2004－AL－94　(16)
2004／3／19

Voronoi 図に基づく補間法の大域的連続性の向上

日吉 久礎
群馬大学工学部情報工学科
hiyoshi@ail.cs.gunma-u.ac.jp

杉原 厚吉
東京大学大学院情報理工学系研究科
数理情報学専攻
sugihara@mist.i.u-tokyo.ac.jp

概要. 自然近傍法と呼ばれる Voronoi 図に基づく補間法は, 不規則に配置された多次元データの補間法として有望な手法である. しかしながら, 従来は大域的に C^1 級の補間公式しか知られていなかった. 本研究では, 大域的に C^2 級の補間公式を提案し, 陽な形式で書き表す. 補間公式の入力として与えられるデータが, 3 次多項式からとられたものである場合, 提案する補間公式は, もとの多項式を正確に復元する. また, 背景にあるアイデアを拡張することにより, 任意の非負整数 k に対して大域的に C^k 級の補間公式を得ることもできる. したがって, 本研究により, 自然近傍補間の連続性に関する従来までの制限が取り除かれ, 自然近傍補間は新たな研究段階へ入ることとなる.

Improving the Global Continuity of Voronoi-Based Interpolation

Hisamoto HIYOSHI
Department of Computer Science,
Faculty of Engineering,
Gunma University.
hiyoshi@ail.cs.gunma-u.ac.jp

Kokichi SUGIHARA
Department of Mathematical Informatics,
Graduate School of Information Science and Technology, University of Tokyo
sugihara@mist.i.u-tokyo.ac.jp

Abstract. An interpolation method based on Voronoi diagrams, called a natural neighbor interpolation, is a potential interpolation method for multivariate data. However, only globally C^1 interpolants have been known so far. In this paper, we propose a globally C^2 interpolant, and write it in an explicit form. When data are supplied from a third-degree polynomial, the proposed interpolant can reproduce it exactly. In addition, by extending the underlying idea, for an arbitrary non-negative integer k, we can obtain a globally C^k interpolant as well. Thus this paper gets rid of a limitation on the continuity of natural neighbor interpolation, and leads it to a new research stage.

1　はじめに

補間は, 科学や工学において非常に重要な計算技術である. 例えば, 偏微分方程式を計算機で解く際には, 関数を表現するために離散化が必要となる. このようなとき, 何らかの補間法によって関数を離散的に近似表現することが行われる. このため, さまざまな補間法が, 1 次元・多次元を問わず今日まで提案・研究され, かつ実践でも利用されてきた.

多次元データに対する補間の場合, 有限要素法 (FEM) が補間法として今日広く利用されている (有限要素法については, 例えば [7] を参照). 一方, 自然近傍補間と呼ばれる Voronoi 図 (Voronoi 図については, 例えば [6] を参照) に基づく補間法もあり, 将来性のある補間法として研究されている.

まず, 両者の違いについて簡単に述べる. 関数の値が未知である点 (以下, ターゲット点と呼ぶ) において, 関数の値を見積もる状況を考える. 有限要素法では, あらかじめ解析の対象となる領域を, データ点 (関数値が既知である点) を頂点とする三角形分割な

どのメッシュに分割しておく．ターゲット点の値を見積もるときには，このメッシュにおいて，ターゲット点を含むような三角形などのセルをまず求める．次に，得られたセルにおいて線形補間などの補間法によって，ターゲット点における値を見積もる．ここで，補間の際に使用されるデータの数が，ターゲット点の位置によらず一定であることに注意されたい．

一方自然近傍補間では，あらかじめ，データ点を母点とする Voronoi 図を生成しておく．ターゲット点における値を見積もるときには，この Voronoi 図にターゲット点を母点として追加し，Voronoi 図を更新する．次に，母点の Voronoi 領域と境界を接するような Voronoi 領域を作るデータ点を求める．次に，得られたデータ点における値をもとに，何らかの補間公式によってターゲット点における値を見積もる．このように，自然近傍法は，ターゲット点のまわりのデータ点の配置に応じて，補間に用いるデータ点の数が変化することが，有限要素法と比べて際だった特徴となる．この特徴が，自然近傍法の名前の由来である．

