アルゴリズム 39−4
(1994. 5. 13)

逆探索による三角形分割の列挙とその応用

京田 芳明
東京大学理学部情報科学科

三角形分割の組合せ的構造とそれに関連した最適化問題は計算幾何学において研究されてきたが、それは三角形分割がコンピューターグラフィクスにおけるメッシュ生成や有限要素分析に有用だからである。本論文は最初に平面上の点集合に対する三角形分割の数を逆探索アルゴリズムの計算実験をすることにより調べる。凸 n 角形では分割総数は $\frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$ であり、正方形内にランダムにおかれた点集合の分割総数はそれに近いことが実験的に示される。

また、平面上の三角形分割に関する最適化問題についても列挙アルゴリズムを用いてしらべる。正方形内に一様にランダムにある点集合に対して、その Delaunay 分割が最小辺長になっている確率は点集合の大きさの増加とともに減少することが観察される。

THE ENUMERATION OF TRIANGULATIONS BY REVERSE SEARCH AND ITS APPLICATIONS

Yoshiaki Kyoda
Department of Information Science, Faculty of Science,
The University of Tokyo
7-3-1, Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113
e-mail: kyoda@is.s.u-tokyo.ac.jp

The combinatorial structure of triangulations and related optimization problem have been considered in computational geometry, since triangulations are useful in the mesh generation algorithm in computer graphics and finite element analysis. This thesis first investigates the number of triangulations of a planer point set by computational experiments of a reverse-search algorithm. For a convex polygon of n vertices, the number of distinct triangulations is $\frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$. The number of triangulations of points randomly distributed in the square is computationally shown to be close to the above number.

Some optimization problems concerning planer triangulations are also investigated by using enumeration algorithm. It is observed that for random points uniformly distributed in the square, the probability that Delaunay triangulation is a minimum-length triangulation decreases as the size of points increases.

1 イントロダクション

点集合の三角形分割とは2次元においてはその凸包を2-単体[4]すなわち三角形に、3次元では3-単体すなわち4面体に分割することである。その研究は興味深いだけでなく他の分野、例えばコンピューターグラフィクスにおけるメッシュ生成や有限要素解析にも関連があり、応用される。物体の表面の近似にも次のようにして三角形分割が使われる。R^3 における滑らかな表面上にいくつか点をとり、それらを平面上に射影してその平面上で三角形分割を行なう。その三角形をもとの平面に合わせる(図 1)。その際、どのような三角形分割が最適であるといえるかは論じる意味があるであろう。

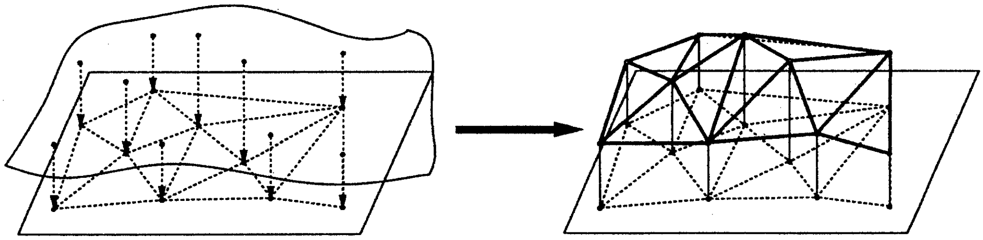


図 1: 表面の近似

何らかの意味で、"最適"である三角形分割は応用において有効であると予想される。最適な分割は以下のように定義できる。

最適の基準となる関数 $q : \tau \to R$ を考える。ここで τ は三角形分割全て。"最適"化するとは q を最大または最小にすることを意味する。それぞれが、各三角形がなるべく正三角形に近いものになるようにする性質を持っている。例

- 最大角最小
  $q(V) =$ 三角形分割 V における最大角 を最小にする。
- 最小角最大
  $q(V) =$ 三角形分割 V における最小角 を最大にする。
- 辺長和最小

