

1ビット・セルラオートマトンにおける 最適時間一斉射撃アルゴリズムの実現

西村 順[†]

曾我部 崇^{††}

梅尾 博司^{†††}

概要 n 個のセルからなるセル空間の同期を $2n - 2$ ステップの最適時間で実現するセルラ・オートマトン (CA) は従来から数多く提案されている。これらのセルラ・オートマトンにおいて、隣接するセル間の 1 ステップ当たりの通信量は $O(1)$ ビットであるが、セル間通信量は有限状態記述というオートマトンの定義には明示的に現れず、セル間通信量に関する研究はこれまであまりなされていない。本稿では、1 ステップあたりのセル間通信量を 1 ビットに制限したセルラ・オートマトン・モデル CA1-bit を定義し、CA1-bit 上で最適時間で動作する一斉射撃アルゴリズムを提案する。我々のアルゴリズムは、すでに正当性が示されている Waksman のアルゴリズム [7,8] (セル間通信量は $O(1)$ ビットである) をベースとしており、セルの内部状態数は 78、遷移規則数は 208 である。

A Realization of Optimum-Time Firing Squad Synchronization Algorithm on 1-Bit Cellular Automaton

Jun NISHIMURA[†], Takashi SOGABE^{††}, and Hiroshi UMEO^{†††}

Abstract In the long history of the study of cellular automata, the amounts of bit-information exchanged at one step between neighboring cells have been assumed to be $O(1)$ -bit. In this paper we introduce a new class of cellular automata, CA1-bit, whose inter-cell communication is restricted to 1-bit and propose an optimum-time $(2n - 2)$ -step firing squad synchronization algorithms for n cells on CA1-bit. The number of internal states in each cell is 78 and the total number of transition rules is 208. The algorithm we propose is based on Waksman's optimum-time algorithm which has been shown valid for any n .

1 はじめに

一斉射撃問題 [1]-[8] とは以下のように定義される。 n 個のセルからなる 1 次元セル列を考え、左端のセルを将軍、残りのセルを兵士と呼ぶ。時刻 $t = 0$ に将軍が「準備が出来たら射撃せよ」という命令を出した後、未来のある時刻に全てのセルが一斉にひとつの状態へ遷移するまでの遷移規則を定める問題である。この問題は、1957 年 J. Myhill によって提案され、1964 年、E. F. Moore[4] によって広く知らされた。最初にこの問題の解を示したのは J. McCarthy と M. Minsky[3] で、彼らのアルゴリズムは n 個のセル列を約 $3n$ ステップ、13 個の内部状態を用いて同期させるものであった。以降の研究は所要時間と内部状態数を減らす方向に進み、1966 年、A. Waksman[8] によって内部状態数 16、 $2n - 2$ ステップの最適時間で同期させるアルゴリズムが発表された。彼のアルゴリズムは、E. Goto のアルゴリズムと並び世界で最初に発表された最適時間一斉射撃アルゴリズムであったが、遷移規則に誤りを含んでいたためセル数 n の値によって正しく同期がとられない場合があった。後にその遷移規則に含まれる誤りは、H. Umeo, T. Sogabe, Y. Nomura ら [7] によって全て修正され、その正当性を証明されている。そして、状態数を削減したアルゴリズムの設計は続けられ、1967 年 R. Balzer[1] によって、状態数 8 のアルゴリズム、1987 年 J. Mazoyer によって状態数 6 のアルゴリズムが提案され現在に至っている。

また、セルラ・オートマトン (Cellular Automaton 以下 CA) の機能に制限を加えた計算モデル上での一斉射撃アルゴリズムの研究も行われている。Mazoyer[2]、Umeo[6] は、従来の研究では考えられていなかったセル間通信量に着目し、隣接する 2 つのセル間の通信量を双方向 1 ビットに制限する CA モデル CA1-bit を提案した。Mazoyer[2] は、この CA1-bit 上で一斉射撃問題を考察し、セル間通信量を 1 ビットに制限して

[†] 株式会社 メガチップス MegaChips Co., LTD.