自然近傍法を実践的に使用するためには，いくつかの困難を克服しなければならない．自然近傍法の困難の一つに，今まで知られている補間公式の連続性を任意に選ぶことができないことが挙げられる．例えば，Sibson の補間公式 [9] は，C^0 級であるが，C^1 級でない．このため筆者らは，自然近傍法の連続性を向上させる研究を行ってきた．筆者らの以前の研究 [4,5] では，データ点を除いて C^k 級 (k は任意の非負整数) であるような補間公式を提案した．これまでの自然近傍法の連続性の向上に関する研究の歴史を，2 節で述べる．

本稿では更に，データ点も含めて大域的に C^k 級であるような補間公式を提案する．基本的なアイデアは，Farin [3] に由来する．Farin は，Bézier 曲面の理論を自然近傍補間に導入し，大域的に C^1 級である補間公式を提案した．本稿ではこのアイデアを拡張し，より高次の大域的連続性を持つ補間公式を提案する．

本稿では，議論を容易にするために，考える空間の次元が 2 であることを仮定する．しかしながら，本質的にはこの仮定は不要であり，議論はそのまま高次元にも適用することができる．

[1]本稿では，上付き添字は，べき乗ではなく，単なる数列の添字を意味するものとする．

2 自然近傍補間

ここでは，補間公式の連続性という観点から，これまでの自然近傍補間の研究を振り返る．

2.1 Sibson の補間法

Thiessen [10] の提案した補間公式が Voronoi 図を利用した最初の補間公式である．しかしながらこの補間公式は連続でさえなかった．最初の連続な補間公式は，Sibson によって提案された [8,9]．ここでは，Sibson の提案した補間公式を説明する．

データ点 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^2$，および各データ点に対して値 $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}$ が与えられたとする．このとき，

$$f(\boldsymbol{x}_i) = z_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

であるような関数 f を求めたい． 点集合 P を $P = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ と定義する．自然近傍補間では，あらかじめ P に関する Voronoi 図 V を構成しておく．

以下では，ターゲット点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ における関数 f の値を推定する．ターゲット点 $\boldsymbol{x}$ は，$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ のいずれにも一致しないとする． また，$\boldsymbol{x}$ は P の凸包の内部に位置すると仮定する．このとき，V に対して点 $\boldsymbol{x}$ を母点として追加し，Voronoi 図を更新する．得られた Voronoi 図を V' と書く．ターゲット点 $\boldsymbol{x}$ に関する仮定から，Voronoi 図 V' において，$\boldsymbol{x}$ の Voronoi 領域 R は有界となる．Voronoi 領域 R と，ある Voronoi 辺を介して境界を接する Voronoi 領域を作る母点を，$\boldsymbol{x}$ の自然近傍と呼ぶ．

2 点間のユークリッド距離を $\mathrm{d}(\cdot,\cdot)$ で表すことにする．このとき，Voronoi 領域 R は

$$R = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{d}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) < \mathrm{d}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}_i)\}$$

のように表される．更に，Voronoi 領域 $V(\boldsymbol{x})$ を部分領域

$$R_i = \{\boldsymbol{p} \in R \mid \mathrm{d}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}_i) < \mathrm{d}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}_j),\ j \neq i\}$$

($i = 1, \ldots, n$) に分割する．ただし，この分割では，面積が 0 であるような部分領域も便宜的に含めてある．領域 R の面積を A，領域 $R_i, i = 1, \ldots, n$，の面積をそれぞれ A^i と書く[1]．また，$i = 1, \ldots, n$ に対して

$$\sigma^i = A^i / A$$

と定義する．このとき, 以下の恒等式が成り立つことが知られている:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \sigma^i \boldsymbol{x}_i. \tag{2}$$

また, 定義より

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma^i = 1, \quad \sigma^i \geq 0 \tag{3}$$

も成り立つ．

以上の定義では, $\boldsymbol{x} \in P$ であるとき, σ^i は定義されない．そこで, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_j$ であるようなとき, σ^i を δ^i_j によって定義する．ここで, δ^i_j は Kronecker のデルタ記号であり, $i = j$ のとき $\delta^i_j = 1$, そうでないとき $\delta^i_j = 0$ と定義される．このように定義すると, データ点 $\boldsymbol{x}_j$ において σ^i は連続となる．また, 明らかに式 (2) および (3) が成り立つ．

本稿では, σ^i, $i = 1, \ldots, n$, を Sibson 座標と呼ぶ．データ点の数が 3 で, かつデータ点が同一直線上に並ばない場合, Sibson 座標は重心座標に一致する．

