アルゴリズム 41−7
(1994. 9. 21)

節点がレベル付けされたグラフの最小枝交差描画問題に関する一考察

松本英幸†，佐々木整‡，梅田達也†，戸川望†，佐藤政生†，竹谷誠‡，大附辰夫†

†早稲田大学理工学部
〒169 東京都新宿区大久保3-4-1
Tel 03-3209-3211 ext.73-3422
Fax 03-3203-9184
E-mail matsu@ohtsuki.comm.waseda.ac.jp

‡拓殖大学工学部
〒193 東京都八王子市館町815-1
Tel 0426-65-1441
Fax 0426-64-2743
E-mail sasaki@info.takushoku-u.ac.jp

概要

グラフの節点がレベル付けされたグラフをマルチレベルグラフという．ここでは，マルチレベルグラフを平面上に描画する際に枝の交差数が最小になるように各レベルの節点順序を決定する問題を取り扱う．このとき，枝は直線分のみで描画されるものとする．この問題は非常に難しい問題のクラスに属することが知られており，これまで近似解法に関する研究に重点が置かれていた．本稿ではまず，この問題に関する従来の研究，諸定理を示す．そして，0-1整数線形計画問題として定式化し，二分決定グラフ（BDD）を用いて最適解を求める解法を提案する．最後に，提案手法を計算機に実装し実験を行った結果を報告する．

Theories and an Optimal Algorithm for Crossing Number Minimization Problem in Multi-level Graphs

Hideyuki MATSUMOTO†, Hitoshi SASAKI‡, Tatsuya UMEDA†, Nozomu TOGAWA†, Masao SATO†, Makoto TAKEYA‡, and Tatsuo OHTSUKI†

†School of Science and Engineering
Waseda University
3-4-1 Okubo, Shinjuku
Tokyo 169, Japan

‡Faculty of Engineering
Takushoku University
815-1 Tatemachi, Hachioji
Tokyo 193, Japan

Abstract

A graph is called a ***multi-level graph*** when each node of the graph is given a hierarchical level. The problem of minimizing the number of edge crossings in a multi-level graphs is discussed, where each edge is drawn with a line-segment. The problem is known to include NP-complete problems. In the first part of this paper, previous works are summarized and several theories are introduced. Then, the problem is formulated by 0-1 integer linear programming, and solved optimally using a binary decision diagram. Experimental results are also shown.

1　まえがき

節点がレベル付けされたグラフとは，2章で定義するように，グラフの節点の描画すべき位置（高さのレベルのみ）等の制約を与えたグラフである．これは，推測過程論に関連する文献集団における引用関係 [1]，CAD/CAM に関連する文献集団における引用関係 [2] をあらわす2段グラフ，大学のカリキュラムにおける科目間の影響構造 [3]，地震災害の波及構造 [4],[5]，教育工学におけるハイパーメディアにおけるナビゲーション支援 [6] 等で使用されている．このようなグラフは視覚的に認識しやすくするために，描画する際には枝交差数を少なくすることが望まれる．

しかしながら，この節点がレベル付けされたグラフの枝交差数を最小化する問題はグラフの規模が大きくなると実用的な時間内で最適解を得ることが難しい．従来の研究では近似解を与えるヒューリスティック手法の提案に関するものがほとんどである．

最適解を求める場合，使用する処理系に依存するが，グラフ規模がかなり小さなものに制限される．したがって，処理系の制限以上に大きなグラフを扱う場合，なんらかの方法でグラフの規模を縮小して各処理系で扱える規模にする必要がある．

本稿では以上のような観点から，節点がレベル付けされたグラフの最小枝交差描画問題に関する諸性質をまとめるとともに，この問題に対し最適解を与える手法を提案する．また，提案手法を計算機に実装し実験した結果について報告する．

2　問題定義

本章では，本稿で扱うグラフおよび問題の定義を行う．

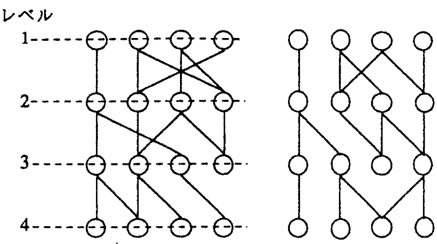
[定義 1] 以下の制約を満たす単純グラフをマルチレベルグラフと呼ぶ（図 1(a) 参照）．