^{††} 株式会社 インターネットイニシアティブ Internet Initiative Japan Inc.,

^{†††} 大阪電気通信大学 総合情報学部 情報工学科 大阪電気通信大学 大学院 情報工学専攻 Osaka Electro-Communication Univ., Faculty of Information Science and Technology, Osaka Electro-Communication Univ., Graduate School of Engineering

も最適時間で動作する状態数 56 の一斉射撃アルゴリズムを示した。しかし，このアルゴリズムの正当性は論文において示されず，ある自然数 n_0 以下の自然数について正しく同期することをコンピュータ・シミュレーションによって確認されているに過ぎない。従って，現在 CA1-bit 上でその正当性が明らかである一斉射撃アルゴリズムは存在しない。

本稿では，CA1-bit 上で最適時間一斉射撃アルゴリズムを設計しその正当性を証明する。我々のアルゴリズムは，従来の CA 上ですでに正当性が示されている Waksman のアルゴリズム [7,8](セル間通信量は $O(1)$ ビットである) をベースにしたもので，セルの内部状態数は 78，遷移規則数は 208 である。

2 CA および CA1-bit の定義

CA とは，セルと呼ばれる有限オートマトンを通信線によって一次元アレイ状に多数接続したものである。CA を構成するセルは全て同一構造であり，時刻 t における任意のセルは左右の隣接セルの状態と自身の状態を参照し，あらかじめ定められた規則に従って次の自身の状態を決定する。このセルの動作を状態遷移と呼び，全てのセルの状態遷移は同期して行われる。ここで，1 回の状態遷移にかかる単位時間を 1 ステップと定める。

これに対して CA1-bit を構成するセルは，隣接セルから 1 ステップごとに 0 または 1 の 2 種類の情報しか受け取れない。両端のセルはあらかじめ両端に位置していることを認識した特別な構造とし，その他のセルはすべて同一構造であるとする。図 1 はセル間での通信が行われている様子を示す。図中の矢印は 1 の情報が矢印の指し示す方向に送られたことを表し，矢印のない場合は 0 が送られたことを表す。

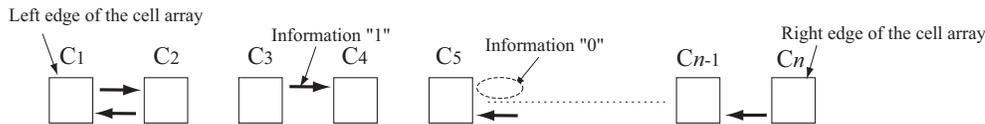


図 1 CA1-bit の状態遷移

3 Waksman のアルゴリズム

概要

図 2(i) に従来の CA 上の最適時間一斉射撃アルゴリズムである Waksman の解を示す。この図は 1 次元 CA(以下 CA) の内部状態の遷移を上から下へ時系列順に並べたもので，水平方向はセル空間，垂直方向は時間軸を表す。時刻 $t = 0$ 時の CA は初期状態，時刻 $t = 2n - 2$ 時の CA は射撃状態を示す。

n 個のセルを C_1, C_2, \dots, C_n と表す。時刻 $t = 0$ 時における C_1 は将軍状態， C_2, C_3, \dots, C_n は静止状態(兵士)である。ここで， C_1 に配置される将軍を G_0 ， G_0 が管理する n 個のセル列を S_0 ， S_0 上のセル数を $|S_0|$ と表記する。 G_0 は，時刻 $t = 0$ 時に傾き $\frac{1}{1}$ の a 信号，傾き $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{15}, \dots, \frac{1}{2^k-1}, \dots$ (k は $2 \leq k \leq \lfloor \log_2(2n-2) \rfloor$ を満たす自然数) の b 波群 $\{b_2, b_3, b_4, \dots, b_k, \dots\}$ を送出する。信号もしくは波とは，CA 上の連続するセル上にある特定の内部状態の集合が移動する様子を表現したもので，傾きとはそれが移動する速さを右向きを正として表したものである。