Sibson 座標を用いて, 補間公式

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^i z_i. \tag{4}$$

を定義する．この補間公式に対して, 定義より明らかに式 (1) が成り立つ．

データ点 $\boldsymbol{x}_i$ が $\boldsymbol{x}$ の自然近傍であるときかつそのときに限り $\sigma^i > 0$ となることに注意されたい．したがって, 補間公式 (4) は, ある重みのもとで自然近傍上のデータを加え合わせることによって, ターゲット点における値を推定していると解釈することができる．一般に, データ点が一様に分布していれば, 自然近傍の数は n によらないことが知られている．このような性質を local coordinates property と呼ぶ．

状況によっては, 多項式関数からサンプリングされたデータが入力として与えられたとき, どの次数まで補間公式がもとの多項式関数を正しく再生できるかという性質が重要となる．本稿では, 補間公式が任意の k 次以下の多項式を正しく再生できるとき, k 次の精度を持つということにする．式 (2) および (3) より, Sibson の補間公式は 1 次の精度を持つことが示される．

Sibson の補間公式の連続性について述べる．点集合 P の Delaunay 三角形分割の各三角形に対する外接円を, 本稿では Delaunay 円と呼ぶことにする．点集合 P のすべての Delaunay 円上の点の集合を D と書く．また, P の凸包を C と書く．このとき, 以下の命題が成り立つ．

命題 1 ベクトル σ^i, および Sibson の補間公式の連続性は, ともに,

1. $\boldsymbol{x} \in P$ のとき C^0 級,
2. $\boldsymbol{x} \in D - P$ のとき C^1 級,
3. それ以外, すなわち $\boldsymbol{x} \in C - D$ のとき, C^∞ 級である．

この命題から, Sibson の補間公式が C^∞ 級でなくなる点には 2 種類あることがわかる．この命題についての詳細は, 文献 [5] を参照されたい．

この節の残りでは, 自然近傍補間の連続性を向上させる研究の歴史を簡単に振り返る．

2.2 Farin の大域的に C^1 級の補間公式

Farin は, Sibson の補間公式の P 上の連続性を向上させることによって, 大域的に C^1 級な補間公式を提案した．根底にあるアイデアは, $f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_n(\boldsymbol{x})$ が C^k 級ならば, $f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_n(\boldsymbol{x})$ も (少なくとも) C^k 級であるということである．Farin は, 係数が適切に定められた Sibson 座標の多項式を補間公式とすることによって, P 上の連続性を C^1 級に向上させた．

Farin の補間公式では, 各データ点 $\boldsymbol{x}_i$ に対して, 値 z_i だけでなく勾配 $\vec{\boldsymbol{a}}_i$ が与えられていると仮定される．このように, データとして微分係数を含むような補間問題は, Hermite 型の補間問題と呼ばれる．

Farin の補間公式は, $\sigma^1, \ldots, \sigma^n$ の 3 次の同次多項式である．以下では, 同次多項式を簡潔に表記するために, Einstein の表記法を使用する．例えば, $x_i y^i$ のような式は, 実際には $\sum_i x_i y^i$ という式を表す．この表記法を使用すると, 任意の k 次同次多項式は, 以下のように表される:

$$f = f_{i_1 \ldots i_k} \sigma^{i_1} \cdots \sigma^{i_k}.$$

この表現では, 同類項が繰り返し現れるために, 係数 $f_{i_1 \ldots i_k}$ を一意に定めることができない．しかしながら, 対称なものに限定することにより, 係数 $f_{i_1 \ldots i_k}$ を一意に定めることができる．この表記法は, Bernstein-Bézier 形式 (例えば [2] を参照) と比較して, 微分公

式を単純な形で表すことができるという点にある. 関数 f の σ^i に関する偏微分は, 以下のように表される:

$$\partial_j f = k f_{i_1 \dots i_{k-1} j} \sigma^{i_1} \cdots \sigma^{i_{k-1}}.$$

与えられたデータから, 以下の量を定義する:

$$z_{i,j} = \vec{\boldsymbol{a}}_i \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_j}.$$

このとき, Farin の補間公式は, 以下のように表される:

$$f(\boldsymbol{x}) = f_{ijk} \sigma^i \sigma^j \sigma^k. \tag{5}$$

ただし, 係数は以下のように表される:

$$\begin{aligned} f_{iii} =& z_i, \\ f_{iij} =& z_i + \frac{1}{3} z_{i,j}, \\ f_{ijk} =& \frac{z_i + z_j + z_k}{3} \\ &+ \frac{z_{i,j} + z_{i,k} + z_{j,i} + z_{j,k} + z_{k,i} + z_{k,j}}{12}. \end{aligned}$$

ここで, i, j, および k は互いに相異なる 1 から n までの整数である.