- すべての節点はレベル付けされている（感覚的には，xy 平面上に描画される際に配置されるべき y 座標が指定されているということ）
- 同一レベル内の節点は重ならなければ，直線上で任意の順序に配置可能である
- レベルには上下関係が存在する
- レベル数は2以上である
- 枝は下位レベル（y 座標の大きい方）から上位レベル（y 座標の小さい方）に向かう有向枝である（図では枝の向きを省略する）
- 枝は直線分である

特にレベル数が k であるマルチレベルグラフを k レベルグラフと呼ぶ．

[定義 2] マルチレベルグラフを平面上に描画する際に，枝交差数が最小となるような各レベルの節点の並び順序を求める問題をマルチレベルグラフの枝交差最小描画問題と呼ぶ．

本稿では枝交差数が最小になる節点位置および枝交差数（最適解）を求める（図 1(b)）ことを目的とする．



(a)マルチレベルグラフ　(b)枝交差数最小化

図 1: マルチレベルグラフ

3　従来の研究および諸性質

本章では，マルチレベルグラフの最小枝交差描画問題に関する従来の研究および諸性質をまとめる．

3.1　計算複雑度

最小枝交差描画問題は2レベルに限定し，なおかつ，一方のレベルの節点の相対位置を固定しても NP-Complete の問題に帰着されることが知られている [7],[8][1]．これより，明らかにつぎの定理が導かれる．

[定理 1] マルチレベルグラフの最小枝交差描画問題は NP-complete の問題に帰着される．

このため，ヒューリスティック手法を中心に数多くの研究がなされてきた．以下にこれらをまとめる．

[1] 神戸大学の増田澄男先生にご紹介いただきました．

3.2 近似手法

- Warfield による研究 [9]
  2 レベルのグラフで，かつ節点数が 5 個以下のグラフを扱った手法である．枝交差数の計算に行列計算を利用している．この手法は一般のマルチレベルグラフへの適用は不十分であり，最適解は保証されない．

- 杉山らによる研究 [5],[10],[11][2]
  大規模なマルチレベルグラフに対し，比較的良い解を求めることができる．Warfield の行列表現方法を使用し，重心法と呼ばれる．行列の重心を利用した手法である．

- 赤堀らによる研究 [6]
  フィードバック枝数を考慮した手法である．フィードバック枝とは，上位レベルから下位レベルへ向かう枝（マルチグラフレベルで定義した枝と逆向きの枝）を意味する．このフィードバック枝数を削減した後，マルチレベルグラフの枝交差数を削減する．逐次計算法を提案し，局所最適解を求めている．

- 佐々木らによる研究 [12]
  シュミレーティッド・アニーリング法を利用した手法であり，比較的大きなグラフに対して有効である．

以上のような近似手法が提案されている．最適解を求める研究としては，2 レベルグラフで，かつ一方のレベルの節点順序を固定した場合に，節点数が 4 以下ならば最適解を保証する手法 [9] や 1 および 2 正則グラフ (1-regular and 2-regular graphs) ならば最適解が求められるという手法 [13][3]，2 レベルグラフに限定した上で Warfield の行列表現を用い整数計画問題として定式化した手法 [14] が知られているにすぎない．

3.3 諸定理

本節ではマルチレベルグラフの最小枝交差描画に関する定理，性質等の内容をまとめる．定理は，枝交差に関する定理とグラフの分解に関する定理の 2 つが考えられる．

[2]広島大学の渡辺敏正先生にご紹介いただきました．
[3]東京大学の今井浩先生にご紹介いただきました．

3.3.1 枝交差数に関する定理

以下の定理が成り立つことは明らかであろう．

[定理 2] 枝交差数は節点の相対位置で一意的に決定する．

[定理 2 の系] グラフの節点位置を絶対座標を用いて表しても問題の一般性を失わない．

ここで仮想節点を定義する．仮想節点とは枝の両端節点が隣接レベルにない枝と，その枝の両端節点間にあるレベルの交点に仮想的に設けられた節点をいう．

[定理 3] 仮想節点を導入しても，枝交差数は不変である（図 2）．

[証明] 節点数は増加するが，定理 2 からこの定理は自明． □

定理 3 より一般性を失うことなく，マルチグラフ上のすべての枝の両端節点は隣接レベルに属すると考えることができる．これにより，枝交差は隣接レベル毎に考えれば十分である．

