,3}$ に同型となることである。

Proposition 4.6 $n = 2, p = 6$ のとき, G_3 において D-pair となる非隣接対が $\lfloor p/2 \rfloor$ 個存在しないならば, G_2 は次のグラフに同型である (Fig. 7 参照): $N = \{u_i | 1 \leq i \leq 6\}, N_a = \{u_1, u_2, u_3\}, N_b = \{u_4, u_5, u_6\}, A = \{(u_a, u_b) | \forall u_i \in N_j, j = a, b\} - \{(u_1, u_4)\}$ 。このときは, $OPT(S) = OPT(M) = 4$ となる解 $Z(3) \cup Z(4)$ を選ぶことができる。

(Proof) $n = 2, p = 6$ より,

$$p = \sum_{i=1}^2 (\max\{p(i), 2\}) + q - 2 \lfloor 2/2 \rfloor$$

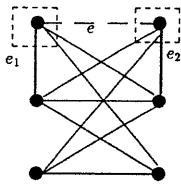


Figure 7: $n = 2, q = 4$ のとき (Proposition 4.6).

$$= \max\{p(1), 2\} + \max\{p(2), 2\} + q - 2$$

$$= 6$$

よって,

$$\max\{p(1), 2\} + \max\{p(2), 2\} + q = 8$$

である. $\max\{p(i), 2\} \geq 2$ ($i = 1, 2$) より, $0 \leq q \leq 4$ である.

一般性を失わず, $p(1) \geq 2$ ならば, G_3 において 4 成分が生じる. これは Proposition 4.5 に矛盾する. よって, $p(1) = 1$ である. 同様に $p(2) = 1$ である. これらより, $\max\{p(i), 2\} = 2$ ($i = 1, 2$) となり, $q = 4$ である.

G_2 における 3-pendant $S_i(3)$ ($i = 1, 2$) にそれぞれ含まれる 4-pendant を $S_i(4)$ とする. また, 3 成分 T に含まれる 4-pendant を $T_j(4)$ ($1 \leq j \leq 4$) とする. G_2 には 3 成分が存在するので, $|S_1(3), S_2(3)| = 0$ である. $u_1 \in S_1(4), u_2 \in S_2(4)$ に対し, $Z(3) = \{(u_1, u_2)\}$ とすると, $G_3 = G_2 + Z(3)$ は単純グラフで $ec(G_3) = ec(G_2) + 1 = 3$ となる. このとき, G_3 における 4-pendant は $S_1(3), S_2(3), T_j(4)$ ($1 \leq j \leq 4$) である. よって, Proposition 4.5 より G_3 は $K_{3,3}$ に同型である. すなわち (1) が成り立つ.

今, (1) が成り立つとする. このとき, $OPT(S) = OPT(M) = 4$ である (Fig. 7 参照). \square

以上により, 以下の Proposition 4.7 を得る.

Proposition 4.7 $n = 2$ のとき, 以下の条件のどれかを満たすならば, $OPT(S) = OPT(M) + 1$ である. そうでないならば, $OPT(S) = OPT(M)$ である

- (1) $p(1) = 1, p(2) = 2, q = 0, S_1(4) = S_1(3), (S_1(4) \setminus S_2^1(4))$ 又は $S_1(4) \setminus S_2^2(4)$ 従って, $|S_2^1(4)| = 1$ 又は $|S_2^2(4)| = 1$;
- (2) $p(i) = 1, q = 0, S_i(4) = S_i(3), |S_i(4)| = |S_i(3)| = 1$ ($i = 1, 2$), $S_1(4) \setminus S_2(4)$;
- (3) $p(1) = 1, p(2) = 2, q = 2, |S_1(3)| = 1, S_1(4) \setminus T_1(4), S_1(4) \setminus T_2(4), T_1(4) \setminus T_2(4)$;
- (4) $p(1) = p(2) = 1, q = 2, |S_1(3)| = 1, S_1(4) \setminus T_1(4), S_1(4) \setminus T_2(4)$;
- (5) $p(i) = 1, |S_i(3)| = 1$ ($i = 1, 2$), $q = 2, S_1(4) \setminus T_1(4), S_2(4) \setminus T_1(4)$.

4.1.2 $n = 3$ のとき

ここでは, Proposition 4.7 を用いて, Proposition 4.8 を証明する.