a 信号は時刻 $t = n - 1$ 時に C_n 上で将軍 G_1 を生成させた後反転し，左方向に傾き $-\frac{1}{1}$ で進行する。そして，後続の $b_2, b_3, b_4, \dots, b_k$ 波と次々に交差し，その交差点に将軍 $G_2, G_3, G_4, \dots, G_k$ を次々に出現させる。セル列 S_0 は，新たに生成した将軍 $G_1, G_2, G_3, \dots, G_k$ により，部分セル列 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k$ に分割される。これらの将軍は，それぞれの担当する部分セル列を G_0 と同じ方法で同期させる。以上の機構によってセル空間を再帰的に均等に分割する。なお，将軍 G_i (i は 2 以上の自然数) の位置するセルを C_{G_i} とすると，部分セル列 $C_1 C_{G_i-1}$ を分割して出現する 2 つの部分セル列 $C_1 C_{G_i}$ および $C_{G_i} C_{G_i-1}$ は常に同じセル数に分けられる。

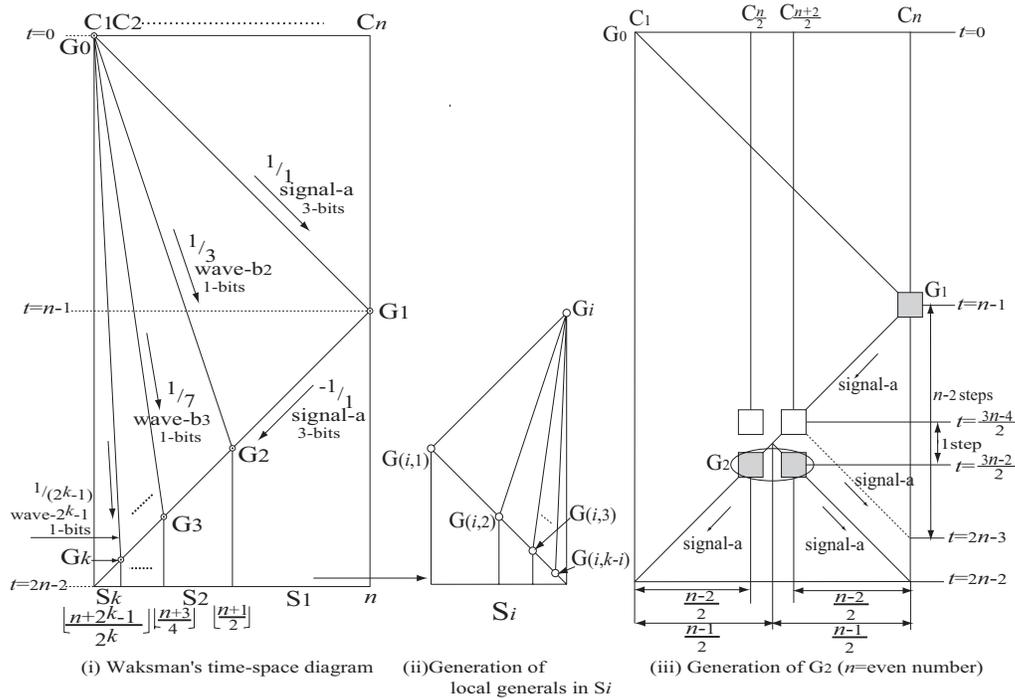


図 2 Waksman のアルゴリズムの時間空間図式

将軍 $G_2, G_3, G_4, \dots, G_k$ の生成

G_i (i は, $2 \leq i \leq k$ を満たす自然数) は, S_{i-2} を等分割する位置に生成される. この時, $|S_{i-2}|$ が奇数であれば G_i は 1 個のセルで表現され, $|S_{i-2}|$ が偶数であれば G_i は 2 個のセルで表現される. $|S_{i-2}|$ の奇偶は, 将軍 G_{i-1} が生成された時に決定される. そして, この奇偶情報は, G_{i-1} より送出され, 左向きに進行する a 信号によって G_i の生成地点まで伝達される. 以上より, G_i の生成には $|S_{i-2}|$ の奇偶情報を必要とすることがわかる.