本研究では与えられた点集合に対して全ての三角形分割を求め、その中で最適なものを選ぶという方向で進めていく。

1.1 目的と結果

本研究は三角形分割の構造について調べるのを目標とするため、まず最初に分割の数について調べる。

平面上で点集合が凸多角形をなすときは、容易に数を数えあげることができる。しかし、そうでないときは逆探索法[3]などの効率的なアルゴリズムが必要である。逆探索法は時間的にも空間的にも計算量において非常に有利である。この計算機実験によって、凸多角形の三角形分割の総数は、ランダムに分布した点集合の分割総数のよい評価基準となりそうなことが観察される。

平面上の点集合の三角形分割の最適化問題も全てを列挙することによって解かれる。与えられた点集合に対して辺長和を最小の定数倍以下におさえる多項式時間アルゴリズムは存在するかどうかすら知られていない。最小角を最大にする Delaunay 分割 ($O(n \log n)$ 時間で構成可能) だと、直観的には辺長和を小さくする性質がありそうだと考えられるが、ランダムに分布させた点集合にたいしてでさえ必ずしもそうならないことが分かる。

2 準備

2.1 三角形分割の定義

V を n 点からなる集合、 $convV$ を V の凸包とする。すなわち、
$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$,
$convV = \{\sum_{i=1}^{n} t_i v_i | v_i \in V, t_i > 0, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1\}$
$convV$ の三角形分割は次の集合 $\tau = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$. それぞれの $S_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ は V の部分集合であり、 τ は次の条件を満たす。

1. $dim(convS_i) = d - 1 (i = 1, 2, \ldots, m)$
2. $\bigcup_{i=1}^{m} convS_i = convV$
3. $i \neq j$ にたいして、,$(convS_i) \cap (convS_j)$
   は無かまたは $(convS_i)$ と $(convS_j)$ の両方によって共有されている面である
4. $|S_i| = d$ for all i

2.2 三角形分割: 点集合が凸多角形をなす場合

点集合が凸多角形になる場合は、一つの三角形分割と式に対する括弧のつけかたとが 1 対 1 に対応することを用いて全ての三角形分割の列挙または個数のカウントができる。
図 2 において、左の六角形の三角形分割が右の 5 変数の積の括弧の付け方に対応している。 $n-1$ 変数の積

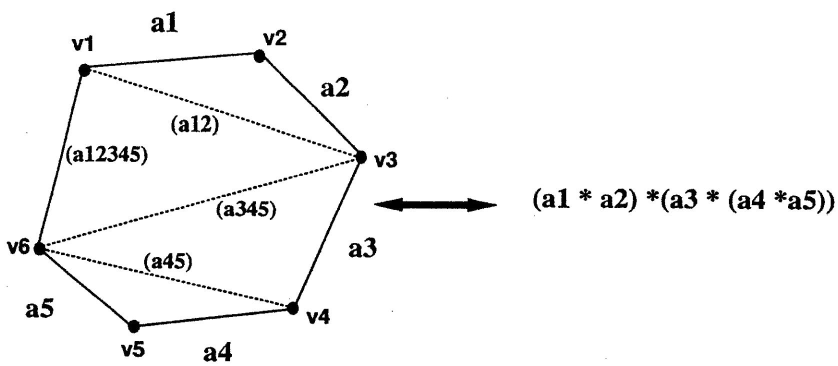


図 2: 三角形分割と括弧づけの対応

に対しての括弧のつけかたの個数が $\frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$ となることは比較的容易に計算できる。これに Stiring の公式を使うと約 $\frac{1}{n-1}2^{2(n-2)}$ となる。三角形分割と括弧づけは 1 対 1 対応しているので三角形分割の数もそれに等しい。

