

## 平面上で2本の最短な道を求めるアルゴリズム

草薙 良至, 鈴木 均, 西関 隆夫  
東北大学大学院情報科学研究科

本文では, 2次元平面上にいくつかの長方形障害物といくつかの2層配線領域と2組の端子対が与えられたときに, 障害物を避け2層領域以外では交差せずに各端子対を結ぶ2本の道で長さの和の最小な組を求める効率の良いアルゴリズムを与える. 各道は座標軸に水平垂直な線分だけからなるものとする. 障害物の個数を  $n$  とし, 2層領域の個数を  $m$  とすると, アルゴリズムは  $O((m+n)\log(m+n))$  時間と  $O(m+n)$  の記憶量でこの問題を解くことができる.

## An Algorithm for Finding a Shortest Pair of Paths in a Plane Region

Yoshiyuki Kusakari, Hitoshi Suzuki, Takao Nishizeki  
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

Given  $n$  rectangular obstacles,  $m$  rectangular crossing areas and two pairs of terminals, our algorithm finds a pair of paths  $P$  and  $P'$  each connecting a pair of terminals such that  $P$  and  $P'$  do not cross each other except in the crossing areas and the sum of the lengths of  $P$  and  $P'$  is minimum among all such paths. We assume that all the rectangles and paths are axis-parallel. The algorithm runs in time  $O((m+n)\log(m+n))$  and uses  $O(m+n)$  space.



辺, 下辺, 左辺, 右辺を  $te(R)$ ,  $be(R)$ ,  $le(R)$ ,  $re(R)$  と書く.

配線領域  $A$  上の 4 点  $a, a', b, b'$  が与えられているとする. 配線領域  $A$  だけを通る互いに交差しない  $a-a'$ ,  $b-b'$  間の 2 本の道で長さの和が最小なものを  $P_a, P_b$  とする. 対  $(P_a, P_b)$  を最短非交差道と呼ぶ (図 1 参照). 最短非交差道の集合を  $\mathcal{P}$  と書く. また, 配線領域だけを通り (交差領域では交差するかもしれないが) 交差領域以外では互いに交差しない  $a-a'$ ,  $b-b'$  間の 2 本の道で長さの和が最小なものの対を交差領域のある最短非交差道と呼ぶ (図 2 参照). 交差領域のある最短非交差道の集合を  $\mathcal{P}^c$  と書く. 各交差領域  $C_j$  中に共有点をもち,  $C_j$  以外では交差しない  $a-a'$ ,  $b-b'$  間の 2 本の道の組で, 長さの和が最小なものの集合を  $\mathcal{P}_j^c$  と書く. どの対  $(P_a, P_b) \in \mathcal{P}$  に対しても長さの和  $l(P_a) + l(P_b)$  は同じである. それを  $l(\mathcal{P})$  と書く. 同様に  $l(\mathcal{P}^c)$  と  $l(\mathcal{P}_j^c)$  を定義する.

**補題 2.1**  $(P_a, P_b) \in \mathcal{P}_j^c$  とし,  $p \in (P_a \cap P_b) \cap C_j$  とする.  $(P'_a, P'_b) \in \mathcal{P}_j^c$  が存在し,  $P'_a[a, c]$ ,  $P'_a[c, a']$ ,  $P'_b[b, c]$ ,  $P'_b[c, b']$  が互いに交差しない.

#### 証明

$p$  を共有点に持ち交差する回数が最小の最短交差道を  $(P_a, P_b) \in \mathcal{P}_j^c$  とする.  $P_a$  と  $P_b$  が 2 回以上交差すると仮定して矛盾を導く.  $P_a$  と  $P_b$  の 2 つの交点を  $c_1, c_2$  とする.  $P_a$  からその部分道  $P_a[c_1, c_2]$  を  $P_b[c_1, c_2]$  で置き換えてできる道を  $P'_a$  とする. 同様に  $P_b$  からその部分道  $P_b[c_1, c_2]$  を  $P_a[c_1, c_2]$  で置き換えてできる道を  $P'_b$  とする. すると  $(P'_a, P'_b)$  は最短交差道であり, 交差回数は  $(P_a, P_b)$  より 2 少なく,  $(P_a, P_b)$  の交差回数の最小性に矛盾する.  $\square$

補題 2.1 より  $l(\mathcal{P}^c) = \min\{l(\mathcal{P}), \min\{l(\mathcal{P}_j^c) \mid 1 \leq j \leq m\}\}$  であることがわかる.