次に, 図 2(iii) は, n が偶数である時に G_2 を生成させる時刻および位置を示したものである. n つまり $|S_0|$ が偶数の時, S_0 は 2 つの部分セル列 $C_1 C_{\frac{n}{2}}$ および $C_{\frac{n+2}{2}} C_n$ に等分割される. 部分セル列 $C_1 C_{\frac{n}{2}}$ に含まれる G_2 は $\frac{n}{2}$ に位置し, 部分セル列 $C_{\frac{n+2}{2}} C_n$ に含まれる G_2 は $\frac{n+2}{2}$ 上に位置する. このとき, 2 つの G_2 がそれぞれ同期させる部分セル列のサイズはともに $\frac{n-2}{2}$ となり, S_0 を等分割したサイズ $\frac{n-1}{2}$ より $\frac{1}{2}$ 小さくなる. 従って, C_n に G_1 が生成された時刻 $t = n - 1$ 時に部分セル列 $C_{\frac{n+2}{2}} C_n$ の同期を開始すると, 時刻 $t = \frac{3n-4}{2}$ 時に a 信号は $C_{\frac{n+2}{2}}$ で反射し, 時刻 $t = 2n - 3$ 時に C_n に到着することになる. これに対して, 部分セル列 $C_1 C_{\frac{n}{2}}$ において, $C_{\frac{n}{2}}$ に a 信号が到着するのは時刻 $t = \frac{3n-2}{2}$ 時であり, a 信号が C_1 に到着するのは時刻 $t = 2n - 2$ 時なので, これら 2 つの部分セル列間で同期時刻がずれてしまう.

Waksman はこの 2 つの部分セル間の同期時刻のずれを解決するために, $C_{\frac{n+2}{2}} C_n$ の同期を 1 ステップ遅らせて開始させ, C_n に a 信号が到着する時刻を $t = 2n - 2$ 時になるよう調節している. これを遅れの処理と呼び, 偶数個である部分セル列を分割する時にこの処理を加えることによって, 分割後の 2 つの部分セル列の同期をとる.

では, この処理に必要な情報を検討する. まず, 任意の将軍 G_i が C_m 上に生成された時に, G_i に対して遅れの処理を行わせるには, 部分セル列 $C_1 C_m$ の奇偶情報を調べればよい. ここで, 部分セル列 $C_1 C_m$ のサイズは $|S_{i-1}|$ となるので, G_i を生成させる時に $|S_{i-1}|$ の奇偶情報を取得できればよい. よって, G_i に

対して遅れの処理を行わせるかどうかを決定するために $|S_{i-1}|$ の奇偶情報を必要とする．この情報は G_{i-1} より左向きに進行する a 信号によってカウントされ， G_i の生成地点にて提供される．

以上より，Waksman のアルゴリズムにおいて，任意の将軍 G_i を生成するためには， $|S_{i-2}|$ ， $|S_{i-1}|$ の 2 ビットの奇偶情報を必要とすることがわかる．

4 CA1-bit 上のアルゴリズム

以上で述べた Waksman のアルゴリズムをベースに CA1-bit 上での最適時間一斉射撃アルゴリズムの実装手法を示す．Waksman のアルゴリズムにおいて任意の将軍 G_i を生成するために $|S_{i-2}|$ および $|S_{i-1}|$ を必要とすることは既に述べたが，Waksman のアルゴリズムでは，これらの情報を取得する機構および伝達する機構を実装することによって将軍を生成することが可能であった．しかし，CA1-bit 上では，これらの情報を取得できたとしてもセル間通信量の制限で G_i の生成地点まで伝達させることはできない．従って， G_i の生成地点より離れたところから伝達するのではなく， G_i の生成地点にてこれらの情報を取得する方法を検討する．