実際に計算する際には, 計算を効率良く行うために, σ^i, σ^j および σ^k がすべて 0 でないような f_{ijk} のみ計算するべきである.

以下の命題は, Farin の補間公式の性質を述べている:

命題 2 1. 補間公式 (5) は,

(a) $\boldsymbol{x} \in D$ ならば C^1 級,

(b) そうでなければ, すなわち $\boldsymbol{x} \in C - D$ ならば C^∞ 級である.

2. 補間公式 (5) は, 2 次の精度を持つ.

2.3 筆者らの手法

筆者ら [5] は, 以下の概念を導入した:

定義 3 点集合 $P = \{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\} \subset \mathbb{R}^2$ があるとする. 点集合 P の凸包を C と書く. このとき, 関数 $s^i(\boldsymbol{x}) : C \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, が以下の性質を持つならば, $(s^1, \dots, s^n)$ は一般化重心座標であるという: 任意の $\boldsymbol{x} \in C$ に対して,

$$\begin{gathered} \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n s^i \boldsymbol{x}_i, \\ \sum_{i=1}^n s^i = 1, \\ s^i \geq 0 \quad \text{for } i = 1, \dots, n. \end{gathered}$$

上の定義において, $n = 3$ であり, かつ $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, および $\boldsymbol{x}_3$ が同一直線に並んでいないならば, 一般化重心座標の概念は, 通常の重心座標に一致することに注意されたい. 式 (2) および (3) から, Sibson 座標は一般化重心座標である.

筆者らは, 任意に与えられた非負整数 k に対して, 領域 $C - P$ 上で C^k 級であるような一般化重心座標 s^i の存在を構成的に示した. この一般化重心座標を使用することによって, 以下の補間公式が定義される:

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n s^i z_i. \tag{6}$$

次の命題は, 補間多項式 (6) の性質を述べている:

命題 4 1. 補間公式 (6) は,

(a) $\boldsymbol{x} \in P$ ならば C^0 級,

(b) $\boldsymbol{x} \in D - P$ ならば C^k 級,

(c) それ以外, すなわち $\boldsymbol{x} \in C - D$ ならば C^∞ 級である.

2. 補間公式 (6) は, 1 次の精度を持つ.

3 大域的連続性の向上

3.1 大域的に C^2 級の補間公式

第 2 節で述べたように, Farin の手法を使用することによって P 上の連続性を向上させ, 筆者らの手法を使用することによって $D - P$ 上の連続性を向上させることができる. したがって, 両者の手法を組み合わせることで, 任意の非負整数 k に対して大域的に C^k 級な補間公式を構築することができると考えられる. 筆者らの以前の研究により, $D - P$ 上で C^k 級を持つような補間公式が構成できているので, P 上の連続性を向上させれば良い. 紙面の都合により, 以下では得られた結果のみを述べる.

Farin の補間公式では, 単項式 $\sigma^i \sigma^i \sigma^i$ および $\sigma^i \sigma^i \sigma^j$, $i \neq j$, の係数は, 補間公式が大域的に C^1

