

グラフ最小コスト3分割アルゴリズム

上土井 陽子 若林 真一 吉田 典可

広島大学工学部

東広島市鏡山一丁目4-1

あらまし 枝に正の重みを持つグラフ G と k 個の異なる節点を与えられたとき、 k 個の節点を互いに非連結にする最小コストの k 分割カットを求める問題を最小コスト k 分割問題とする。 $k \geq 3$ の場合、最小コスト k 分割問題は一般のグラフにおいては全ての節点次数を3以下と制約してもNP困難であることが知られている。一方、平面グラフに対しては k が定数の場合に対し、多項式時間最小コスト k 分割アルゴリズムが提案されている。本稿では平面グラフより広いクラスに属するグラフに対し、最小コスト3分割問題を考察する。はじめにグラフで最小コスト2分割カット、最小コスト3分割カットの性質を導出する。次に、導出した性質に基づき、平面グラフより広いクラスに属するグラフに対して $O(n^d m \log(n^2/m))$ の計算時間で最小コスト3分割を求めるアルゴリズムを提案する。ここで、 d は G の最大節点次数と次数3以上の節点数により上限が与えられる値である。

An Algorithm for Finding a Minimum Three-Way Cut of a Graph

Yoko Kamidoi Shin'ichi Wakabayashi Noriyoshi Yoshida

Faculty of Engineering, Hiroshima University

4-1, Kagamiyama 1 chome, Higashi-Hiroshima 724 JAPAN

Abstract Given a graph G with n vertices, m edges and positive edge weights and k distinct terminals $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ on G , the problem of computing a minimum k -way cut of G is to find minimum (cost) k -way cut C that disconnects each terminal from all the others. The minimum k -way cut problem for a general graph and a fixed integer $k (\geq 3)$ is known as NP-hard, and the problem for a graph and a fixed integer k can be solved in polynomial time. The complexity of this problem for any other class that is larger than planar graphs and smaller than general graphs was not known. This paper presents an algorithm for computing a minimum three-way cut of a graph in a larger class than the class of planar graphs. Our algorithm constructs a minimum three-way cut of a graph in time $O(n^d m \log(n^2/m))$, where d is bounded by the maximum vertex degree and the number of vertices whose degree is more than two.

1. まえがき

各枝に正の重みを持つグラフ上の最小コストカットを見つける問題はグラフ理論における重要な問題の1つである。グラフ上の相異なる k 個の節点 $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ が与えられたとき、 k 個の節点を互いに非連結にする最小コストのカットを見つける問題を最小コスト k 分割問題という。グラフに対する最小コスト k 分割問題は全ての節点次数が3以下のグラフで $k=3$ の場合でも NP 困難なことが知られている[1]。入力を平面グラフに限定した場合、ある固定の k に対する最小コスト k 分割問題は多項式時間で解ける[1]。しかし、平面グラフより広いクラスで最小コスト k 分割問題が解けるかどうかはほとんど考察されていない。本稿では平面グラフより広いクラスに属するグラフに対する最小コスト3分割問題について考察する。

一般のグラフにおける最小コスト2分割問題はFordとFulkersonの最大流-最小コストカットの定理により多項式時間で解くことができる。現在までにネットワークフローに基づく最小コスト2分割アルゴリズムとして $O(nm \log(n^2/m))$ の手法[4]が提案されている。ここで、 n はグラフの節点数、 m は枝数を表す。

平面グラフではその双対グラフの存在性によって、最小コストカット問題を最小コストパス問題に変換できることがFordとFulkersonにより示された。この結果に基づき平面グラフ上での最小コスト2分割問題に対し、ItaiとShiloach[5]は $O(n^2 \log n)$ の最小コスト2分割アルゴリズムを提案した。以後、ItaiとShiloachの手法に分割統治法を適用したReiff[7]による $O(n^2 \log n)$ のアルゴリズム、Reiffの手法においてデータ構造を変更し高速化を図ったFrederickson[3]による $O(n \log n)$ のアルゴリズムと改良がなされてきている。

$k \geq 3$ の最小コスト k 分割問題は、Dahlhausらにより一般のグラフでは全ての節点次数を3以下と制約した場合でも NP 困難なことが示されている[1]。また、Dahlhausらは入力を平面グラフに制約した場合、 $k=3$ の場合は $O(n^3 \log n)$ のアルゴリズムにより、 k が固定の場合は $O((4k)^k n^{2k-1} \log n)$ のアルゴリズムにより最小コスト k 分割問題が解けることも示した。Dahlhausらのアルゴリズムにおいても平面グラフに対する双対グラフの存在性がアルゴリズムを構成する上での最も重要な鍵であり、双対グラフ上での最小コストパスの組み合わせにより、元のグラフの最小コスト k 分割カットを構成している。このアルゴリズムでは、元のグラフの最小コスト k 分割カットが双対グラフ上でどのような最小コストパスの組合せになるかを場合分けし、各場合での最小コストのカットを見つけている。

本稿では一般のグラフにおける最小コスト3分割カットの性質を導き、導出した性質に基づき平面グラフより広いクラスに属するグラフに対する最小コスト3分割アルゴリズムを提案する。提案アルゴリズムの計算時間は $O(n^d m \log(n^2/m))$ である。ここで、 d はグラフの最大節点次数と次数3以上の節点数により上限が与えられる数である。また、平面グラフに対してはFredericksonの手法を適用することにより本手法の計算時間が $O(n^3 \log n)$ となることも示す。