なお点集合が凸多角形をなさない場合はこのように容易に数えることはできない。

3 逆探索

逆探索は凸多面体の端点列挙やマトロイドの基底列挙にも応用されるが、ここでは三角形分割列挙についてのみおおまかに述べる。

三角形分割１つ１つが点であり、１本の辺の折り返しによって１点から別の１点に移ることができるとき、その２点を辺で結ぶとすると、三角形分割の集合はグラフを構成すると考えることができる [3]。逆探索はこのグラフを全て探索する。下の図では太線で連結されている木を探索する。破線でつながっているのは折り返しによって移ることが可能だが、逆探索では移ることはない。

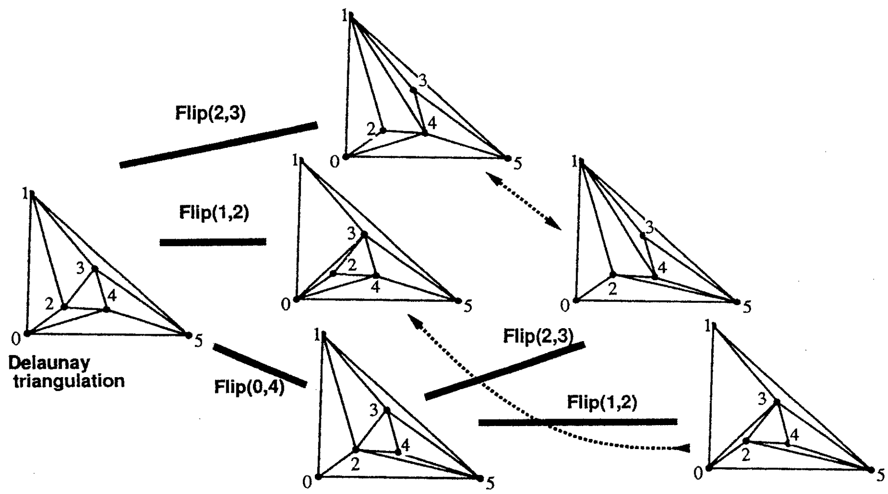


図 3: 三角形分割のグラフ

3.1 Delaunay 分割

ある三角形分割において AC を折り返し可能な辺とし、三角形 ABC と ACD がその分割に含まれているとする。このとき、もし ABC の外接円の外側に点 D が存在するとき、 AC は局所的に Delaunay であるという。全ての内辺が局所的に Delaunay であるような三角形分割を Delaunay 分割という。グラフ内の木の根にあたるのが Delaunay 分割であり、最小角を最大にするという性質をもっている。 Delaunay 分割は点集合が xy 平面上に与えられた時、それらを $z = x^2 + y^2$ に z 軸に水平に射影し、射影された点集合の下側凸包を求め、さらにそれを xy 平面上に射影することによって得られる。これは凸包を構成する以外は線形時間しかかからないので、 $O(n \log n)$ 時間 [2] でできる。