また最短非交差道に関して以下の定理 2.1 が成立することが知られている [1].

**定理 2.1**  $P_a$  と  $P_b$  をそれぞれ  $a-a'$  間と  $b-b'$  間の任意の最短路とする.  $(P_a, P'_b) \in \mathcal{P}$  なる  $b-b'$  間の道  $P'_b$  が存在するか, あるいは  $(P'_a, P_b) \in \mathcal{P}$  なる  $a-a'$  間の道  $P'_a$  が存在する.  $\square$

定理 2.1 より, 以下の (1) あるいは (2) により求められる道の対  $(P_a, P_b)$  が  $A$  の最短非交差道であることがわかる.

(1)  $a-a'$  間の最短路を  $P_a$  とし,  $P_a$  と交差しない  $b-b'$  間の道のうちで最短なものを  $P_b$  とする.

(2)  $b-b'$  間の最短路を  $P_b$  とし,  $P_b$  と交差しない  $a-a'$  間の道のうちで最短なものを  $P_a$  とする.

(1) あるいは (2) のような最短非交差道  $(P_a, P_b)$  は  $O(n \log n)$  時間で求めることができる [1]. 従って各  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , について  $\mathcal{P}_j^c$  の道を求めることによって交差領域のある最短非交差道を求めることができる.

**補題 2.2**  $l(\mathcal{P}_j^c) < l(\mathcal{P})$  ならば,  $P_a \cap (C_j - B(C_j))$  と  $P_b \cap (C_j - B(C_j))$  が空であるか 1 本の線分であるような道の対  $(P_a, P_b) \in \mathcal{P}_j^c$  が存在する.

#### 証明

補題 2.1 より  $C_j$  以外では互いに交差しない道の対  $(P_a, P_b) \in \mathcal{P}_j^c$  が存在する.  $P_a \cap (C_j - B(C_j)) \neq \phi$  かつ,  $P_a \cap (C_j - B(C_j))$  が 1 本の線分でもないとする.

$P_a$  を  $a$  から進んで最初の  $B(C_j)$  との共有点を  $u$ ,  $a'$  から進んで最初の  $B(C_j)$  との共有点を  $u'$  とする. 道  $L$  を以下のように定める.  $u$  と  $u'$  が  $B(C_j)$  の対向する辺上にある場合は,  $u$  から対向する辺への垂線と,  $u'$  からその垂線までの  $B(C_j)$  の上の道との和を  $L$  とする. そうでない場合は,  $u-u'$  間の  $B(C_j)$  上の道で短い方を  $L$  とする.  $P_a$  の  $u-u'$  間の部分道を  $L$  で置き換えたものを  $P'_a$  とする. 明らかに  $P'_a$  は  $P_a$  より長くなく  $P'_a \cap (C_j - B(C_j)) = \phi$  あるいは  $P'_a \cap (C_j - B(C_j))$  が 1 本の線分であるかのどちらかを満足する. 同様に  $P_b$  から  $l(P'_b) \leq l(P_b)$  であり,  $P'_b \cap (C_j - B(C_j)) = \phi$  あるいは  $P'_b \cap (C_j - B(C_j))$  が 1 本の線分であるような  $b-b'$  間の道  $P'_b$  が得られる.  $P'_a$  と  $P'_b$  は  $C_j$  以外では交差しないので  $(P'_a, P'_b) \in l(\mathcal{P}_j^c)$  かつ  $l(P'_a) + l(P'_b) \geq l(\mathcal{P})$  のいずれかである.  $\square$

## 3 最短交差道

### 3.1 準備

いくつかの用語の定義と補題を示す.  $A$  中の垂直または水平な線分を  $L$  とする.  $A$  の点  $p$  から  $L$  に垂線を下ろしたときにその垂線が  $A$  に含まれる (障害物に交わらない) ならば,  $p$  は  $L$  から見えるという.  $P$  を  $A$  上の道とする.  $P$  と  $y$  軸に平行な任意の直線との共通部分が空か 1 本の線分であるとき,  $P$  は  $x$  方向に単調であるという.  $x$  方向に単調である道を  $x$  道と呼ぶ. 同様に,  $y$  方向の単調性と  $y$  道とを定義する.  $p$  を始点とする  $xy$  道を以下のようにより帰的に定義する.