2. 準備

2.1 グラフに関する定義

[定義1] 無向グラフ $G=(V, E)$ は節点集合 V と無向枝の集合 E より構成される。各枝 $e \in E$ は2個の節点 $u, v \in V$ を接続し、 $e=(u, v)$ で表す。節点 u, v を枝 e の端点と言う。2個の枝 e, e' が同じ端点を持つとき、これらの枝を多重枝、また、 $u=v$ なる枝をループと言う。 E から正の実数への枝重み関数 cost が与えられているとする。ここで、各枝のコストを $\text{cost}(e)$ で表す。□

[定義2] グラフ $G=(V, E)$ において、 $i=1, \dots, k$ に対し、 $e_i=(v_{i-1}, v_i)$ 、 $v_i \neq v_j (i \neq j)$ を満たす節点素な枝の列 $p=e_1, \dots, e_k$ をパスと言う。□

以上において節点集合 V のサイズ、つまり、節点数を $n(=|V|)$ で表す。また、枝数を $m(=|E|)$ で表す。このとき、オイラーの公式によって平面グラフの枝数 m は高々 $6n-12$ である。

[定義3] 5個の節点からなる完全グラフを K_5 で表し、各側に3個の節点がある完全2部グラフを $K_{3,3}$ で表す。2個のグラフにおいて、それらの枝に節点次数2の新しい節点を挿入することにより同じグラフが構成できる場合、2個のグラフは同相 (homeomorphic) であると言う。□

[Kuratowskiの定理][2] グラフ G が平面グラフである必要十分条件は G が $K_{3,3}$ と K_5 に同相な部分グラフを持たないことである。□

[定義4] 片側が i 個の節点、もう一方の側が j 個の節点で構成される完全2部グラフを $K_{i,j}$ で表す。□

[定義5] 2個のグラフに対し、次の2つの操作を繰り返し適用することにより互いに同型のグラフを得ることができる場合、2個のグラフは弱同相 (weakly homeomorphic) であると言う。操作1 (枝 e の分割): 枝 $e=(u, v)$ に対し、新たな節点 w を導入し、 e を $(u, w), (w, v)$ の2本の枝で置き換える。操作2 (節点 v の分割): 節点次数が4以上の節点 v を (v', v'') なる枝を持つ2個の節点 v' と v'' に置き換え、元のグラフにおける各枝 (u, v) に対し、 (u, v') もしくは (u, v'') のどちらかの枝を定義する。□

[例1] 図1(a)に示した $K_{3,4}$ に対し, 図1(b)に $K_{3,4}$ に弱同相なグラフの例を示す. □

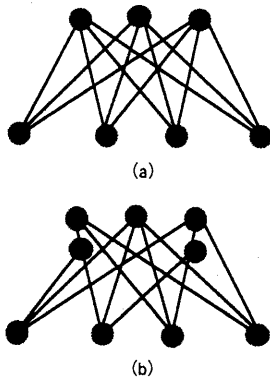


図1. $K_{3,4}$ と $K_{3,4}$ に弱同相なグラフ

定義5より, $d < 4$ を満たす $K_{3,d}$ に弱同相なグラフは, $K_{3,d}$ と同相でもある.

2. 2 カットに関する定義

[定義6] グラフ $G=(V,E)$ のある枝集合 $E' \subseteq E$ に対し, E' のコストを $\text{cost}(E') = \sum_{e \in E'} \text{cost}(e)$ で表す. □

[定義7] グラフ $G=(V,E)$ と枝集合 $C \subseteq E$, 及び V の互いに素な2個の節点集合 S と T が与えられたとき, V と $E-C$ よりなる G の部分グラフが各節点 $x \in S$ から各節点 $y \in T$ へのパスを持たないなら C を S - T カットと言う. また, 枝集合 $D \subseteq E$ に対し, D が S - T カットとなる2つの互いに素な節点集合 S, T が存在するとき, D を G の2分割カットと言う. □

[定義8] グラフ $G=(V,E)$ と互いに素な2個の節点集合 S, T に対し, 枝集合 C の任意の真部分集合 C' で G の S - T カットとなるものが存在しないならば C を極小 S - T カットと言う. 同様に, D の任意の真部分集合 D' で G の2分割カットになるものが存在しないならば D を G の極小2分割カットと言う. □

以下では簡単のため, 極小 S - T カット, 極小2分割カットを単に S - T カット, 2分割カットと言う.

[定義9] グラフ $G=(V,E)$ に対し, V の互いに素な2個の部分集合を X, Y とする. v, w を相異なる V の要素とし, (v,w) は G の枝であり, かつ, $v \in X, w \in Y$ ならば, 枝 (v,w) は X と Y を接続していると言う. X と Y を接続する枝の集合を $(X; Y)$ で表す. □

定義9よりグラフの任意の2分割カット C に対し, $C=(X; \bar{X})$ となる V の部分集合 X が常に存在することが分かる. ただし, $\bar{X} = V - X$ とする.

[定義10] 2個の2分割カット $C=(X; \bar{X}), D=(Y; \bar{Y})$ が与えられたとき, 以下の不等式全てが成立するなら2個のカットは交差していると言う.