Proposition 4.8 $n = 3$ のとき, 以下の条件 (1), (2) が共に成り立つならば, $OPT(S) = OPT(M) + 1$ を満たす. そうでないならば, $OPT(S) = OPT(M)$ である (Fig. 8 参照): $S_i(3) = S_i(4)$ ($i = 1, 2$) 且つ $p(3) \leq 2$ 且つ $S_1(4) \setminus S_2(4)$.

(Proof)

$n = 3$ のときに 1 本辺付加後のグラフ G'_3 には 3-pendant がちょうど 2 個存在し, 付加した辺の両端点はこれらのどちらか一方の 3-pendant に含まれる. また, それらの点を含む 3-pendant は少なくとも 2 個の 4-pendant を含む. よって, Proposition 4.7 より, G'_3 が Proposition 4.7 の (1)-(5) のどれかを満たす場合か, 又は G'_3 が type M となる場合を考えれば十分である. 従って, G としては Fig. 3 の (1) 又は Fig. 4 の (3) 又は Fig. 2 を満たすときのみを考えればよい (Fig. 8 の (a-1), (b-1), (c-1)).

$n = 3$ のときに付加した辺が e_3 ならば, G'_3 において 4 成分に 4-pendant が少なくとも 2 個含まれるので, 矛盾する. よって, $n = 3$ のときに付加した辺は e_1 又は e_2 であり, e_1 が存在するときのみを考えればよい.

これより, $n = 3$ のときは Fig. 8 の (a-2), (b-2), (c-1) の場合である. Fig. 8 の (a-2) のとき, e_1 を付加しないと, $|Z| \geq 4$ となるので明らかに $OPT(S) = OPT(M) + 1$ となることから分かる. Fig. 8 の (b-2) のとき, G'_3 において $S_2^1(4) \setminus T_1(4), S_2^2(4) \setminus T_2(4), S_1(3) \setminus S_2^1(4), S_1(3) \setminus S_2^2(4)$ だから, G_2 においても同様のことが成り立つ. よって, これら非隣接対に辺を付加することによって 4 辺連結化することができ, $OPT(S) = 4 = OPT(M)$ となる. \square

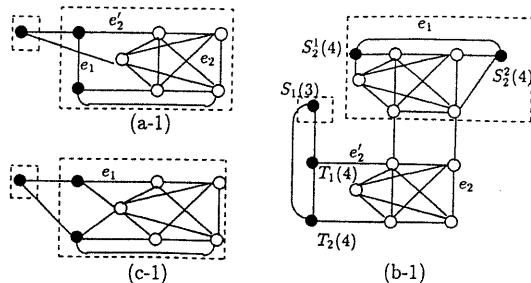


Figure 8: $n = 3$ のとき.

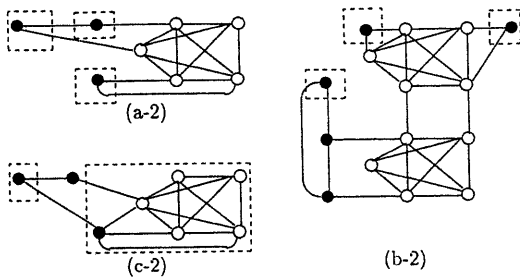


Figure 9: $n = 4$ のとき.

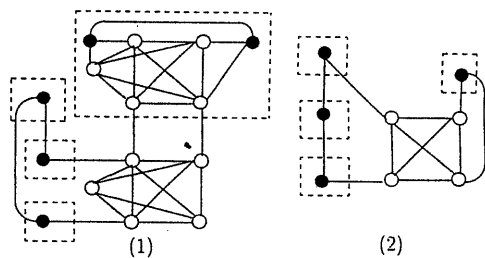


Figure 10: $n = 4$ のとき.

4.1.3 $n = 4$ のとき

ここでは, Proposition 4.7 を用いて, Proposition 4.9 を証明する.