$|S_{i-2}|$ の奇偶情報の取得機構

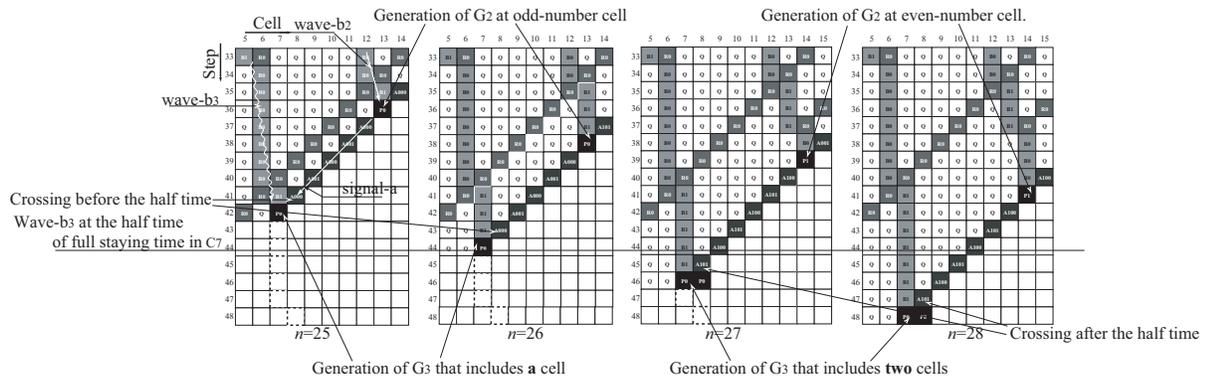


図 3 Waksman のアルゴリズムにおける G_2 と G_3 の関係

図 3 に示す Waksman のアルゴリズムの出力結果の一部分を抽出したものは， G_3 が C_7 において生成される状況を示したものである． n は全体のセル数を意味する． G_3 は， G_2 の存在するセルが G_0 から数えて奇数番目にあればひとつのセルで表現され， G_2 が偶数番目のセルにあればふたつのセルで表現される．ここで， G_3 を生成させる時の傾き $\frac{1}{7}$ の b_3 波に着目する． b_3 波が C_7 に到着してから最高滞在時間の半分となる 4 ステップ目を境に C_7 の滞在時間が半分未満で a 信号が到着した場合に G_3 は 1 個のセルで表現され，滞在時間が半分を経過してから a 信号が到着した場合に G_3 は 2 個のセルで表現されていることがわかる．つまり，この規則性を使用して G_3 を表現させるセルの個数を把握することができる．

証明

G_0 より $i-1$ 番目に送出される波を b_i 波とし， b_i 波の滞するセルを C_{m_i} (m_i は 2 以上の自然数) とする． b_i 波は C_{m_i} 上に，時刻 $t = (2^i - 1)m_i - 2^i$ 時に出現し， $2^i - 1$ ステップ C_{m_i} 上に滞する．この滞在時間を Δt_i ($1 \leq \Delta t_i \leq 2^i - 1$) と定義すると，

b_i 波が C_{m_i} 上に滞在する時刻は以下の式で表すことができる．

$$t = (2^i - 1)m_i - 2^i - 1 + \Delta t_i \quad (1)$$

また， C_{m_i} 上に滞在する b_i 波と交差する a 信号は時刻 t 時に C_{m_i} の右隣の C_{m_i+1} に到着する．その式は

$$t = -m_i + 2n - 2 \quad (2)$$

ここで，式 (1)(2) より，以下の式が得られる．

$$2^i m_i = 2n + 2^i - 1 - \Delta t_i (1 \leq \Delta t_i \leq 2^i - 1) \quad (3)$$

ここで， m_i が式 (3) を満たす正整数値を取るため， Δt_i は奇数でなければならない．

次に， G_0 より $i - 2$ 番目に送出される波を b_{i-2} 波においても，式 (3) と同様に以下の式を得る．

$$2^{i-1} m_{i-1} = 2n + 2^{i-1} - 1 - \Delta t_{i-1} (m_i \text{ は } 2 \text{ 以上の自然数}, 1 \leq \Delta t_{i-1} \leq 2^{i-1} - 1) \quad (4)$$