$$
\begin{aligned}
f_{iiiii} =& z_i,\\
f_{iiiij} =& z_i + \frac{z_{i,j}}{5},\\
f_{iiijj} =& z_i + \frac{2z_{i,j}}{5} + \frac{z_{i,jj}}{20},\\
f_{iiijk} =& z_i + \frac{z_{i,j}+z_{i,k}}{5} + \frac{z_{i,jk}}{20},\\
f_{iijjk} =& \frac{z_i+z_j}{2} + \frac{3(z_{i,j}+z_{j,i})}{20} + \frac{z_{i,k}+z_{j,k}}{10} + \frac{z_{i,jk}+z_{j,ik}}{30} + \frac{z_{i,jj}+z_{j,ii}}{120},\\
f_{iijkl} =& \frac{7z_i+z_j+z_k+z_l}{10}\\
&+ \frac{11(z_{i,j}+z_{i,k}+z_{i,l})}{90} + \frac{z_{j,i}+z_{j,k}+z_{j,l}+z_{k,i}+z_{k,j}+z_{k,l}+z_{l,i}+z_{l,j}+z_{l,k}}{45}\\
&+ \frac{z_{i,jk}+z_{i,jl}+z_{i,kl}}{45} + \frac{z_{j,ik}+z_{j,il}+z_{j,kl}+z_{k,ij}+z_{k,il}+z_{k,jl}+z_{l,ij}+z_{l,ik}+z_{l,jk}}{180}\\
f_{ijklm} =& \frac{z_i+z_j+z_k+z_l+z_m}{5}\\
&+ \frac{z_{i,j}+z_{i,k}+z_{i,l}+z_{i,m}+z_{j,i}+\cdots+z_{k,i}+\cdots+z_{l,i}+\cdots+z_{m,i}+\cdots}{30}\\
&+ \frac{z_{i,jk}+z_{i,jl}+z_{i,jm}+z_{i,kl}+z_{i,km}+z_{i,lm}+z_{j,ik}+\cdots+z_{k,ij}+\cdots+z_{l,ij}+\cdots+z_{m,ij}+\cdots}{180}.
\end{aligned}
$$

図 1. 提案する補間公式の係数.

級で, かつデータ点においてデータを再生するという条件から一意に決定された. 一方, 単項式 $\sigma^i\sigma^j\sigma^k$ (i, j および k は相異なる) の係数は, この方法では決定することができない. 実際, $\sigma^i\sigma^j\sigma^k$ の点 $\boldsymbol{x}_i$ における値および勾配は必ず 0 となる. 言い換えれば, $\boldsymbol{x}_i$ における補間公式の値および勾配は $\sigma^i\sigma^j\sigma^k$ の係数に依存しないということである. しかしながら, $\sigma^i\sigma^j\sigma^k$ の係数を適切に決めなければ, 得られる曲面が望ましくないうねりを持つことが経験上わかっているので, 係数を何らかの基準で定める必要がある. Farin の補間公式では, 補間公式が 2 次の精度を持つように係数が決定された. しかしながら, 論文 [3] で述べられているように, 係数の決め方は一意ではない.

この議論は, 大域的に C^k 級の補間公式を得る場合にもそのまま拡張することができる. 以下では, 大域的に C^2 級の補間公式を陽に与える. ここで, 点 $\boldsymbol{x}_i$, $i=1,\ldots,n$, において, 値 z_i, 勾配 $\vec{\boldsymbol{a}}_i$, およびヘッセ行列 B_i がデータとして与えられていると仮定する.

与えられたデータから, 以下の量を定義する:

$$
z_{i,j} = \vec{\boldsymbol{a}}_i \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_j}, \quad z_{i,jk} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_j} \cdot (B_i \overrightarrow{\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_k}).
$$

また, s^i, $i=1,\ldots,n$, を, P 上で C^0 級, $C-P$ 上で C^k 級の一般化重心座標とする. このとき, 補間公式は以下のように陽に与えられる:

$$
f(\boldsymbol{x}) = f_{ijklm} s^i s^j s^k s^l s^m. \tag{7}
$$

ここで, 係数は図 1 のように決定される. ただし, i, j, k, l および m は相異なる. 実際に計算する際には, 効率的に計算を行うために, s^i, s^j, s^k, s^l および s^m がすべて 0 でない i, j, k, l および m に対してのみ f_{ijklm} を計算するべきである.

係数 f_{iiiii}, f_{iiiij}, f_{iiijj} および f_{iiijk} は, 補間公式が大域的に C^2 級, かつデータ点においてデータを正しく再生するという条件から一意に決定される. 残りの係数, すなわち f_{iijjk}, f_{iijkl} および f_{ijklm} は, 補間公式が 3 次の精度を持つように決定されるが, 一意ではない.

補間公式 (7) と, 同様な問題設定で使用される有限要素法補間公式である Q_{18} [1] を比較してみよう. 補間公式 Q_{18} を使用するためには, まず空間を三角形メッシュにあらかじめ分割しておく. データとしては, メッシュの各頂点上に, 関数値, 勾配, ヘッセ行列が与えられる. 補間公式 Q_{18} は, 各三角形に制限されたとき, 重心座標の 5 次多項式として表される. 補間公式 Q_{18} は大域的に C^1 級で, かつ 4 次の精度を持つ. したがって, 補間公式 (7) は, Q_{18} よりも高い連続性を持つが, 精度は低い.