$\bar{X} \cap \bar{Y} \neq \emptyset, \bar{X} \cap Y \neq \emptyset, X \cap \bar{Y} \neq \emptyset, X \cap Y \neq \emptyset$ □

[定義11] グラフ $G=(V,E)$ と G の2分割カット C に対し, $\text{cost}(C)$ をカットのコストと言う. カットのコストが最小である G の2分割カットを G の最小コスト2分割カットと言う. □

[定義12] グラフ G と G 上の3個の相異なる3節点 r, s, t に対し, $r \in R, s \in S, t \in T$ を満たす互いに素な $R \cup S \cup T = V$ を満たす3個の部分節点集合 R, S, T に分割する枝の集合を $\{r\}-\{s\}-\{t\}$ カットと言い, $(R; S; T)$ で表す. □

[定義13] グラフ $G=(V,E)$ において, 節点集合 X が与えられたとき, $G(X)$ は X による G の誘導部分グラフ $G_x=(X, E_x)$ と枝コスト関数 $\text{cost}_x(e) = \text{cost}(e)$ ($e \in E_x$)より構成される G の部分グラフを表す. □

[性質1][8] グラフ G に対し, 2個の最小コスト2分割カット $(X; \bar{X}), (Y; \bar{Y})$ が存在したとき, $(X \cup Y; \overline{X \cup Y})$ も G の最小コスト2分割カットである. □

3. 最小コストカットの性質

グラフ $G=(V,E)$ 上の相異なる任意の3節点 r, s, t に対する最小コスト $\{r\}-\{s\}-\{t\}$ カットを見つける問題を考える. 以下では最小コスト2分割カットの性質, 及び, 最小コスト3分割カットの性質について議論する. なお, 紙面の都合により補題, 定理の詳細な証明は文献[6]に譲る. 始めに最小コスト2分割カットに関する用語を定義する.

[定義14] 互いに素な節点集合 S, T に対し, 各節点 $x \in S$ と各節点 $y \in T$ を非連結にする最小コストカットの中で, S 側の節点数が最大な最小コスト S - T カットの集合を $C(S; T)$ とする. □

$C(S; T)$ に対し以下の補題が成立する.

[補題1] グラフ $G=(V,E)$ において, 2つの互いに素な節点集合 S, T が与えられたとき, $C(S; T)$ の要素数は1である. □

[例2] 図2に示すグラフにおいて, 節点 x に対しては $C(\{r, x\}; \{s, t\}) = (\{r, x\}; V - \{r, x\})$ となり, カットのコストは159となる. 節点 y に対しては図2(b)に示すようなコスト324のカットとなる. □

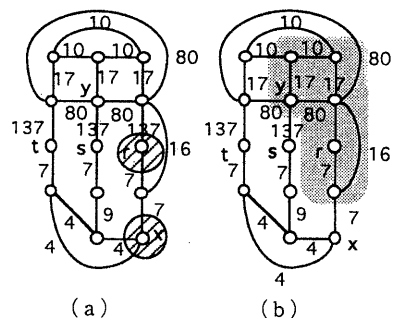


図2. $\{r\}-\{s, t\}$ カット

補題 1 より, 以下では $C(S; T)$ を S と T を非連結にし, S 側の節点数が最大の最小コスト S - T カットを表すとする.

次に最小コスト $\{r\}$ - $\{s\}$ - $\{t\}$ カットの性質について議論する. 新しい用語を以下に定義する.

[定義15] 節点 r を含み節点 s, t を含まない節点集合 V_r が与えられたとき, $G(\overline{V_r})$ なる部分グラフ上での最小コスト $\{s\}$ - $\{t\}$ カットを $(V_s; V_t)$ とする. このとき, 以下に示す 2 つの $\{r\}$ - $\{s\}$ - $\{t\}$ カットの中で小さいコストを持つ 3 分割カットを $C_3(V_r)$ とする.

- (1) $G(\overline{V_s})$ における最小コスト $\{r\}$ - $\{t\}$ カット $(V_{r'}; V_{t'})$ と $(V_s; \overline{V_s})$ により構成される $\{r\}$ - $\{s\}$ - $\{t\}$ カット $(V_{r'}; V_s; V_{t'})$.
- (2) $G(\overline{V_t})$ における最小コスト $\{r\}$ - $\{s\}$ カット $(V_r''; V_s'')$ と $(V_t; \overline{V_t})$ により構成される $\{r\}$ - $\{s\}$ - $\{t\}$ カット $(V_r''; V_s''; V_t)$. \square

[例3] 図 2(a) の $C(\{r, x\}; \{s, t\}) = (\{r, x\}; V - \{r, x\})$ に誘導される 3 分割カット $C_3(\{r, x\})$ を求める. $G(V - \{r, x\})$ 上での最小コスト $\{s\}$ - $\{t\}$ カットは図 3(a) に示すカットとなる. この $\{s\}$ - $\{t\}$ カットを $(V_s; V_t)$ と表すと $G(\overline{V_s})$ なるグラフ上での最小コスト $\{r\}$ - $\{t\}$ カットと $(V_s; \overline{V_s})$ よりなる 3 分割カットは(b)のようになりコストは 286 となる. 同様に $(V_t; \overline{V_t})$ により誘導される 3 分割カットは(c)のようになりコストは 296 となる. よって, $C_3(\{r, x\})$ は(b)に示す 3 分割カットとなる. \square

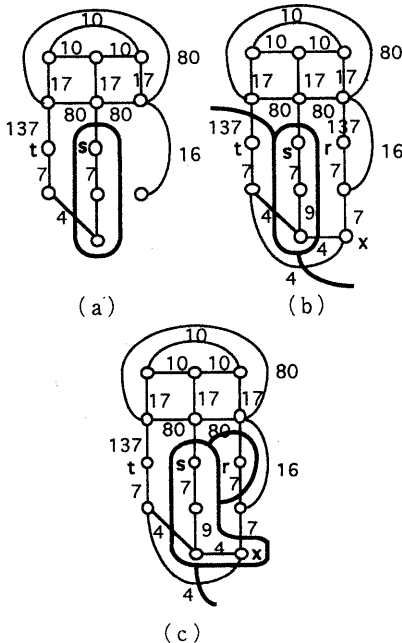


図 3. 2 分割カットにより構成される 3 分割カット

以上の定義に基づき, 最小コスト 2 分割カットを組み合わせるにより最小コスト 3 分割カットが構成できることを示す.

