

## 灰色理論による構造化モデルの提案

山口 大輔<sup>†</sup>

小林 俊裕<sup>†</sup>

水谷 晃三<sup>†</sup>

永井 正武<sup>†‡</sup>

本論文は ISM[1], FSM[2] と同様の命題として, 灰色理論 [3, 4, 5] を用いたシステムの構造化技法である GSM(Grey Structural Modeling) を提案する. 灰色分析を数理拠点として入力データから灰色関連行列を獲得し, 有向グラフを構築する. 本論文は有向グラフの調整の違いから  $w$ -GSM,  $k$ -GSM の 2 技法を提案する.  $w$ -GSM は閾値  $w$  により階層構造を調整することができる.  $k$ -GSM は分析者があらかじめグラフの階層数を指定することができる. GSM は任意の実数が取り扱い可能である. また, 因果関係が間接的既知なデータに対して構造化が可能である. 数値データによる具体的な実行例を提示し, 既存の方法と比較検討する.

### Proposal of System Modeling Method Based on Grey Theory

Daisuke YAMAGUCHI<sup>†</sup> Toshihiro KOBAYASHI<sup>†</sup> Kozo MIZUTANI<sup>†</sup> Masatake NAGAI<sup>†‡</sup>

This paper proposes about GSM which is a structuring method of systems used grey theory, just likes ISM and FSM. A grey relational matrix is obtained using grey analysis, and directed graph is made. We propose 2 methods of  $w$ -GSM and  $k$ -GSM from the difference in adjustment of directed graph.  $w$ -GSM can adjust a class by weight value  $w$ .  $k$ -GSM can specify the classes in directed graph beforehand. GSM is possible to construct the directed graph by unknown data of causal relationship. In experiment, existing methods and our method are used, and output result of directed graph is compared.

#### 1. はじめに

システムズアプローチにおいて, 複雑化したある問題に対する要因を構造化することは重要な役割を果たす. 構造化によりモデルを構築することで問題の取り扱いが容易になるためである. 構造モデルを実現する手法としては, グラフ理論を導入した ISM(Interpretive Structural Modeling)[1] がある. また, あいまい性を導入することで ISM を拡張した FSM(Fuzzy Structural Modeling)[2] が提案されている. どちらも実績のある手法であり, 様々な分野で適用されている. しかし, ISM では 1, 0 しか取り扱うことができず, FSM ではファジー非反射律などの制約が設けられている.

本論文は, ISM, FSM と同等の命題として, 灰色理論を用いたシステムの構造モデルである GSM(Grey Structural Modeling) を提案する. ISM, FSM で取り扱いが可能な事例を適用できることを実現するだけでなく, FSM における制約条件を緩和させ, より柔軟なシステム構造モデルを開発することが本研究の目的である.

灰色理論 [3, 4, 5] とは, ある主題に対する情報が部分既知にある状態を完全既知にすることを目的とした基礎数理理論である. 完全既知状態を白, 完全未知状態を黒と定義し, 部分既知状態を灰色と定義する. 複雑化した問題は通常灰色な状態である. し

たがって, 本研究はシステムズアプローチに灰色理論を導入する新たな試みである.

GSM は灰色分析を数理拠点として入力データから灰色関連行列を獲得し, 有向グラフを構築する. 本論文は有向グラフの調整の違いから  $w$ -GSM,  $k$ -GSM の 2 技法を提案する.  $w$ -GSM は閾値  $w$  により階層構造を調整することができる.  $k$ -GSM は分析者があらかじめグラフの階層数を指定することができる.

以下, GSM の導入のための数学的準備および既存の構造化手法の概略を述べる. さらに灰色理論に含まれる分析手法である灰色関連度分析について述べる. 次に本稿で提案する GSM のアルゴリズムを提示し, 適用例を 3 点示す. 適用例の実行結果を基に, ISM, FSM, GSM の各手法を比較検討しながら GSM の有効性について考察する.

#### 2. 数学的準備

GSM を導入するに当たり, 数学的準備および既存のシステム構造化手法の概略を述べる.