**補題 3.3**  $A$  の任意の点を  $s$  とし,  $r \in \{+x, -x, +y, -y\}$  とする.  $r = \pm x$  ならば  $L$  を  $R_s\{r\} \cap A$  中の水平な線分とし,  $r = \pm y$  ならば  $L$  を  $R_s\{r\} \cap A$  中の垂直な線分とする.  $r = +x, +y$  ならば  $f_L^r$  の傾きは  $+1$  であり,  $r = -x, -y$  ならば  $f_L^r$  の傾きは  $-1$  である.

□

$A$  を任意の点を  $s$  とし,  $r \in \{+x, -x, +y, -y\}$  とする.  $R_s\{r\} \cap A$  中の垂直あるいは水平な線分を  $L$  とする.  $f_L^r$  の傾きが変わる点 (に対応する  $L$  上の点) を  $s$  に関する ( $L$  上の) 変傾点と呼ぶ (図4 参照). 補題 3.2 と 3.3 より次の補題が成立する.

**補題 3.4**  $A$  の任意の点を  $s$  とし,  $r \in \{+x, -x, +y, -y\}$  とする.  $R_s\{r\}$  中の障害物の辺の集合を  $E_{s,r}$  とする.  $s$  に関する全ての  $e \in E_{s,r}$  上の変傾点の総数は  $O(n)$  である

□

### 3.2 前処理

各端子  $s \in \{a, a', b, b'\}$  からその  $x, -x, y, -y$  領域中の障害物の頂点及び変傾点までの最短路長を前処理により求める.  $R_s\{x\}$  中の前処理についてだけ示す. 他の3領域についても同様に前処理を行なうことができる.  $R_s\{x\}$  中の各障害物の右上上の頂点と変傾点から  $x$  方向に障害物に交差するまで水平線を引く. 補題 3.2 の証明からわかるように, 各障害物  $O_i$  の右上上の変傾点  $p^*$  の  $y$  座標は

$$y(p^*) = \frac{1}{2} \{y(rt(O_i)) + y(rb(O_i)) + sd(s, rt(O_i)) - sd(s, rb(O_i))\}$$

であることに注意しよう.  $R_s\{x\}$  の境界 ( $s$  からの  $xy$ 道と  $x(-y)$ 道) とその内部にある障害物の辺及び上で求めた垂線からなるグラフを  $G_x$  とする (図5 参照).  $G_x$  は  $s$  から  $+x$  方向への平面スイープによって求めることができる.  $G_x$  の点数と辺数はいずれも  $O(n)$  であるから  $s$  から  $G_x$  の全ての点までの最短路は  $O(n \log n)$  時間で求めることができる.  $G_x$  は  $s$  に関する  $R_s\{x\}$  中の全ての障害物の辺上の変傾点を含むことに注意されたい.

### 3.3 アルゴリズム

各端子  $a, a', b, b'$  の  $x, -x, y, -y$  領域により  $A$  を高々  $4^4$  個の領域に分けることができる. 各交差領域はその 256 個の領域のいずれかに完

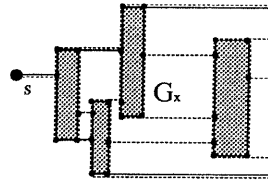


図 5:  $G_x$  の例

全に含まれるとしてよい. そうでなければ領域を分割する優先道によって交差領域を分割すればよい (図6 参照). 分割後の交差領域の数は明らかに  $O(m)$  である. また,  $a$  の  $r_1$  領域,  $a'$  の  $r_2$  領域,  $b$  の  $r_3$  領域,  $b'$  の  $r_4$  領域の4領域の共通領域を  $R\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$  と書く.