[補題 2] グラフ $G=(V, E)$ において, 相異なる 3 節点 r, s, t とそれらの節点に対するある最小コスト $\{r\}$ - $\{s\}$ - $\{t\}$ カット $(R; S; T)$ が与えられたとする. このとき, 各節点 x に対する r 側の節点数が最大の最小コスト $\{r, x\}$ - $\{s, t\}$ カット $C(\{r, x\}; \{s, t\}) = (V_x; \overline{V_x})$ とする. このとき, $C_3(\cup_{x \in R} V_x)$ は最小コスト $\{r\}$ - $\{s\}$ - $\{t\}$ カットである.

[略証] ある最小コスト $\{r\}$ - $\{s\}$ - $\{t\}$ カット $(R; S; T)$ が与えられたとき, R に属する節点 x において, $C_3(R \cup V_x)$ も最小コスト $\{r\}$ - $\{s\}$ - $\{t\}$ カットであることを示す. また, $C_3(R \cup V_x) = (R'; S'; T')$ としたとき, $R \cup V_x \subseteq R'$ とすることができることを示す. これらが成立するならば, ある $y \in R - \{x\}$ と最小コスト $\{r\}$ - $\{s\}$ - $\{t\}$ カット $(R'; S'; T')$ に同様な議論が成り立ち, 繰り返して上の議論を適用することにより命題が証明できる.

ある節点 $x \in R$ において, $(R; \overline{R})$ と最小コスト $\{r, x\}$ - $\{s, t\}$ カット $C(\{r, x\}; \{s, t\}) = (V_x; \overline{V_x})$ を重ね合わせた $\{r\}$ - $\{s, t\}$ カット $(R \cup V_x; \overline{R \cup V_x})$ は最小コストカットの性質より $(R; \overline{R})$ のコスト以下のコストを持つ. すなわち, $\text{cost}(R \cup V_x; \overline{R \cup V_x}) \leq \text{cost}(R; \overline{R})$ が成り立つ.

また, $R \cup V_x \subseteq R'$ であることより $G(\overline{R \cup V_x})$ 上での最小コスト $\{s\}$ - $\{t\}$ カット $(V_s; V_t)$ において, $\text{cost}(V_s; V_t) \leq \text{cost}(S; T)$ が成り立つ.

$G(\overline{V_s})$ なる部分グラフ上で $(R \cup V_x; V_t)$ なる枝集合集合は $\{r\}$ - $\{t\}$ カットである. $G(V_s)$ 上での最小コスト $\{r\}$ - $\{t\}$ カットは $\text{cost}(R \cup V_x; V_t)$ 以下のコストを持つ. 従って, 以下の不等式が成り立つ.

$$\text{cost}(C_3(R \cup V_x)) \leq \text{cost}(R; S; T)$$

以上より $C_3(R \cup V_x)$ は最小コスト $\{r\}$ - $\{s\}$ - $\{t\}$ カットである. また, $C_3(R \cup V_x)$ の構成方法で $G(\overline{V_s})$ なる部分グラフ上での r 側が最大の最小コスト $\{r\}$ - $\{t\}$ カットを求めることにより, $R \cup V_x \subseteq R'$ が成り立つ. \square

補題 2 により最小コスト 2 分割カットを組み合わせるにより, 最小コスト 3 分割カットが構成できることが示された. 次に複数の最小コスト 2 分割カットにより最小コスト 3 分割カットを構成する場合の十分条件に関する補題を示す.

[補題 3] グラフ $G=(V, E)$ において, 互いに交わる $\{r\}$ - $\{s, t\}$ カット $(V_x; \overline{V_x})$, $(V_y; \overline{V_y})$ が以下の 2 つの不等式を満たすとする.

$$\text{cost}(V_x \cup V_y; \overline{V_x \cup V_y}) > \max\{\text{cost}(V_x; \overline{V_x}), \text{cost}(V_y; \overline{V_y})\}$$

$\text{cost}(C_3(V_x \cup V_y)) < \min\{\text{cost}(C_3(V_x)), \text{cost}(C_3(V_y))\}$
 このとき、 $G(\overline{V_y})$ 上にある節点 $x \in V_x - V_y$ を通る s から t へのパスとそのパス上の節点 $x' \neq x$ から x を通らない s から t へのパスが存在する。また、この x を通る s から t へのパスの $s(t)$ から x までの部分パスは、 $G(\overline{V_x})$ 上の任意の $y \in V_y - V_x$ から $t(s)$ へのパスと節点素である。

[略証] $G(\overline{V_y})$ なる部分グラフにおいて節点 $x \in V_x - V_y$ を通る s から t へのパスが存在することを背理法によって証明する。もし命題が成り立たないと仮定すると、 $V_x - V_y$ に属する全ての節点は $G(\overline{V_y})$ において $s(t)$ を通ってしか、 $t(s)$ と連結でない。よって、 $V_x - V_y$ を通る s から t へのパスは存在しないため、 $G(V_y)$ における最小コスト $\{s\}-\{t\}$ カット $(V_s; V_t)$ では $V_x - V_y \subset V_s$, $(V_x - V_y) \cap V_t = \phi$ が成り立つ。また、 $G(\overline{V_y \cup V_x})$ において $(V_s - (V_x - V_y); V_t)$ は最小コスト $\{s\}-\{t\}$ カットであることより、 $C_3(V_y \cup V_x)$ の定義での2番目の3分割カットは $C_3(V_y)$ の2番目の3分割カットと等しいコストを持つ。