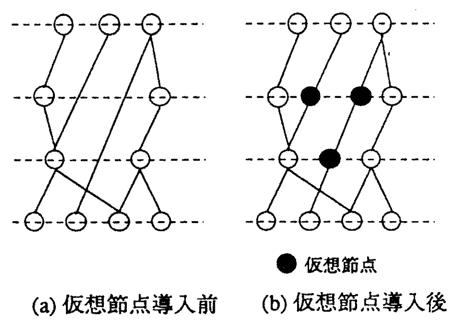


図 2: 仮想節点

[定理 4] 2 レベルグラフ G が交差数 0 で描画できるための必要十分条件は，G のパス幅が 1（本稿では単純グラフのみを扱うのでキャタピラーという木になる）であることである [15],[16][4]．

[定理 5] 一般には平面グラフであっても節点のレベルが指定されると交差なしでは描けないグラフが存在する．

例を図 3 に示す．

マルチレベルグラフの最小枝交差描画問題は定理 1 にあるように非常に難しい問題であるので，最適解を求めるためには問題の規模を縮小することが望ましい．その手段としてグラフを分解して個々の解を

[4]東京工業大学の上野修一先生にご紹介いただきました．

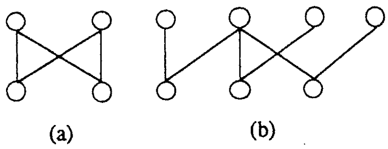


図 3: 枝交差なしで描けないグラフ

求め，再結合する方法が挙げられる．一般のグラフが平面描画可能か否かの判定は，与えられたグラフを 2 重連結成分に分解して，各 2 重連結成分が平面グラフであるか否かを判定することによって行うことが可能である．しかし，マルチレベルグラフの場合には，定理 5 のために 2 重連結成分に分解する戦略は適当ではない．そこで以下では，マルチレベルグラフの分解に関する定理を導入する．

3.3.2 グラフの分解に関する定理

ここでは，最適解が保証される分解定理をとりあげる．

[定理 6] 連結していないグラフは各連結成分ごとに最適解を求めれば，グラフ全体としての最適解が得られる．

[定理 7] あるレベルの 2 つ以下の節点（セパレータ）でグラフが図 4 のように，そのレベルで上下に分解されるとき，各々のグラフの最適解を求め再結合することにより，元のグラフの最適解を得ることができる．

[証明] 分解された各々のグラフにおいて最適解を求める．このとき，セパレータの相対順序が同じならばそのままグラフを再結合する，異なれば分解したグラフの一方を左右反転させ再結合を行う．左右反転させても枝交差数が不変であることは明らかであるので，グラフ全体としての最適解を求めることが可能である． □

[定理 7 の系 1] 全レベルに 2 節点以下のセパレータが存在すれば多項式時間で最適解が求まる．

[定理 8] ある隣接するレベル間において図 5 のように完全 2 部グラフを構成しており，かつ，このレベル間にその完全 2 部グラフ以外の枝が存在しないとする．完全 2 部グラフの枝をすべて削除することにより生成される 2 つのグラフの最適解を求め，ふたたび削除した枝で再結合することにより，元のグラフの最適解を得ることができる．

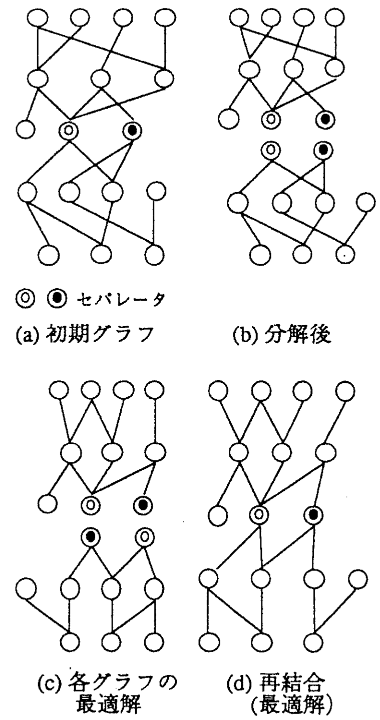


図 4: 2 節点以下のセパレータが存在するレベルにおけるマルチレベルグラフの上下分解

4 0-1 整数線形計画法による定式化と BDD を用いた解法

本章では 0-1 整数線形計画法による定式化について述べる．0-1 整数線形計画法とは，使用する変数のとる値が 0 もしくは 1 であるような整数変数（0-1 変数），すなわち論理変数を使用した整数線形計画法である．なお，グラフには既に仮想節点が導入されているものとする．