表 1 に, 本稿で議論の対象とした補間公式の連続性および精度をまとめる.

表 1. 自然近傍補間の連続性と精度.

補間公式	連続性 (P 上)	連続性 ($D-P$ 上)	精度 (次)
Sibson (4)	C^0	C^1	1
Farin (5)	C^1	C^1	2
筆者ら (6)	C^0	C^k	1
筆者ら (7)	C^2	C^k	3
Q_{18}	(大域的に C^1)		4

3.2 大域的に C^k 級の補間公式

更に一般の場合について簡単に述べる. 大域的に C^k 級の補間公式は, 以下のように求められる. データとしては, 各データ点上に, k 階までの偏微分係数が必要となる. 補間公式は, $C-P$ 上で C^k 級であるような一般化重心座標 s^i の $(2k+1)$ 次同次多項式となる. このような一般化重心座標としては, 例えば論文 [5] で提案された k 次標準座標が利用可能である. 与えられたデータからは, $k+1$ 個以上の s^i を因子として持つような単項式の係数が, 大域的に C^k 級であるという条件から一意に決定される. 残りの係数は, 補間公式が $(k+1)$ 次の精度を持つという条件から決定されるが, 一意ではない. このようにして, 各 k に対して補間公式を陽に表すことができる.

4 計算実験

筆者らは, 補間公式 (7) および文献 [5] で提案した標準座標を Java 言語および Java 3D API を使用して実装した. 以下に掲げる図は, このプログラムによって作成したものである.

図 2 に, 本稿で議論の対象とした補間公式によって生成された曲面を示す. 一般化重心座標としては, Sibson および Farin の補間公式に対しては Sibson 座標を, 補間公式 (6) および (7) に対しては 2 次の標準座標をそれぞれ使用した. データ点としては, 領域 $[-1,1]\times[-1,1]$ の中から 30 点をランダムに選択した. 補間公式に与えたデータは, 関数 $(5/2-x^3-y^4)/3$ から計算した. 図では, 各垂直線分の長さによってデータ値を表している. 図から, 補間公式 (4) および (6) によって生成された曲面は, データ点においてとがっていることがわかる. このことは, 補間公式 (4) および (6) が, データ点において C^0 級に過ぎないことを表している.

次に, 補間公式の精度について調査した. 図 3 に, 3 次多項式 $(5/2-x^3-y^2)/3$ からデータをサンプリングしたときの, 各補間公式の誤差を示す. 図では, 誤差を z 軸にとっている. 特に, Farin の補間公式および補間公式 (7) に対しては, それぞれ z 方向を 10^2 倍および 10^6 倍に拡大している. 提案する補間公式は 3 次の精度を持つが, 図からも誤差がないことが見てとれる. 一方, 他の 3 つの補間公式はもとの関数を正確に再生することができなかった. ただし Farin の補間公式の精度は 2 次であり, 残りの 2 つの補間公式よりも良いため, 誤差も小さくなっている.

5 おわりに

本研究では, Voronoi 図に基づく大域的に C^2 級の補間公式を陽に求めた. これは, 今までの補間法では C^1 級までしか達成されていなかった連続性を向上させるものである. この補間公式は, データとして 2 次までの偏微分係数を必要とする. 得られた補間公式は, 与えられたデータから計算される係数を持つ, 一般化重心座標の 5 次同次多項式として表される. 補間公式は 3 次の精度を持つ.

また一般に, 任意の非負整数 k に対して大域的に C^k 級, かつ $(k+1)$ 次の精度を持つような補間公式を構築することが可能であることも指摘し, その一般的設計方針も示した.

今後の課題の 1 つは, 任意の k に対する補間公式の係数について成り立つ法則を発見し, 一般の場合の補間公式を陽に表すことである.