また、 $\text{cost}(V_x \cup V_y; \overline{V_x \cup V_y}) > \text{cost}(V_y; \overline{V_y})$ が成り立つことより $\text{cost}(V_x - V_y; V_s) < \text{cost}(V_x - V_y; V_s)$ が成り立ち、 $\text{cost}(V_s - (V_x - V_y); \overline{V_s - (V_x - V_y)}) > \text{cost}(V_s; \overline{V_s})$ が言える。 $\overline{V_s} \subseteq \overline{V_s - (V_x - V_y)}$ であることによって、 $G(\overline{V_s})$ による最小コスト $\{r\}-\{t\}$ カットは $G(\overline{V_s - (V_x - V_y)})$ による最小コスト $\{r\}-\{t\}$ カットのコスト以下のコストを持つ。よって、 $C_3(V_x \cup V_y)$ の定義での1番目の3分割カットは $C_3(V_y)$ の1番目の3分割カットより大きいコストを持つ。以上より $\text{cost}(C_3(V_x \cup V_y)) < \text{cost}(C_3(V_y))$ と矛盾を生じる。よって、1番目の命題が証明された。2番目の命題も同様な議論で証明される。

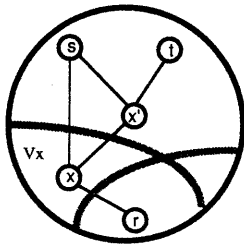


図4. x を通る s から t へのパスと x' を通る s から t へのパス

x を通る s から t へのパスの $s(t)$ から x までの部分パスが $G(\overline{V_x})$ 上の任意の $y \in V_y - V_x$ から $t(s)$ へのパスと節点素でないとする。この状況を図5に示す。この場合、 $G(\overline{V_x \cup V_y})$ 上の最小コスト $\{s\}-\{t\}$

カットは $G(\overline{V_x})$ か $G(\overline{V_y})$ 上の最小コスト $\{s\}-\{t\}$ カットでもあることが言える。したがって、 $C_3(V_x \cup V_y)$ は $C_3(V_x)$ か $C_3(V_y)$ と同じコストを持ち、仮定に矛盾する。 □

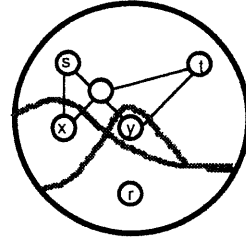


図5. x を通る s から t へのパスが y を通るパスと節点素でない場合

これまでは一般のグラフ上での2分割カット、3分割カットの性質について議論した。補題2より、最小コスト2分割カットを組み合わせることにより最小コスト3分割カットを構成できることを示した。

以下では $K_{3,3}$ に同相な部分グラフを持たないグラフにおける最小コスト3分割カットの性質を示す。 $K_{3,3}$ に同相な部分グラフを持たないグラフにおいて最小コスト2分割カットを定数個組み合わせるだけで構成できる最小コスト3分割カットが存在することを示す。

[定理1] $K_{3,3}$ に同相な部分グラフを持たないグラフ $G=(V, E)$ において、各節点 $x \in V - \{s, t\}$ に対する x 側の節点数が最大な最小コスト $\{r, x\}-\{s, t\}$ カット $C(\{r, x\}; \{s, t\})$ を $(V_x; \overline{V_x})$ で表すとす。このとき、2つ以下の最小コスト2分割カットの組合せにより構成される $\{r\}-\{s\}-\{t\}$ 3分割カットの集合 $\{\cup_{x \in V - \{s, t\}} C_3(V_x)\} \cup \{\cup_{y, z \in V - \{s, t\}} C_3(V_y \cup V_z)\}$ 中に最小コスト $\{r\}-\{s\}-\{t\}$ カットが存在する。

[証明] 背理法により証明する。

定理を証明するために、 $\cup_{x \in V - \{s, t\}} (V_x; \overline{V_x})$ に属する互いに交わる3つ以上の2分割カットを重ね合わせるにより構成される3分割カットが2つ以下の2分割カットを重ね合わせるにより構成される3分割カットのコスト以上のコストを持つことを示す。

$\{r\}-\{s, t\}$ カットの集合 $\cup_{x \in V - \{s, t\}} C(\{r, x\}; \{s, t\})$ に属する互いに交わる3つの2分割カット $(V_x; \overline{V_x})$, $(V_y; \overline{V_y})$, $(V_z; \overline{V_z})$ より構成される $\{r\}-\{s\}-\{t\}$ カット $C_3(V_x \cup V_y \cup V_z)$ は3分割カットの集合 $\cup_{i, j \in V - \{s, t\}} C_3(V_i \cup V_j)$ に属するカットのコスト以下のコストを持つとする。このとき、各 $V_i (i \in V - \{s, t\})$ に対して、補題3が満たされるので $V_x - (V_y \cup V_z)$ に属する節点 x と $V_y \cup$

V_z に属する節点 x' において、 $G(V_y \cup V_z)$ 上に節点 x を通る s から t へのパスと x を通らず x' を通る s から t へのパスと x' から x へのパスがそれぞれ存在することが言える。同様な条件を満たす節点 $y \in V_y - (V_x \cup V_z)$, 節点 $y' \in V_x \cup V_z$, 節点 $z \in V_z - (V_x \cup V_y)$, 節点 $z' \in V_x \cup V_y$ が存在する。このとき、3つの場合に分けて考察する。