ここで，式 (3) および式 (4) の差を求める (式 (5)) ．

$$2^i \cdot m_i - 2^{i-1} \cdot m_{i-1} = 2^i - 2^{i-1} - \Delta t_i + \Delta t_{i-1} \quad (5)$$

このとき， Δt_i および Δt_{i-1} には以下の関係が成立する．

$$(i) C_{m_{i-1}} \text{ が } G_0 \text{ から数えて奇数番目のセルであれば } \Delta t_i = \Delta t_{i-1} \text{ である．} \quad (6)$$

$$(ii) C_{m_{i-1}} \text{ が } G_0 \text{ から数えて偶数番目のセルであれば } \Delta t_i = \Delta t_{i-1} + 2^{i-1} \text{ である．} \quad (7)$$

よって，式 (8) および (9) を得る．

m_{i-1} が奇数の時，

$$m_i = \frac{m_{i-1} + 1}{2} \quad (8)$$

m_{i-1} が偶数の時，

$$m_i = \frac{m_{i-1}}{2} \quad (9)$$

以上より， b_i 波が C_{m_i} 上に滞在している時，a 信号が C_{m_i} の隣のセルである C_{m_i+1} に到着するタイミングによって，直前に生成された将軍 G_{i-1} の位置する $C_{m_{i-1}}$ の奇偶を判定できる．このことは，部分セル列 $C_1 C_{m_{i-1}}$ の奇偶を判定したことになり，ゆえに，部分セル列 $C_1 C_{m_{i-1}}$ と同じサイズである $|S_{i-2}|$ の奇偶を取得したことを意味する．よって， C_{m_i} 上において， b_i 波の前半部分と a 信号が交差した時， $|S_{i-2}|$ は奇数であり，将軍を 1 つのセルで表現する．これに対して b_i 波の後半部分と a 信号が交差した時は， $|S_{i-2}|$ は偶数であり，将軍を 2 つのセルで表現する． b_i 波の前半と後半の構造を切り替えるトリガーがあれば，CA1-bit 上においても，将軍 G_i の生成に必要な $|S_{i-2}|$ の奇偶情報を取得することができる．このトリガーの機構は b 波群の設計時に検討する．

$|S_{i-1}|$ の奇偶情報の取得機構

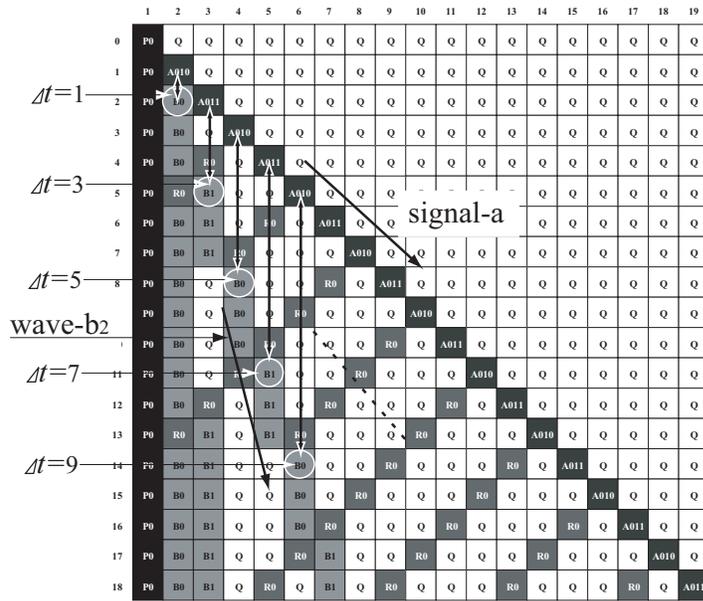


図 4 奇偶情報の取得

CA1-bit における b_i 波は、においても a 信号と同様にセル間で伝達できる情報は進行方向を示す 1 ビットしかない。しかしながら、 b_i 波は少なくとも 3 ステップはひとつのセルに滞在し続ける。つまり、個々のセル内のローカルカウンタを使用して $|S_{i-1}|$ の奇偶をカウントする手法を検討する。