Proposition 4.9 $n = 4$ のとき, 以下の条件を満たすならば $OPT(S) = OPT(M) + 1$ となり, そうでなければ $OPT(S) = OPT(M)$ となる: $S_i(3) = S_i(4)$ ($1 \leq i \leq 3$) 且つ $p(4) \leq 2$ 且つ $S_1(4) \setminus S_2(4)$ 且つ $S_2(4) \setminus S_3(4)$. (Fig. 9 参照)

(Proof) $n = 4$ のときに 1 本辺付加後のグラフ G'_4 には, 3-pendant は 2 個又は 3 個存在する. $n = 2$ ($n = 3$) なるグラフ G'_3 に対する多重辺付加を許す場合, 4 辺連結化するときの解の辺の本数を $OPT_2(M)$

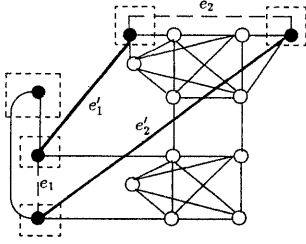


Figure 11: $n = 5$ のとき.

($OPT_3(M)$) とし、多重辺付加を許さない場合、4 辺連結化するときの解の辺の本数を $OPT_2(S)$ ($OPT_3(S)$) とすると、

$$OPT_2(M) \leq OPT_2(S) \leq OPT_3(M) + 1,$$

$$OPT_3(M) \leq OPT_3(S) \leq OPT_3(M) + 1$$

となる。 $OPT_3(M) = OPT_2(M) + 1$ より、

$$OPT_2(S) \leq OPT_2(M) + 1 \leq OPT_3(M)$$

だから、グラフ G_2 に 3-pendant が 2 個存在するときを考えればよい。
 $n = 3$ のときと同様の議論より、Fig. 10 の e_3 を取り除いたグラフが G_2 である (Fig. 9 参照)。

Fig. 9 ならば、明らかに $OPT(S) = OPT(M) + 1$ となることが分かる。

ゆえに、 $OPT(S) = 5 = OPT(M) + 1$ である。

以上の議論より、この proposition は成り立つ。 \square

4.2 $n \geq 5$ のとき

Proposition 4.7 を用いて、以下の Proposition 4.10 を証明する。

Proposition 4.10 $n \geq 5$ ならば、 $OPT(S) = OPT(M)$ である。

(Proof) Proposition 4.7 の (1)-(5) から、2 本の辺を取り除き $n = 5$ となる 2 辺連結グラフを作ると、Fig. 11 のようになる。

つまり、 G_2 が Fig. 11 のとき、2 個の s-admissible-pairs に辺 e_1, e_2 で結ぶと明らかに $OPT(S) = OPT(M) + 1$ となる。これらの辺 e_1, e_2 を辺 e'_1, e'_2 で置き換えることによって、 $OPT(S) = OPT(M)$ となる。これより、 $n = 5$ のとき $OPT(S) = OPT(M)$ となる辺集合 $Z(3)$ が存在する。

$n \geq 7$ なる奇数のとき、s-admissible-pairs 間に最少数の単純辺を付加して、3-pendant の数が 5 個にできる。このときは、 $OPT(S) = OPT(M)$ となる辺集合 $Z(3)$ が存在するので、明らかに $OPT(S) = OPT(M)$ である。ゆえに、 n が $n \geq 7$ なる奇数ならば、 $OPT(S) = OPT(M)$ である。

n が偶数のとき、Proposition 4.7 の (1)-(5) から、2 本の辺を取り除き $n = 6$ となる 2 辺連結グラフは存在しない。よって、 $n \geq 6$ のとき s-admissible-pairs に辺を付加していくと、3-pendant の数が 6 個になる。このときは、 $OPT(S) = OPT(M)$ となる辺集合 $Z(3)$ が存在するので、明らかに $OPT(S) = OPT(M)$ である。

ゆえに、 n が $n \geq 6$ の偶数ならば、 $OPT(S) = OPT(M)$ である。 \square

5 おわりに

G の辺連結度が 2 のときの UW-4ECA(S,SA) の計算量は、次のようになる。まず、4 成分を見つける計算量は $O(|N|^2 + |A|)$ である [7]。 $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ のとき s-admissible-pairs を選ぶための計算量は $O(1)$ である。これは、Lemma 4.1 と 4-pendant の数を調べればよいからである。このため、 $n = 2$ のときには G が type M かどうかを判定し、type M であれば解を求める計算量は $O(|N|)$ である。 [21] の手法を用いて 3 辺連結化すると、計算量は $O(|N| + |A|)$ である。また、type M でなければ、 $(n = 2, 3, 4)$ については解を求めるために若干の操作が入るが [10] と同様な手法を用いて 4 辺連結化でき、計算量は $O(|N| \log |N| + |A|)$ である。ゆえに、本稿の証明に基づいた算法の計算量は $O(|N|^2 + |A|)$ である。