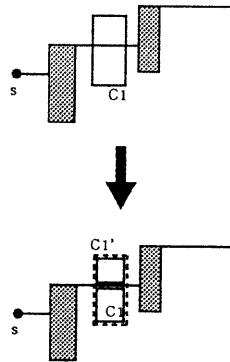


図 6: 交差領域分割

全ての部分領域  $R\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$  はその内部の交差領域と4つの端子  $a, a', b, b'$  との相対的な位置関係によって8つの場合に分けられることを示す. なお, 交差領域中に共有点を  $p$  を持つ道の対を求めればよいので,  $p$  と4端子を結んだ4本の道で長さの和が最小となる道の組を求めればよい. 従って4つの端子の間に本質的に違いはない(2端子対の各要素でなくとらえられる)ことに注意されたい. 各交差領域  $C_j$  についてその  $x$  領域,  $-x$  領域,  $y$  領域,  $-y$  領域を以下のように定義する. 頂点  $lt(C_j)$  より  $(-x)y$ 道を引き,  $lb(C_j)$  より  $(-x)(-y)$ 道を引き,  $rt(C_j)$  より  $xy$ 道を引き,  $rb(C_j)$  より  $x(-y)$ 道を引く, これにより  $C_j$  の外部の平面が4分割される. この4部分領域をそれぞれ交差領域  $C_j$  の  $\pm x$  領域  $\pm y$  領域と呼ぶ. 次の補題が明らかに成立する.

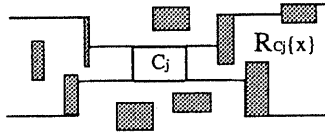


図 7:  $R_{C_j}$

補題 3.5  $s$  を  $A$  の任意の点とする. 交差領域  $C_j$  が  $R_s\{r\}$  中にあるときに, かつそのときに限り  $C_j$  の  $-r$  領域中に  $s$  がある.

□

従って各部分領域  $R\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$  の内部の全ての交差領域は以下の 8 通りの場合のいずれかである (図 8~15 参照).

場合 1 交差領域の 1 つの領域に 4 端子がある.

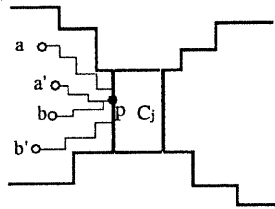


図 8: 場合 1

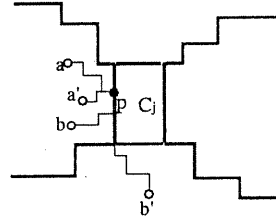


図 10: 場合 3

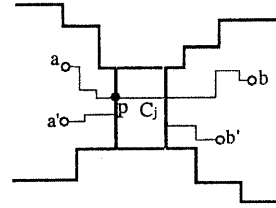


図 11: 場合 4

場合 2 交差領域の 1 つの領域に 3 端子あり, その向いの領域に 1 端子ある.

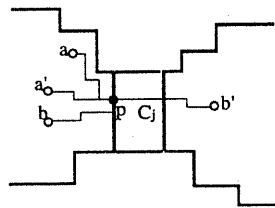


図 9: 場合 2

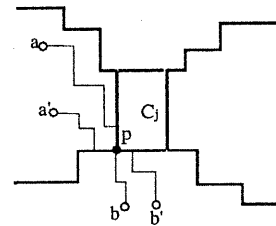


図 12: 場合 5

場合 3 交差領域の 1 つの領域に 3 端子あり, その隣の領域に 1 端子ある.

場合 4 交差領域の 1 つの領域に 2 端子あり, その向いの領域に 2 端子ある.

場合 5 交差領域の 1 つの領域に 2 端子あり, その隣の領域に 2 端子ある.

場合6 交差領域の1つの領域に2端子あり、その向いの領域に1端子あり、隣の領域に1端子ある。

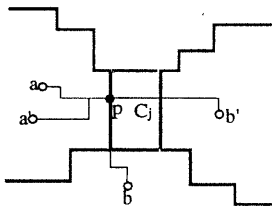


図 13: 場合 6

場合7 交差領域の1つの領域に2端子あり、その両隣の領域に各1端子づつある。

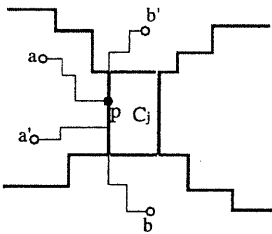


図 14: 場合 7

場合8 交差領域の4つの領域にそれぞれ1端子づつある。

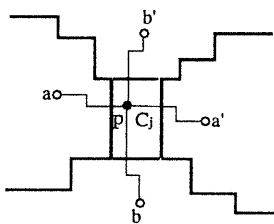


図 15: 場合 8

以下では全ての交差領域  $C_j$  について  $(P_a, P_b) \in P_j^*$  となる道の組を1組ずつ求める手法を示そう。これらの道の組で長さの和が最小のものが求めたいものである。共有点  $p$  と4端子を結んだ4本の道がそれぞれ最短路となっていることに注意すると各場合