(1) $G(V_x)$ 上に x から r へのパス、 $G(V_y)$ 上に y から r へのパス、 $G(V_z)$ 上に z から r へのパスが存在する場合。

この場合、 r への3つの中の各パスは互に含む含まれるの関係にない。よって、 G は図6に示す $K_{3,3}$ に同相な部分グラフを持ち、矛盾を生じる。

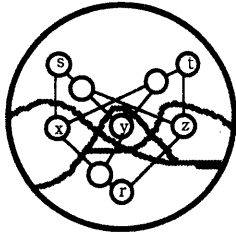


図6. 定理1の場合1

(2) x', y', z' が節点 $s(t)$ から x', y', z' へのパスが互に含む含まれるの関係にないという条件を満たす場合。

最小コスト3分割カットの性質より、 $C_3(V_x \cup V_y \cup V_z) = (R; S; T)$ とした場合、 $V_x \cup V_y \cup V_z \subseteq R$ であるので節点 x, y, z は互に連結でなければならない。この場合、図7のような状態となり $K_{3,3}$ に同相な部分グラフが G 上に存在しなければならず矛盾を生じる。

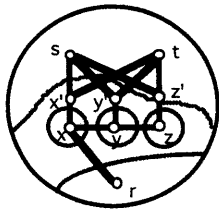


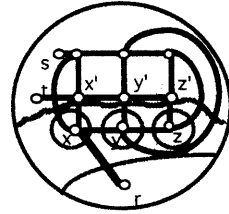
図7. 定理1の場合2

(3) その他の場合 (x', y', z' が節点 $s(t)$ から x', y', z' へのパスのどれかが互に含むもしくは含まれる関係にあるという条件を満たす場合)

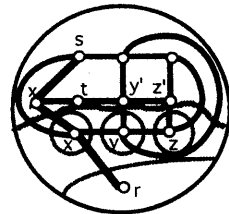
この場合、図8のような状態となる。 $C_3(V_x \cup V_y \cup V_z) = (R; S; T)$ とすると、 $C(\{r, x''\}; \{s, t\}) = (R \cup S; T)$ か $(R \cup T; S)$ となるような x'' が存在することが言える。また、 $C(\{r, x''\}; \{s, t\}) = (V_x - \overline{V_x}; \overline{V_x})$ においては $G(\overline{V_x})$ なる部分グラフにお

いて x'' と r は連結であることが言える。

よって、 $C_3(V_x \cup V_y \cup V_z) = C_3(V_x)$ とすることができる。また、 x', y' に関して互に含む含まれるの関係にあり、 z' に関しては含む含まれるの関係にないパスが存在する場合、 $C_3(V_x \cup V_y) = (R'; S'; T')$ とすると、 $C(\{r, x''\}; \{s, t\}) = (R \cup S; T)$ または $(R \cup T; S)$ となるような x'' が存在することが言える。この場合、 $(V_z; \overline{V_z})$ によって s 側の枝集合のみが変化することにより $C_3(V_x \cup V_y)$ よりもコストの小さい3分割カットを構成できることより、 $C_3(V_x \cup V_z) = (R''; S''; T'')$ において $R'' = R$ となる。よって、 $\text{cost}(C_3(V_x \cup V_z)) \leq \text{cost}(C_3(V_x \cup V_y \cup V_z))$ が言える。□



(a)



(b)

図8. 定理1の場合3

定理1での $K_{3,3}$ に同相な部分グラフを持たないグラフ上での最小コスト3分割カットの性質に基づき、正整数 d に対し $K_{3,d}$ に弱同相な部分グラフを持たないグラフに対し以下の定理が成り立つ。

[定理2] 正整数 d に対する $K_{3,d}$ に弱同相な部分グラフを持たないグラフ $G=(V, E)$ において、各節点 $x \in V - \{s, t\}$ に対する x 側の節点数が最大な最小コスト $\{r, x\} - \{s, t\}$ カット $C(\{r, x\}; \{s, t\}) = (V_x; \overline{V_x})$ で表すとす。このとき、 $d-1$ 個以下の最小コスト2分割カットを組み合わせることにより構成される $\{r\} - \{s\} - \{t\}$ カットの集合 $\{U_{x_1, \dots, x_{d-1}} \in V - \{s, t\}\}$ $C_3(V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_{d-1}})$ の中に最小コスト $\{r\} - \{s\} - \{t\}$ カットが存在する。

[略証] 定理1を拡張することにより証明する。定理1の証明での3つの場合分けのそれぞれにおいて、図9に示すような r, s, t それぞれへの互に含む含ま

れるの関係のないパスを持つ少なくとも $d-1$ 個の節点が存在することが示される。このとき、定理1における(3)の場合の複数の2分割カットを1つの2分割カットに置き換えることが可能な性質は重ね合わせるカットが3個以上の場合においても成立する。以上の議論より、定理2が証明できる。 □

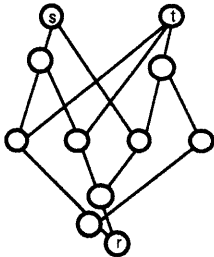


図9. 定理2の場合

4. 最小コスト3分割アルゴリズム

4.1 $K_{3,d}$ に弱同相な部分グラフを持たないグラフに対するアルゴリズム

正整数 d に対する $K_{3,d}$ に弱同相な部分グラフを持たないグラフに対し、定理2に基づいて以下の最小コスト3分割アルゴリズム Tri-PARTITION を提案する。