定理 2 の系より，節点の位置を整数座標で表すことができる．これは，マルチレベルグラフの各レベル毎に，そのレベル上の節点の個数分の番号付きのスロットを用意し，各スロットに節点を 1 個ずつ割り当てることに相当する（図6）．このとき，節点の整数座標はスロットに付けられたの番号（以下スロット番号と呼ぶ）に相当する．

制約条件は次の 2 つである．

（制約 1） 各節点は，スロットに 1 度ずつ割り当てられる．

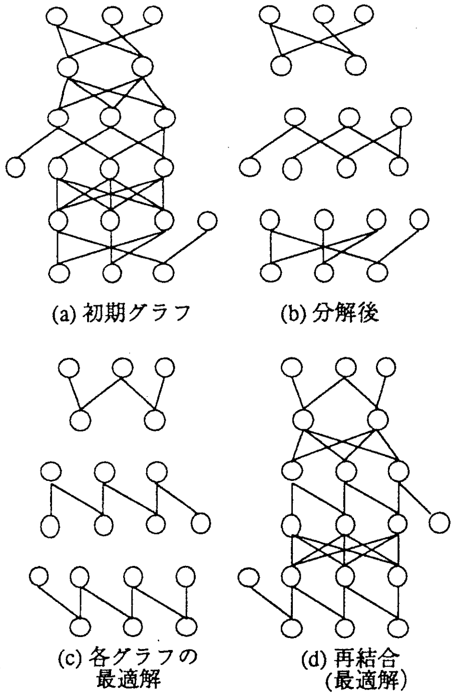


図 5: 完全 2 部グラフ部分におけるマルチレベルグラフの上下分解

(制約 2) 各スロットには 1 節点のみ割り当てる.

4.1 定義

C	レベル数
N_c	レベル c の節点数
$V_{c,n}$	レベル c における節点番号 n の節点
$P(V_{c,n})$	節点 $V_{c,n}$ が割り当てられたスロットのスロット番号
V_c	レベル c の節点の集合
$E_{c,l,u}$	節点 $V_{c,l}$ と節点 $V_{c+1,u}$ を結ぶ枝
E_c	レベル c と $c+1$ とを結ぶ枝の集合

節点 $V_{c,n}$ がスロットの s 番に割り当てられたかどうかを表す論理変数を $v_{c,n,s}$ と定義する. すなわち,

$$v_{c,n,s} = \begin{cases} 1 & \text{if } P(V_{c,n}) = s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

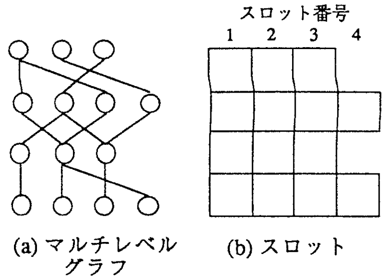


図 6: スロット

このとき, 論理変数の数は以下のようになる.

$$\sum_{c=1}^{C} N_c^2$$

4.2 枝の交差判定

枝の交差判定は各レベル毎に, 2 本の枝の組合せのすべてに対して行う. 交差判定を行う 2 本の枝を E_{c,l_1,u_1} および E_{c,l_2,u_2} とする. 2 つの枝の始点, 終点の節点が割り当てられたスロットのスロット番号を

$$s_1 = P(V_{c,l_1}),\ s_2 = P(V_{c,u_1})$$

$$s_3 = P(V_{c,l_2}),\ s_4 = P(V_{c,u_2})$$

とおく. このとき, 枝 E_{c,l_1,u_1}, E_{c,l_2,u_2} の交差判定は,

$$Cross(E_{c,l_1,u_1}, E_{c,l_2,u_2}) =$$

$$\begin{cases} (s_1 - s_3) \times (s_2 - s_4) < 0 \text{ (算術式表現)} \\ (s_1 < s_3)\ and\ (s_2 > s_4)\ or \\ \qquad (s_1 > s_3)\ and\ (s_2 < s_4) \\ \qquad \text{(論理式表現)} \end{cases}$$

としたとき, 枝交差があれば $Cross$ が 1, なければ 0 となる (図 7 参照).