3.2 計算複雑度

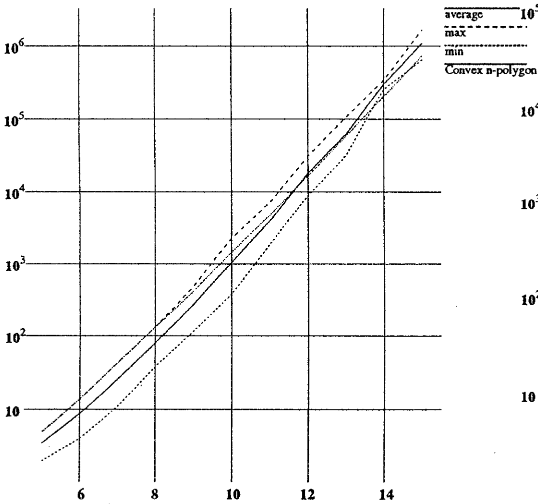
逆探索法はうまく適用できた場合、一般に

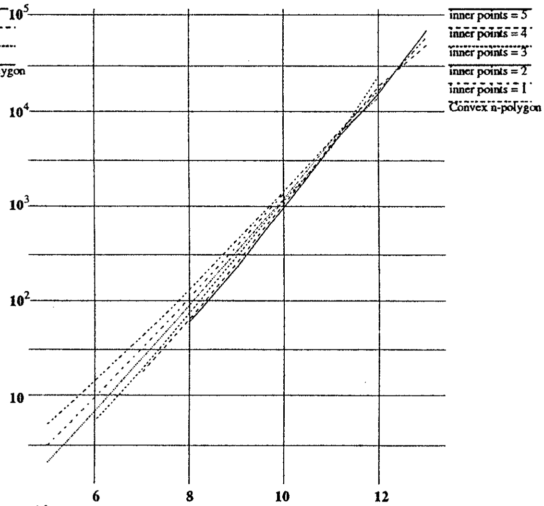
- (時間複雑度)$\propto$(入力サイズの多項式)(出力サイズ)
- (容量複雑度)$\propto$(入力サイズ)

となる性質がある。 Delaunay 分割を構成するのに $O(n \log n)$ 時間しかかからないので今の場合も同じことがいえ、多項式の次数は小さくなる。

4 個数のカウント

2.2 でみたように、点集合が凸 n 角形をなすさいには個数が一意に決まったが、一般の位置にある時はそうはいかない。逆探索によって全て列挙し点数とそれに対する三角形分割の個数の対数をとってグラフにしてみた。さらに、直観的には内側に入っている点数によって分割の個数が変わってくると考えられるので、内点数別にもグラフを出してみた。それぞれの線は、各内点数における平均を表す。





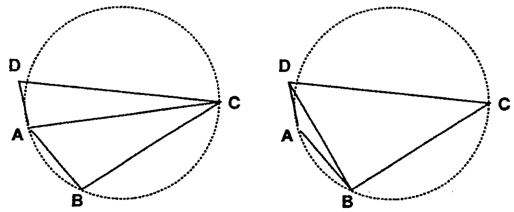
一つ目のグラフでは、三角形分割の個数の平均を表す線は凸 n 角形の分割数のグラフにほとんど平行であり、近接している。平均の個数を知りたいというだけなら凸 n 角形の分割数でかなり近い近似になると考えられる。 さらに、最大、最小を表すそれぞれの線も凸 n 角形の線に平行である。線と線の幅は一定または減少気味であり、またこのグラフは対数のグラフなので最大、凸 n 角形、最小の個数には高々定数倍程度の差しかないことが観察される。

二つ目のグラフにおいても、各内点数の線はそれぞれお互いにほぼ平行である。少なくとも点数が 15 以下では内点数が分割の個数を大きく変えることはないことが観察される。しかし、1 つ目のグラフを見ると、点数が 8 以下では凸 n 角形の分割数が他のいかなる場合の分割数よりも多くなっている。また 2 つ目のグラフをみると、点数が大きくなるにしたがって凸 n 角形の線が他の線に追い越されていくことが想像される。したがって、9 点以上が集まってはじめて新しい、分割数を増すような組合せ的構造が現れると予想される。