##### 2.1 二項関係

システムの構成要素  $s_i$  の集合を  $S = \{s_i | 1 \leq i \leq n\}$  ( $n$ : 構成要素数) とする.  $s_i$  は  $s_j$  に対して  $R$  という関係にあることを二項関係とよび  $s_i R s_j$  と定義する.  $s_i R s_j$  の強さを  $R(s_i, s_j)$  とする. 二項関係の性質は以下に定義できる.

<sup>†</sup> 帝京大学大学院理工学研究科, Graduate School of Science and Engineering, Teikyo University

<sup>‡</sup> 帝京大学理工学部, School of Science and Engineering, Teikyo University

(1) 反射性 (Reflexivity)

$$s_i R s_j, \forall s_i \in S$$

(2) 対称性 (Symmetry)

$$s_i R s_j \rightarrow s_j R s_i \quad \forall s_i, s_j \in S$$

(3) 推移性 (Transitivity)

$$s_i R s_k, s_k R s_j \rightarrow s_i R^2 s_j, \quad \forall s_i, s_j, s_k \in S$$

ただし,  $s_i R^2 s_j$  は推移性の性質により生じた間接的  
二項関係であり,  $s_i R^2 s_j$  の強さの程度は  $R^2(s_i, s_j)$   
で表すことができる. たとえば, 二項関係の強さを  
4 階層に分類されて,

$$R(s_i, s_j) \in \{x_1, x_2, x_3, x_4 | x_1 > x_2 > x_3 > x_4\}$$

となる.

一般に, 構造化手法で設定される二項関係は以下  
の基本条件を満たしていなければならない.

(1) 非反射的 (Irreflexive)

(2) 対称的 (Non-symmetric)

(3) 推移的 (Transitive)

## 2.2 ISM 法

ISM は二項関係の有無を考慮した複雑なシステ  
ムの構造化・明確化を行う手法である.  $R^l(s_i, s_j) \in$   
 $\{0, 1\}$  とし, すべての演算をブール代数で行うこと  
が特徴である. システムの構成要素における二項関  
係を表した行列  $A = [a_{ij}] (i, j = 1, 2, \dots, n)$  を隣接  
行列と定義する. 行列  $A$  を基に単位行列  $I$  を用いて,

$$\begin{aligned} B &= I + A \\ B &\neq B^2 \neq \dots \neq B^{n-1} = B^n \equiv T \end{aligned} \quad (1)$$

となる行列  $T$  を獲得する.  $T$  を可達行列とよび, 推  
移性によって得られる間接的情報を網羅していると  
考える. 可達行列  $T$  および隣接行列  $A$  からグラフ  
理論の適用によりシステムの構造化を行い, 有向グ  
ラフを獲得する方法である.

## 2.3 FSM 法

ISM は項目間で扱う入力データが 1 または 0 と  
制限条件下にある. そのため, 実用上利用できない  
場合が生じる. FSM は, 人間の思考のあいまい性  
を導入し, 項目間の関係をファジー二項関係に拡張  
する. 多元的価値が複雑化するシステム構造解析の  
ために, 演算にはファジー理論に関する性質を利用  
する. FSM は, 改善された ISM 拡張手法となっ  
ている.

ある空間  $S = \{s\}$  において, その要素のメンバ  
ーシップ関数  $\mu_A$  により特性付けられる集合  $A$  を次式  
のように表し, これをファジー集合とよぶ.

$$A = \{s | \mu_A\} \quad (2)$$

ここで,  $\mu_A : S \rightarrow [0, 1]$  とする.

また, ファジー集合  $A$  のファジー補集合  $\bar{A}$  の要  
素は, 次のメンバーシップ関数  $\bar{\mu}_A$  によって特性付  
けられる.

$$\bar{\mu}_A = \frac{1 - \mu_A}{1 + \lambda \mu_A} \quad (-1 < \lambda < \infty) \quad (3)$$

$\lambda$  はパラメータである.