全枝交差数は次式のようになる.

$$\sum_{c=1}^{C-1} \sum_{e_1,e_2 \in E_c\ and\ e_1 \neq e_2} Cross(e_1, e_2)$$

4.3 定式化

以上の論理変数を用いて, 上述の (制約 1) および (制約 2) はそれぞれ次のように書ける.

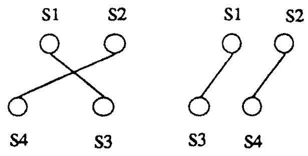


図 7: 枝交差判定

(制約 1) $\sum_{i=1}^{N_c} v_{c,n,i} = 1 \quad (\text{for } \forall c, n)$

(制約 2) $\sum_{i=1}^{N_c} v_{c,i,s} = 1 \quad (\text{for } \forall c, s)$

目的関数は全枝交差数の最小化として次式で表される．

$$Minimize \sum_{c=1}^{C-1} \sum_{e_1,e_2 \in E_c \, and \, e_1 \neq e_2} Cross(e_1, e_2)$$

4.4 論理変数の削減

前節までの定式化を行った場合，論理変数の個数は$\sum_{c=1}^{C} N_c^2$個であり，節点数が増加するのにともない論理変数の数も急激に増加する．本節では論理変数の数の削減を目指し，スロット番号を 2 進符号化することを考える．

$m = \lg N_c - 1$ とし，$V_{c,n}$に関して $m+1$ 個の論理変数を考える．

$$v_{c,n,b_0}, v_{c,n,b_1}, \cdots, v_{c,n,b_m}$$

これらの論理変数から $V_{c,n}$のスロット番号を次のように算出する．

$$P(V_{c,n}) = v_{c,n,b_0} * 2^0 + v_{c,n,b_1} * 2^1 + \cdots + v_{c,n,b_m} * 2^m$$

このようにすることによって，論理変数の数は

$$\sum_{c=1}^{C} (N_c \times \lg N_c)$$

に削減される．

上述の（制約 1），（制約 2）は次の (a),(b) として書くことができる．

(a) 節点のスロット番号が，そのレベルのスロット数以下の値である

(b) 同じレベル中の節点のスロット位置が互いに異なっている

本節で導入した論理変数を用いて，(a) は各レベル c のすべての節点に関して，

$$0 \leq P(V_{c,n}) < N_c \quad \text{for } \forall n \in V_c \, (c = 1, \cdots, C)$$

となる．(b) は各レベル c にある任意の 2 節点 n, n' の組合せすべてについて

$$P(V_{c,n}) \neq P(V_{c,n'})$$
$$\text{for } \forall n, n' \in V_c \, (n \neq n') \, (c = 1, \cdots, C)$$

と表される．

枝交差判定および目的関数は 4.2 節，4.3 節と同一である．

4.5 BDD を用いた解法

前節までに行った定式化で得られた制約式および目的関数を表す BDD（BinaryDecision Diagram：二分決定グラフ）[17] を構築し，最適解を求める．BDD を利用した解法の特長を列挙する．

- 最適解が保証される
- すべての可能解を陰に表現している
- BDD 上での最適解の探索が BDD の大きさに比例する時間で実行可能である

制約式および目的関数を表す BDD は，すべての最適解を陰に含んでいるため BDD を探索することによって最適解すべてを得ることができる．

BDD の構築には BEM II(an arithmetic Boolean Expression Munipulator) [18] を使用する[5]．BEM II は通常の論理式だけでなく算術論理式をも扱うことができる [18]．

制約式を F_c，目的関数を F_oとしたとき，$F_c \times F_o$ の算術的な最大値を BEM II によって算出する．これにより，制約式 F_cを満たし，かつ目的関数 F_oを最大化する解を求めることができる．上述の定式化では，目的関数の最小化を目指していたが，枝交差判定の際の 0,1 を交換する（つまり，枝交差があったとき $Cross = 0$，なかったとき $Cross = 1$ とする）ことによって，目的関数の最大化問題に変換することが可能である．したがって，BEM II により目的関数の最大値が求まれば，所望の枝交差数最小の解が得られる．