なお、点集合が一般の位置にある場合は三角形分割の個数は $2^{O(n)}$[1] と知られているが、$O(n)$ の係数については未解決である。

5　辺長和最小分割

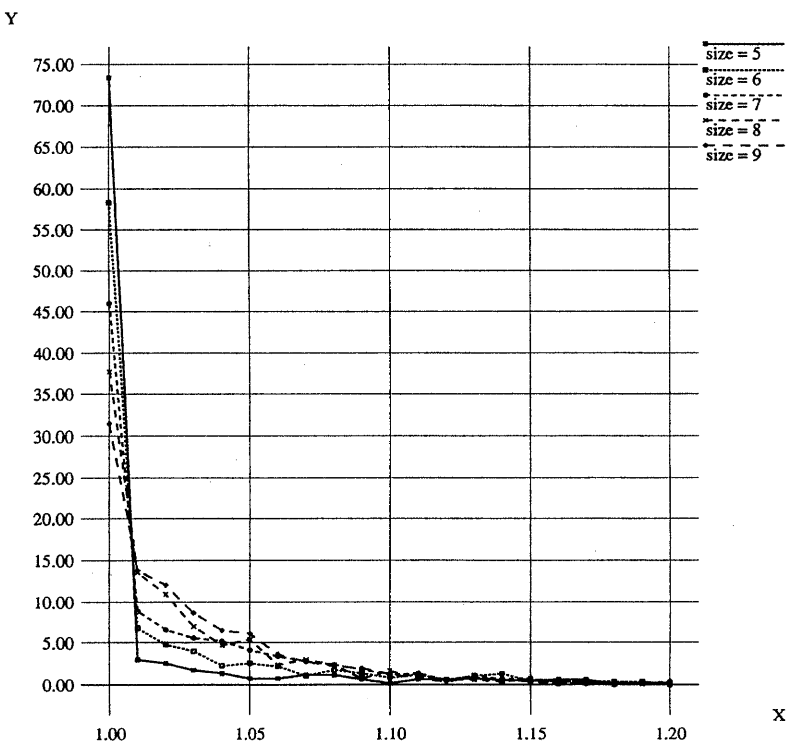
辺長和最小分割を求める、または辺長和が最小の定数倍以下になることを保証する多項式時間アルゴリズムは存在すら分かっていない。直観的には Delaunay 分割は辺長和を短くしそうであるし、わずか $O(n \log n)$ 時間で構成可能であるので応用上有効であると思われる。ただ明らかに、図 4 の様に Delaunay かつ辺長和最小分割でない三角形分割が存在する。よって、それがどの程度辺長和を小さくするかを調べる。



(1) Delaunay triangulation　　(2) Minimum-length triangulation

図 4: Delaunay 分割が辺長和最小分割にならない例

次のグラフは正方形内にランダムに分布させた点集合の Delaunay 分割と辺長和最小分割の内辺長比の割合を示す。横軸は内辺長比、縦軸はその割合 (%) である。点数が 5 から 9 までのそれぞれの場合について示した。なお、比が 1.2 以上のものも存在するが、数が少ないのでグラフの見やすさのため 1.2 を越えるものは削除した。



以下の表は正方形内と長方形内にランダムにおかれた点集合に対しての Delaunay 分割と辺長和最小分割の比の最大値である。1000 回程度の繰り返しで最悪どの程度のものが出うるのか示している。もちろん意図的に最悪値比がいくらでも大きいものは作れる。

点数	5	6	7	8	9
正方形内に分布	1.71	1.40	1.26	1.24	1.24
長方形 (縦横比 $\frac{1}{6}$)	2.35	1.98	1.69	1.50	1.27

グラフを見ると、点数が少ない時は大半の Delaunay 分割が辺長和最小分割になっているが、点数が増えるに従ってその割合は減少し、9点では3分の1程度しか辺長和最小になっていない。

また、表をみる限りでは、意図的に点を置かない限り点集合の大きさが大きくなればなるほど、最悪値比がどんどん小さくなっていくことが予想される。しかし応用上では、上で述べたように非常に運が悪いことも考えられうるので、その点は注意しなくてはならない。

6 まとめ

逆探索法を用いて与えられた点集合の三角形分割をすべて列挙することにより、個数をカウントし、Delaunay 分割の辺長和を短くする性質について調べた。

参考文献

[1] Edelsbrunner. Triangulations. Lecture notes, Department of Computer Science, University of Illinois at Urbana, 1991.

[2] Preparata F.P. and Hong S.J. Convex hull of a finite set of points in two and three dimensions. *Commun. ACM*, Vol. 20, No. 2, pp. 87–93, Feb 1977.

[3] 福田公明. 逆探索とその応用. 離散構造とアルゴリズム II. 近代科学社, 1993.

[4] 加藤十吉. 位相幾何学. 華房, 1988.