今後は、与えられたグラフの辺連結度が 1 以下の同様な 4 辺連結化、更には $k \geq 5$ なる k 辺連結化を考えてゆく予定である。

References

- [1] K. P. Eswaran and R. E. Tarjan. Augmentation problems. *SIAM J. Comput.*, 5, pp. 653–655, 1976.
- [2] A. Frank. Augmenting graphs to meet edge connectivity requirements. *SIAM J. Discrete Mathematics*, 5(1), pp. 25–53, 1992.
- [3] G. N. Frederickson and J. Ja'ja'. Approximation algorithms for several graph augmentation problems. *SIAM J. Comput.*, 10, pp. 270–283, 1981.
- [4] H. N. Gabow. Applications of a poset representation to edge connectivity and graph rigidity. *Proc. 32nd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 812–821, 1991.
- [5] A. V. Karzanov and E. A. Timofeev. Efficient algorithm for finding all minimal edge cuts of a nonoriented graph. *Cybernetics*, pp. 156–162, March–April 1986. Translated from *Kibernetika*, 2 (1986), pp.8–12.
- [6] S. Khuller and R. Thurimella. Approximation algorithms for graph augmentation. *Proc. 19th International Colloquium on Automata (Languages and Programming, Lecture Notes in Computer Science 623, Springer-Verlag, Berlin)*, pp. 330–341, July 1992.
- [7] H. Nagamochi and T. Watanabe. Computing k -edge-connected components of a multigraphs. *Trans. IEICE of Japan*, E76-A(4), pp. 513–517, 1993.
- [8] D. Naor, D. Gusfield, and C. Martel. A fast algorithm for optimally increasing the edge connectivity. *Proc. 31st Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 698–707, 1990.
- [9] D. Takafuji, S. Taoka, and T. Watanabe. Simplicity-preserving augmentation to 4-edge-connect a graph. *IPSJ SIG Notes, 93-AL-33-5, Information Processing Society of Japan*, pp. 33–40, May 1993.
- [10] S. Taoka, D. Takafuji, and T. Watanabe. Simplicity-preserving augmentation of the edge-connectivity of a graph. *Tech. Rep. of IEICE of Japan*, COMP93-73, pp. 49–56, 1994.
- [11] S. Ueno, Y. Kajitani, and H. Wada. Minimum augmentation of trees to k -edge-connected graph. *Networks*, 18, pp. 19–25, 1988.
- [12] T. Watanabe. Graph augmentation problems. *Trans. IEICE of Japan*, E74(4), pp. 632–643, 1991.
- [13] T. Watanabe, T. Mashima, and S. Taoka. Approximation algorithms for minimum-cost augmentation to k -edge-connect a multigraph. *Proc. 1993 IEEE International Symposium on Circuits and systems*, pp. 2556–2559, May 1993.
- [14] T. Watanabe and A. Nakamura. Edge-connectivity augmentation problems. *J. Comput. System Sci.*, 35(1), pp. 96–144, 1987.
- [15] T. Watanabe and A. Nakamura. 3-connectivity augmentation problems. *Proc. of 1988 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pp. 1847–1850, 1988.
- [16] T. Watanabe and A. Nakamura. A smallest 3-connectivity augmentation to 3-connect a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 28, pp. 183–186, 1990.
- [17] T. Watanabe and A. Nakamura. A minimum 3-connectivity augmentation of a graph. *J. of Comput. System Sci.*, 46(1), pp. 91–128, 1993.
- [18] T. Watanabe, T. Narita, and A. Nakamura. 3-edge-connectivity augmentation problems. *Proc. 1989 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pp. 335–338, 1989.
- [19] T. Watanabe, S. Taoka, and T. Mashima. Approximation algorithms for the 3-edge-connectivity augmentation problem of graphs. *Proc. IEEE Asia-Pacific Conference on Circuits and Systems*, pp. 424–429, December 1992.
- [20] T. Watanabe, S. Taoka, and T. Mashima. Minimum-cost augmentation to 3-edge-connect all specified vertices in a graph. *Proc. 1993 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pp. 2311–2314, May 1993.
- [21] T. Watanabe and M. Yamakado. A linear time algorithm for small-est augmentation to 3-edge-connect a graph. *Trans. IEICE of Japan*, E76-A(4), pp. 518–531, 1993.