[5]NTT の湊真一氏にご提供いただきました．

5 計算機実験による評価

本章では計算機実験結果の報告および比較・検討を行う．なお，本章で扱うグラフは定理3の仮想節点の導入したグラフを定理6〜8で分解した個々のグラフとする（表1）．表1において，レベル毎の節点数はマルチレベルグラフの各レベルの節点数を表し，枝の総数はグラフ中のすべての枝数を表す．A,A' などレベル毎の節点数が同じグラフには，各グラフの最小枝交差数が0か否かという違いがある．

5.1 計算機実験

BDDによる0-1整数線形計画法および分枝限定法による計算機実験結果を報告する．なお，どちらの手法も最適解を保証する．実験にはSUN Sparc Station 2(28.5 MIPS)を使用した．

BDDによる0-1整数線形計画法は，(1) 論理変数の削減を行わず（4.1節の論理変数 $v_{c,n,s}$ を用いる），枝の交差判定を算術式表現で行った場合，(2) 論理変数の削減を行い（4.4節の論理変数 v_{c,n,b_m} を用いる），枝の交差判定を算術式表現で行った場合，(3) 同様に論理変数の削減を行い，枝の交差判定を論理式表現で行った場合の3通りについて試みた．

分枝限定法は，最適解の候補となる組合せのすべてを探索する手法である．解の探索において，ある候補の解を計算中に逐次その時点での暫定解より良い結果が得られないことが判明した時点で，その候補の計算を打ち切り，まだ探索していない他の候補の計算に移行する．この方法で得られる最適解は各グラフに対し1個である．

実験結果を表2に示し，グラフEの入力例と出力例を図8に示す．

5.2 比較・検討

実験結果（表2）より次のことがいえる．

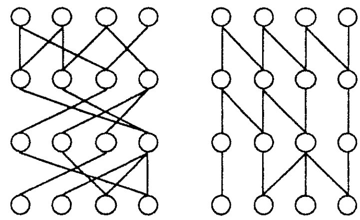
- 一般に，最小枝交差数が0のときは分枝限定法が有効である．ただし，最適解が極めて少ない場合は最適解に到達するまでに時間がかかることが多い．
- 分枝限定法は，レベル数，節点数の増加にともない実行時間が急激に増加する．
- BDDによる手法はレベル数，節点数が増加しても，実行時間の増加は比較的緩やかである．

表1: グラフの諸元

グラフ	レベル毎の節点数	枝の総数
A	3,3	3
A'	3,3	6
B	3,3,3	10
B'	3,3,3	11
C	3,3,3,3	15
C'	3,3,3,3	17
D	4,4,3,4	16
E	4,4,4,4	19
E'	4,4,4,4	24
F	3,3,3,3,3	18
G	4,4,4,4,4	18
H	3,3,3,3,3,3	17

- BDDによる手法は論理変数が増加するとBDDの節点数が急激に増加する傾向がある．
- BEM IIは算術式表現より論理式表現の方が処理が高速である．
- 枝交差数最小化問題は，マルチレベルグラフのレベル数の増加よりも各レベル中の節点数の増加による影響が強く，問題が困難になる．
- マルチレベルグラフの枝数が増加すると，処理時間が増加する傾向にある．

一般的には最小枝交差数が0となることは稀であるから，分枝限定法よりもBDDを使用した方が有効であるといえる．



(a) 初期グラフ　　(b) 最適解

図8: 実験結果（グラフE）

6 むすび

本稿ではマルチレベルグラフの枝交差最小描画問題に関する考察および計算機実験結果を報告した．この実験でBDDを利用した手法が分枝限定法より有効であることが分かった．しかしながら，最適解を実用時間で得られるのはマルチレベルグラフが小規

表 2: 計算機実験結果

グラフ	BDD を使用した整数線形計画法									分枝限定法	最小枝交差数
	変数の削減なし（算術式）			変数の削減あり（算術式）			変数の削減あり（論理式）				
	v	n	t	v	n	t	v	n	t	t	
A	18	128	0.810	12	75	0.500	12	75	0.360	0.010	0
A'	18	141	1.640	12	80	0.730	12	80	0.460	0.010	1
B	27	590	2.670	18	363	1.200	18	363	0.690	0.020	0
B'	27	468	3.000	18	281	1.330	18	281	0.870	0.060	1
C	36	1533	4.570	24	973	1.880	24	973	1.290	0.040	0
C'	36	1517	5.300	24	1019	2.500	24	1019	1.450	0.450	3
D	57	7422	12.800	30	3752	3.920	30	3752	3.040	21.060	1
E	64	28950	36.400	32	15207	12.330	32	15207	11.160	44.330	0
E'	64	29753	54.150	32	14439	20.500	32	14439	18.640	178.680	3
F	45	2019	4.410	30	1338	2.310	30	1338	1.450	1.320	1
G	90	38013	50.840	40	20225	21.150	40	20225	20.350	203.340	1
H	54	3524	7.670	36	2330	3.290	36	2330	2.610	9.000	1

v: 論理変数数, n: BDD の節点数, t: CPU time(sec)