また, 自然近傍補間の応用のための一般的な枠組みを開発することも, 重要な課題である. 本稿では,「有限要素法」という用語を補間法の一種という意味として用いているが, 本来有限要素法は, 偏微分方程式などの解法も含む, より一般的な枠組みである. 同

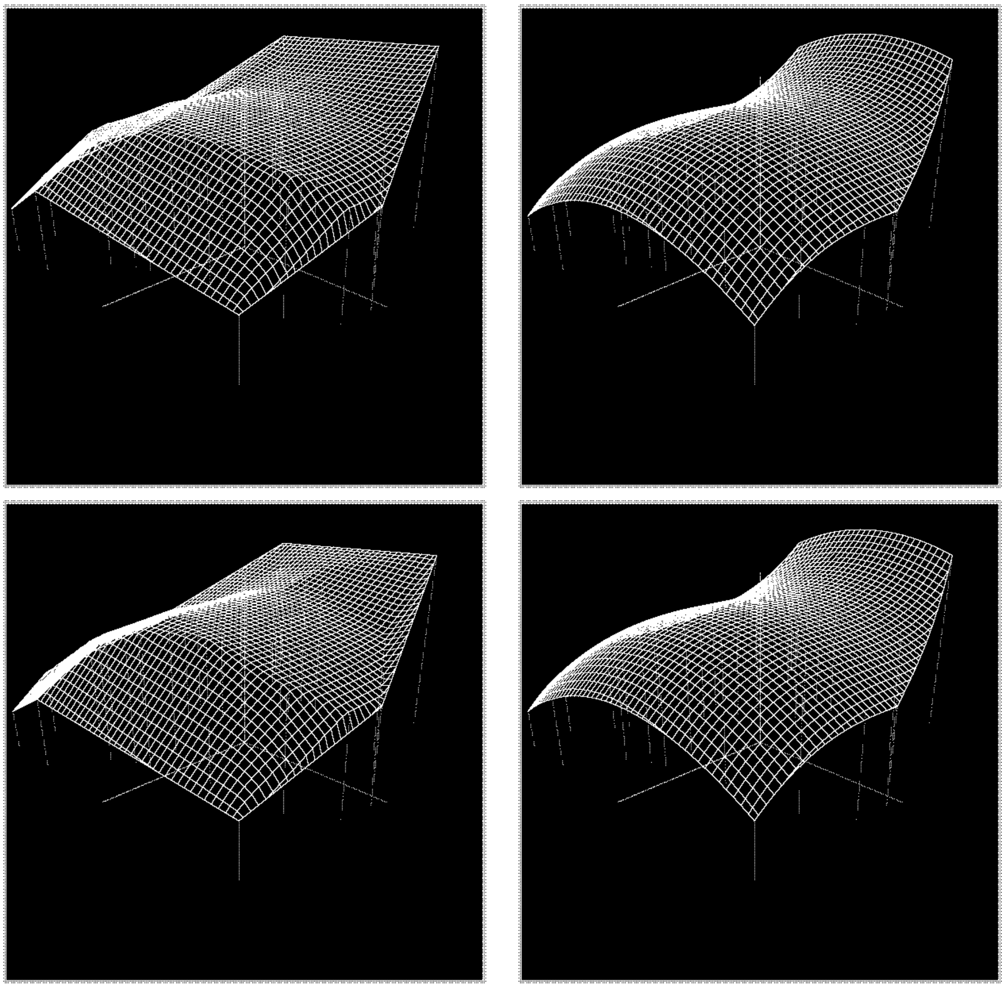

図 2. 各補間公式によって生成された曲面の例. それぞれ, Sibson の補間公式 (左上), Farin の補間公式 (右上), 補間公式 (6) (左下), および補間公式 (7) (右下). 使用したデータ点の数は 30 で, データの値は関数 $(5/2 - x^3 - y^4)/3$ からサンプリングされた.

様に, 自然近傍補間も偏微分方程式の解法を含む, より一般的な解析手法の枠組みとなる可能性を秘めているのではないかと筆者らは考えている.

謝辞

本研究は, 文部科学省科学研究費補助金の援助を受けている.

参考文献

[1] Barnhill, R.E. and Farin, G.: C^1 quintic interpolation over triangles: two explicit representations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **17** (1981), pp. 1763–1778.

[2] de Boor, C.: B-form basics, in Farin, G., ed.: *Geometric Modeling: Algorithms and New Trends*, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1987, pp. 131–148.

[3] Farin, G.: Surfaces over Dirichlet tessellations, *Computer Aided Geometric Design*, **7** (1990), pp. 281–292.

[4] 日吉久礎, Voronoi 図を用いた重心座標の拡張とその多次元データ補間への応用, 応用数理, Vol. 12, No. 2, 2002, 176–190.