まず、 G_0 より送出される a 信号および b_2 波に着目する。a 信号は C_m (m は 2 以上の自然数) 上に時刻 $t = m - 1$ 時に到着し、 b_2 波は時刻 $t = 3m - 4$ 時に到着する。ここで、任意のセル C_m 上を a 信号が通過してから、 b_2 波が来るまでの時間 Δt は、

$$\Delta t = 2m - 3 \tag{10}$$

となる。このとき、 Δt を 4 で割った余りは、

$$m = 2x \text{ の時 } \Delta t \bmod 4 = 4x - 3 = 4(x - 1) + 1 \tag{11}$$

$$m = 2x + 1 \text{ の時 } \Delta t \bmod 4 = 4x - 1 = 4(x - 1) + 3 \tag{12}$$

となる。よってセル C_m 上において、a 信号の通過後に 4 種類の内部状態を用いてローカルカウンタを構成させると、 b_2 波の到着によるトリガーで G_0 から数えた m の奇偶を決定できる。この機構によって決定された m の奇偶情報は、 C_m に左向きに a 信号が到着するまで保持され、 C_m を通過する b 波群に提供される。よって、任意の b_i 波は C_m 上において、 $|S_{i-1}|$ の奇偶情報を取得できる。

以上のようにして、CA1-bit 上では、通信による情報伝達ではなく個々のセル内でのローカルカウンタを用いて、將軍生成に必要な 1 ビットの情報を決定できる。

結果

さて、すでに述べたように、Waksman のアルゴリズムを実現するのに必要である 2 ビットの情報を取得する手段は決定できたが、回避できない問題がある。Waksman のアルゴリズムでは、b 波群に対する a 信号および r 信号の到着タイミングが同じなので、この機構をそのまま CA1-bit 上に実装しても、b 波群がこれら 2 つの信号を識別できない。ここで、a 信号、b 波群および将軍の生成タイミングは Waksman のアルゴリズムと同じだが、r 信号の生成タイミングを 1 ステップ早めた変更版 Waksman のアルゴリズム (図 6) を作成した。それをベースに CA1-bit 上の一斉射撃アルゴリズムを設計した。図 7 は我々が設計したアルゴリズムの実行結果である。

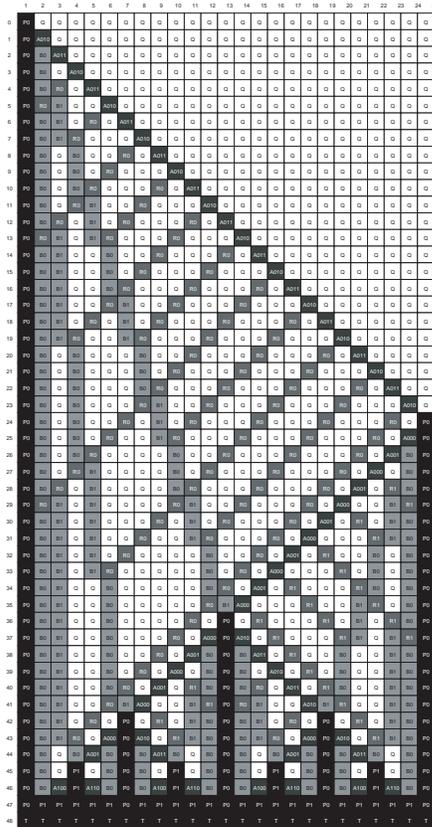


図 5 Waksman のアルゴリズム ($n = 25$)