模な場合に限られるため，さらにグラフ分解手法等に関して検討を行う．

謝辞

本研究の一部は，文部省科学研究費補助金奨励研究 A（No.06855045）の援助のもとに行われたものである．

参考文献

[1] 北川敏男，杉山公蔵：研究動向把握への情報学的接近の一方法，情報処理学会第 19 回全国講演論文集，pp.781-782(1979).

[2] N. Okino and S. Terashima: Automatic Clustering of Publications; Orfanization of CAD/CAM Literatures as an Example, Report of Project No. 220902 for the Ministry of Education of Japan(1978).

[3] 植木義一，添田喬，竹田宏: 学術情報システムの開発研究のための多変量解析と DEMA TE 手法の一応用，文部省科研費特定研究・情報システムの形成過程と学術情報の組織化，学術情報の利用体系に対するシステム科学的接近，昭 52 研究報告要旨集，pp.5-19(1978).

[4] 島津康男，平松敏祐: 地震災害と地震予知公表の Risk Assecessment，地震，Vol.31，No.2，pp.147-160(1978).

[5] 杉山公造，田川正二郎，戸田光彦: 多段グラフの交差数を減らす一手法（重心法），電子情報通信学会技術報告（信学技法），EC78-61，pp.1-12(1978).

[6] 小沢良男，赤堀侃司:フィードバック枝と交差数の同時減少とハイパーテキスト教材への応用，電子情報通信学会技術報告（信学技法），ET93-36，pp.53-60(1993-6).

[7] M. R. Garey and D. S. Johnson: Crossing Number is NP-Complete, SIAM J. Alg. Disc. Meth., Vol.4, pp.312-316(1983).

[8] P. Eades and B. MacKay and N. Wormald: An NP-Complete Crossing Number Problem for Bipartite Graphs, Technical Report, No.69, Dept. of Computer Science, Univ. of Queensland(1985).

[9] J. N. Warfield: Crossing theory and hierarchy mapping, IEEE Trans. SMC, Vol.1, SMC-7, No.7, pp.505-523(1977).

[10] 杉山公造，田川生二郎，戸田光彦: 構造情報の視覚表現に関する研究–階層構造モデルの自動平面描画アルゴリズムとその応用，国際情報社会科学研究所研究報告，富士通，Vol.2(1981).

[11] 杉山公造: グラフ自動描画法とその応用–ビジュアルヒューマンインターフェース–，計測自動制御学会(1993).

[12] 佐々木整，竹谷誠: シュミレーティッド・アニーリング法を用いた階層構造グラフの交差数減少化手法，電子情報通信学会技術報告（信学技法），ET93，No.541，pp.85-92(1994).

[13] E. Mäkinen: On Drawing Regular Bipartite Graphs, International Journal of Computer Mathematics, 43, pp.39-43(1992).

[14] S. Tagawa, M. Toda, and K. Sugiyama: Optimization Methods for Reducing the Number of Crossings in Multi-level Digraphs, Int. Inst. for Advanced Study of Soc. Inf. Sci., Fujitsu Ltd., Res. Rep., No.12, pp.1-20(1981).

[15] 上野修一: グラフのパス幅に関連する最近の話題，藤重編: 離散構造とアルゴリズム I，5 章，近代科学社(1992).

[16] A. Takahashi, S. Ueno, and Y. Kajitani: Minimal Acyclic Forbidden Minors for the Family of Graphs with Bounded Path-Width, Discrete Mathematics, 127, pp.293-304(1994).

[17] 藤田昌宏，佐藤政生（編）:BDD（二分決定グラフ），情報処理学会誌 5 月号，pp.584-630(1993).

[18] S. Minato: BEM II: An Arithmetic Boolean Expression Manipulator Using BDDs, IEICE Trans. Funadamentals, Vol.E76-A, No.10, pp.1721-1729 (October 1993).