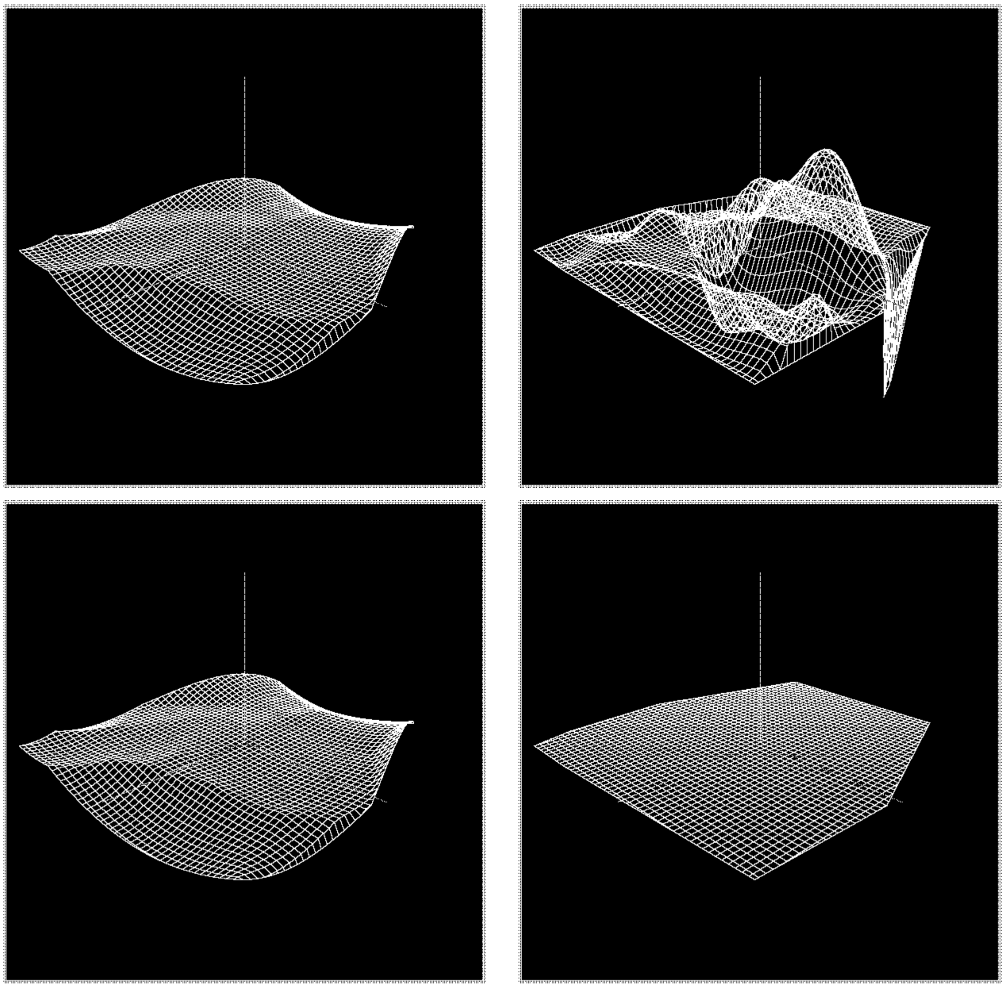

図 3. 各補間公式の誤差. それぞれ, Sibson の補間公式 (左上), Farin の補間公式 (右上, ただし z 方向を 10^2 倍に拡大している), 補間公式 (6) (左下), および補間公式 (7) (右下, ただし z 方向を 10^6 倍に拡大している). データ点の数は 30 であり, データ値は, 関数 $(5/2 - x^3 - y^2)/3$ から計算された.

[5] Hiyoshi, H. and Sugihara, K.: Improving continuity of Voronoi-based interpolation over Delaunay spheres, *Computational Geometry: Theory and Applications*, **22** (2002), pp. 167–183.

[6] Preparata, F.P. and Shamos, M.I.: *Computational Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1985.

[7] Strang, G. and Fix, G.J.: *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.

[8] R. Sibson, A vector identity for the Dirichlet tessellation, *Mathematical Proceedings of Cambridge Philosophical Society*, Vol. 87, Cambridge University Press, Cambridge, 1980, pp. 151–155.

[9] Sibson, R.: A brief description of natural neighbour interpolation, in Barnett, V., ed.: *Interpreting Multivariate Data*, John Wiley & Sons, Chichester, 1981, pp. 21–36.

[10] Thiessen, A.H.: Precipitation averages for large areas, *Monthly Weather Review*, **39** (1911), pp. 1082–1084.