について以下のように所望の道を見つけることができることがわかる。

場合1 一般性を失うことなく  $R\{x, x, x, x\}$  であるとする。この場合は各交差領域の左辺に4本の道の共有点があるとしてよい。従って前処理で求めた各端子からの最短路長を用いて  $x$  方向に平面スイープをし、各交差領域の左辺で4つの端子からの最短路の総和が最小になる点を求めればよい。

場合2 一般性を失うことなく  $R\{x, x, x, -x\}$  としてよい。この場合も場合1と同様に各交差領域の左辺に4本の道の共有点  $p$  があるとしてよい。従って場合1と同様に所望の道を求めることができる。

場合3 一般性を失うことなく  $R\{x, x, x, y\}$  としてよい。この場合は各交差領域の左辺上に4本の道の共有点があるとしてよい。また  $b'$  からの道は各交差領域の左下の点を通るとしてよい。従ってまず  $y$  方向に平面スイープを行なって  $b'$  から各交差領域の左下の点までの最短路長を求め、次に  $a, a', b$  からの3本の最短路長の総和にその点の  $y$  座標を加えたものが最小になる点を  $x$  方向の平面スイープにより求める。

場合4 一般性を失うことなく  $R\{x, x, -x, -x\}$  であるとする。この場合は各交差領域の左辺(または右辺)上に共有点があるとしてよい。従って場合1と同様である。

場合5 一般性を失うことなく  $R\{x, x, y, y\}$  としてよい。この場合は各交差領域の左下の点に共有点  $p$  をもつとしてよい。  $x$  方向に平面スイープをして4つの端子からの最短路の総和を求めればよい。

場合6 一般性を失うことなく  $R\{x, x, y, -x\}$  とする。この場合は各交差領域の左辺上に共有点  $p$  があるとしてよい。また場合3と同様に  $b$  からの道は各交差領域の左下の点を通るとしてよい。従って場合3と同様である。

場合7 一般性を失うことなく  $R\{x, x, y, -y\}$  とする。この場合は各交差領域の左辺上に共有点があるとしてよい。また  $b$  からの道は各交差領域の左下の点を通るとしてよく、  $b'$  からの道は各交差領域の左上の点を通るとしてよい。従ってまず、  $y$  方向の平面スイープによって、各交差領域の左辺を通る  $b-b'$  間の最短路を求め、次に  $x$  方向の平面スイープによって  $a-a'$  の最短路を求めればよい。

場合8 一般性を失うことなく  $R\{x, -x, y, -y\}$  としてよい。この場合は各交差領域を通る  $a-a'$  間の最短路と  $b-b'$  間の最短路の和を求めればよい。それぞれは  $x$  方向と  $y$  方向の平面スイープによって求められる。

アルゴリズム全体の計算時間で支配的な

のは定数回平面スイープを行なう部分にかかる時間である。従って全体の計算時間は  $O(n \log n)$  である。

#### 4 むすび

本文では交差領域のある最短非交差道を  $O((m+n) \log(m+n))$  時間で求めるアルゴリズムを与えた。端子対が3組以上の場合や障害物が軸平行多角形である場合、あるいは軸平行とは限らない一般の最短路を求める場合のアルゴリズムを与えることが今後の課題である。

#### 参考文献

- [1] D.t. Lee, C.F. Shen, C.D. Yang and C.K. Wong, "Non-crossing paths problems," Manuscript, Dept. of EECS, Northwestern Univ., 1991.
- [2] P.J. de Rezende, D.T. Lee and Y.F. Wu, "Rectilinear shortest paths with rectangular barriers," *Discrete & Computational Geometry*, pp.41-53, 4, 1989.