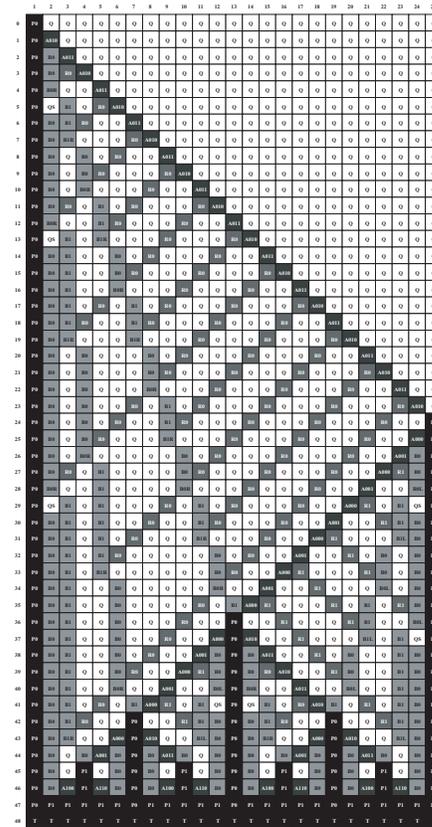


図 6 変更版 Waksman のアルゴリズム ($n = 25$)

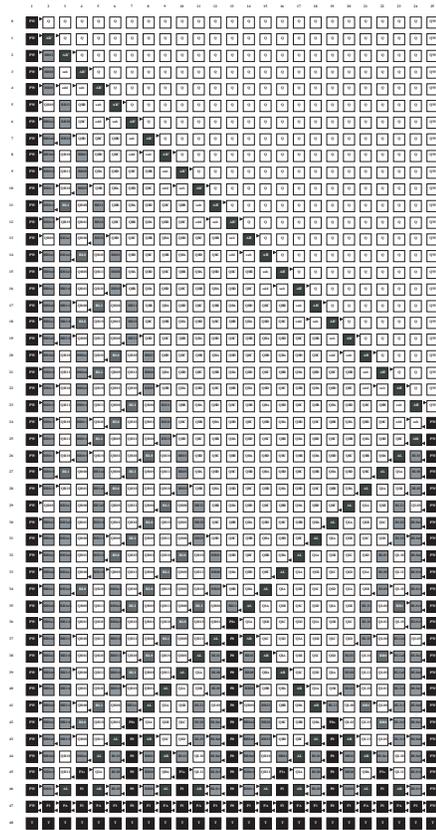


図 7 CA1-bit 上での一斉射撃アルゴリズム ($n = 25$)

図 7 から , CA1-bit 上でも , b 波群および各将軍状態が , 図 6 と同じタイミングで生成されている様子が伺える .

5 おわりに

本稿では , CA1-bit 上で一斉射撃問題を考察し , セル間通信量を 1 ビットに制限したモデル上でも n 個のセルからなるセル空間の同期を $2n - 2$ ステップの最適時間で実現できることを明らかにした . セルの内部状態数は 78 , 遷移規則数は 208 である .

参考文献

- [1] R. Balzer, "An 8-state minimal time solution to the firing squad synchronization problem", Information and Control, 10, pp. 22-42, (1967).
- [2] J. Mazoyer, "On optimal solution to the firing squad synchronization problem" , Theoretical Computer Science, 168, pp. 367-404,(1996).
- [3] M. Minsky, "Computation:Finite and infinite machines", Prentice Hall, pp. 28-29, (1967).
- [4] E. F. Moore, "The firing squad synchronization problem", Sequential Machines(E. F. Moore), Selected Papers, Addison-Wesley Reading, MA., pp. 213-214, (1964).
- [5] 西村, 曾我部, 梅尾, "最適時間一斉射撃アルゴリズムの 1 ビットセルラ・オートマトン上での実現 ", 情報処理学会, 数理モデル化と問題解決 32-12 , pp.41-44 , (2000)
- [6] H. Umeo," A design of cellular algorithms for 1-bit inter-cell communications and related cellular algorithms", Proc. of MCU'98, Vol. 1, pp. 210-227, (1998).
- [7] H. Umeo, T. Sogabe, and Y. Nomura, " Correction, Optimization and Verification of Transition Rule Set for Waksman's Firing Squad Synchronization Algorithm", Proc. of Fourth International Conference on Cellular Automata for Research and Industry, Karlsruhe, 4-6, October, (2000).
- [8] A. Waksman, " An optimum solution to the firing squad synchronization problem", Information and Control, 9, pp. 66-78, (1966).