[アルゴリズム Tri-PARTITION ($G=(V,E)$, d, r, s, t)]

Step 1: 各節点 $x \in V - \{s, t\}$ に対し、 r 側の節点数が最大になるような最小コスト $\{r, x\} - \{s, t\}$ カット $C(\{r, x\}; \{s, t\})$ を求める。

Step 2: 各 $d-1$ 節点列 $x_1, \dots, x_{d-1} \in V - \{s, t\}$ に関する $C(\{r, x_1\}; \{s, t\}) = (\overline{V_{x_1}}; \overline{V_{x_1}}), \dots, C(\{r, x_d\}; \{s, t\}) = (\overline{V_{x_{d-1}}}; \overline{V_{x_{d-1}}})$ において、 $G(\overline{V_{x_1}} \cup \dots \cup \overline{V_{x_{d-1}}})$ 上での最小コスト $\{s\} - \{t\}$ カット $(S; T)$ を求める。

Step 2.1: $G(\overline{S})$ 上での最小コスト $\{r\} - \{t\}$ カット $(R'; T')$ を求め、 $\{r\} - \{s\} - \{t\}$ カット $(R'; S; T')$ を構成する。

Step 2.2: $G(\overline{T})$ 上での最小コスト $\{r\} - \{s\}$ カット $(R''; S'')$ を求め、 $\{r\} - \{s\} - \{t\}$ カット $(R''; S''; T)$ を構成する。

Step 3: Step 2 で求まった3分割カットの中で最小コストの3分割カットを出力する。 □

アルゴリズム Tri-PARTITION に対して以下の定理が成り立つ。

[定理3] 定数 d に対する $K_{3,d}$ に弱同相な部分グラフを持たないグラフ $G=(V,E)$ と V に属する相異なる3節点 r, s, t が与えられたとき、アルゴリズム Tri-PARTITION ($G=(V,E)$, d, r, s, t) は最小コスト $\{r\} - \{s\} - \{t\}$ カットを $O(n \cdot \alpha(n, m) + n^{d-1}(\beta(n, m) + m))$ の計算時間で求める。ここで、 $n =$

$|V|$, $m = |E|$, $\alpha(n, m)$ は各節点 $x \in V - \{s, t\}$ に対し $C(\{r, x\}; \{s, t\})$ を求める手続きに必要な計算時間、 $\beta(n, m)$ は最小コスト $\{s\} - \{t\}$ カットを求める手続きに必要な計算時間を表す。 □

アルゴリズム Tri-PARTITION の Step 1 での各節点 $x \in V - \{s, t\}$ に対する $C(\{r, x\}; \{s, t\})$ を求める手続きでは、図10のように新たなSource節点 s_0 と sink 節点 t_0 、及び s_0 と x 、 s_0 と r 、 t_0 と s 、 t_0 と t をそれぞれ接続する重み ∞ の枝を G に付け加えたグラフ G' を用いる。はじめに G' に対し最小コスト $\{s_0\} - \{t_0\}$ カットを求める。次に、 t_0 から幅優先探索によってカットに属している枝が見つかるまで探索を続け、探索できなくなったときにカットを構成する。すなわち、 t_0 から探索可能であった元のグラフ上の節点集合を $\overline{V_x}$ とし、 $\overline{V_x}$ の G 上の補集合を V_x として、 $C(\{r, x\}; \{s, t\})$ となる $\{r, x\} - \{s, t\}$ カット $(V_x; \overline{V_x})$ を求める。よって、 $C(\{r, x\}; \{s, t\})$ は一般のグラフでの最小コスト $\{s\} - \{t\}$ カットを求める手続きと同じ計算時間で求めることができる。例えば、最小コスト $\{s\} - \{t\}$ カットを求める手続きとして、 $O(nm \log(n^2/m))$ のアルゴリズム [4] を適用した場合、定理3に対して以下の系が成り立つ。

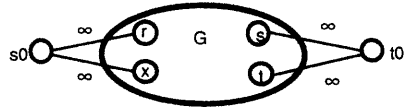


図10. $C(\{r, x\}; \{s, t\})$ を求めるためのグラフ G の変換グラフ G'

[系1] 定数 d に対する $K_{3,d}$ に弱同相な部分グラフを持たないグラフ $G=(V,E)$ と V に属する相異なる3節点 r, s, t が与えられたとき、アルゴリズム Tri-PARTITION ($G=(V,E)$, d, r, s, t) は最小コスト $\{r\} - \{s\} - \{t\}$ カットを $O(n^d m \log(n^2/m))$ の計算時間で求める。 □

系1によって、 d が定数の場合、 $K_{3,d}$ に弱同相な部分グラフを持たないグラフ上の最小コスト3分割カットは多項式時間で求めることが可能であることが分かった。しかし、 d が任意の場合、指数時間かかることになる。全ての節点次数が3以下のグラフの最小コスト3分割カット問題はNP困難であることから、この計算時間を多項式時間に改良することはできないと予想される。

入力グラフ $G=(V,E)$ が与えられたとき、 G が $K_{3,d}$ に弱同相な部分グラフを持たない最小の値 d を計算するアルゴリズムは得ていない。しかし、グラフ G 上で節点次数が3以上の節点数を n_3 、最大節点次数を M_d としたとき、 d の上界は $(n_3 + 3M_d - 3)/$

4で表される[6].

4. 2 平面無向グラフに対する最小コスト3分割アルゴリズム

$K_{3,3}$ に同相な部分グラフを持たないグラフの部分クラスである平面グラフに対しては提案アルゴリズムを高速化できる. 平面グラフでは最小コスト $\{s\}-\{t\}$ カットを求めるFredericksonによる $O(n \log n)$ 計算時間のアルゴリズムを適用することができる. また, $C(\{r, x\}; \{s, t\})$ は一般のグラフの最小コスト2分割アルゴリズムにより $O(n^2 \log n)$ の計算時間で求めることができる. よって, 定理3に対し以下の系2が成り立つ.

[系2] 平面グラフ $G=(V, E)$ と V に属する相異なる3節点 r, s, t が与えられたとき, アルゴリズム Tri-PARTITION($G=(V, E), 3, r, s, t$) は最小コスト $\{r\}-\{s\}-\{t\}$ カットを $O(n^3 \log n)$ の計算時間で求める. □

平面グラフにおいては各節点 x に対する $C(\{r, x\}; \{s, t\})$ をFredericksonのアルゴリズムを適用することにより $O(n \log n)$ で求めることもできる. よって, 平面グラフの部分クラスである K_5 と $K_{3,2}$ に同相な部分グラフを持たないグラフに対しては定理3の系として以下の系3が成り立つ.

[系3] $K_{3,2}$ に同相な部分グラフを持たない平面グラフ $G=(V, E)$ と V に属する相異なる3節点 r, s, t が与えられたとき, アルゴリズム Tri-PARTITION($G=(V, E), 2, r, s, t$) は最小コスト $\{r\}-\{s\}-\{t\}$ カットを $O(n^2 \log n)$ の計算時間で求める. □

[例4] 図2のグラフ G と相異なる3節点 r, s, t が与えられたとき, 最小コスト $\{r\}-\{s\}-\{t\}$ カットをアルゴリズム Tri-PARTITIONにより求める. グラフ G は $K_{3,3}$ に同相な部分グラフを含まないグラフなので最小コスト2分割カットを高々2個組み合わせる.

$C(\{r, x\}; \{s, t\})$ と $C(\{r, y\}; \{s, t\})$ を組み合わせさせたときの s, t 側の部分グラフとその最小コスト $\{s\}-\{t\}$ カットを図11(a)に示す. 2つの2分割カットにより誘導される3分割カットは図11(b)のようになる. 最終的にアルゴリズムは G の最小コスト3分割カットとして図11(b)の3分割カットを出力する. □

5. あとがき

正整数 d に対して $K_{3,d}$ に弱同相な部分グラフを含まないグラフにおける最小コスト3分割カットアルゴリズムを提案した. 提案アルゴリズムはネットワークフローアルゴリズムを用いることにより $O(n^d m \log(n^2/m))$ の計算時間で最小コスト3分割カットを求める. 入力が平面グラフである場合, Fredericksonの手法を用いることで $O(n^3 \log n)$ の計算時間になる. ま

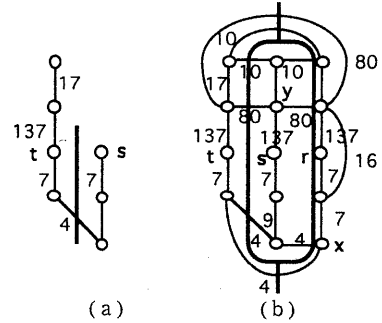


図11. $C(\{r, x\}; \{s, t\})$ と $C(\{r, y\}; \{s, t\})$ による3分割カット

た, 平面グラフの部分クラスであり $K_{3,2}$ に同相な部分グラフを持たない平面グラフにおいては $O(n^2 \log n)$ の計算時間で最小コスト3分割カットを求めることができる.

今後の課題としてはグラフ上での最小コストカットの性質に基づくアルゴリズムの高速化, 高速近似アルゴリズムの開発, 及び, 最小コスト $k(k \geq 4)$ 分割問題への提案アルゴリズムの拡張等が挙げられる.

本研究の一部は文部省科学研究費補助金一般研究(C)(課題番号05680274)による.

文献

- [1] E. Dahlhaus, D. S. Johnson, C. H. Papadimitriou, P. D. Seymour and M. Yannakakis: "The complexity of multiway cuts," Proc. 24th ACM Symposium on Theory of Computing, pp. 241-251 (1992).
- [2] S. Even: "Graph Algorithms," Computer Science Press (1979).
- [3] G. N. Frederickson: "Fast algorithms for shortest paths in planar graphs, with applications," SIAM J. Comput., Vol. 16, No. 6, pp. 1004 - 1022 (1987).
- [4] A. V. Goldberg and R. E. Tarjan: "A new approach to the maximum flow problem," Proc. 18th ACM Symposium on Theory of Computing, pp. 136 - 146 (1987).
- [5] A. Itai and Y. Shiloach: "Maximum flow in planar networks," SIAM J. Comput., Vol. 8, pp. 135 - 150 (1979).
- [6] Y. Kamidoi: "A study on graph and hypergraph partitioning with application to VLSI layout design," Ph.D. Dissertation, Hiroshima Univ., to appear.
- [7] J. F. Reif: "Minimum s-t cut of a planar undirected network in $O(n \log^2(n))$ time," SIAM J. Comput., Vol. 12, No. 1, pp. 71 - 81 (1983).
- [8] W.K.Shin, S.Wu and Y.S. Kuo: "Unifying maximum cut and minimum cut of a planar graph," IEEE Trans. Comput., Vol. 39, No. 5, pp. 694 - 697 (1990).