任意のファジーベクトル  $Y$ , ファジー行列  $B$ , お  
よびそれらの合成を  $C$  とする.  $Y, B, C$  を用いて以  
下の処理を行うことをファジー合成という.

$$Y = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]^T \quad (4)$$

$$(0 \leq y_i \leq 1; i = 1, 2, \dots, n)$$

$$B = [b_{ij}] \quad (5)$$

$$(0 \leq b_{ij} \leq 1; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

$$C = B \circ Y \leftrightarrow C_i = \bigvee_{j=1}^n (b_{ij} \wedge y_j) \quad (6)$$

ただし,  $\bigvee_{i=1}^n a_i$  は  $\max_{1 < i < n} \{a_i\}$ ,  $a \wedge b$  は  $\min(a, b)$   
とする.

集合  $S$  の要素間のファジー二項関係に関するメン  
バーシップ関数  $f_r, f_{\bar{r}}$  をそれぞれ次のように定義  
する.

$$f_r : S \times S \rightarrow [0, 1] \quad (7)$$

$$f_{\bar{r}} : S \times S \rightarrow [0, 1] \quad (8)$$

ここで,  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  とし,  $f_r, f_{\bar{r}}$  との関  
係を次のように与える.

$$f_{\bar{r}} = \frac{1 - f_r}{1 + \lambda f_r} \quad (-1 < \lambda < \infty) \quad (9)$$

パラメータ  $p$  をあらかじめ与えられた半開区間  $(0, 1]$   
の実数とするとき, 式 (7) で与えられた  $f_r$  につい  
て以下を定義することができる.

**定義 1**  $\forall s_i, s_j \in S \times S$  に対して  $f_r(s_i, s_j) < p$   
が満足するならば, ファジー非反射律が成り立つ.

**定義 2**  $\forall (s_i, s_j) \in S \times S (i \neq j)$  にたいして  
 $f_r(s_i, s_j) < p$  あるいは  $f_r(s_j, s_i) < p$  の少なくとも  
どちらか一方が成り立つならばファジー非対称律が  
成り立つ.

**定義 3**  $\forall (s_i, s_j), (s_j, s_k), (s_i, s_k) \in S \times S (i \neq$   
 $j, j \neq k, i \neq k)$  に対して,

$$M = \bigvee_{j=1}^n (f_r(s_i, s_j) \wedge f_r(s_i, s_k) \geq p)$$

のとき,  $f_r(s_i, s_k) \geq M$  が満足されるならば, ファ  
ジー半推移律が成り立つ.

FSM は上記の 3 つの定義を満たすことを前提と  
している.

## 3. 灰色関連度分析による前処理

与えられた  $x(1), \dots, x(k)$  の観測値を持つ変量が  
 $n$  組あるとする. 以後の記述を簡略化するため,

$$\begin{bmatrix} x_1(1) & \dots & x_1(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n(1) & \dots & x_n(k) \end{bmatrix} = [X] \quad (10)$$

とする.

灰色関連度分析 [4, 5] とは、灰色理論に含まれる分析技法であり、単に灰色分析ともよぶ。複数の観測値を持つ変量の集合を数列と定義し、複数の数列間におけるデータの類似度を測る分析法である。分析結果として灰色関連度  $\Gamma$  が得られる。

類似度を測る基準となる評価変数の数列、基準数列  $x_{R0}$  を 1 組用意する。

$$x_{R0} = \{x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(k)\} \quad (11)$$

または、

$$[x_{R0}] = [x_0(1) \quad x_0(2) \quad \dots \quad x_0(k)] \quad (12)$$

とおく。そして、基準数列との類似度を測りたい観測値数列を比較数列  $x_{Ri}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) とする。

$$x_{Ri} = \{x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(k)\} \quad (13)$$

または、

$$[x_{Ri}] = [x_i(1) \quad x_i(2) \quad \dots \quad x_i(k)] \quad (14)$$

とおく。比較数列行列  $[X_R]$  および基準数列行列  $[X_{R0}]$  は式 (10) から式 (14) より次式にて表される。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{R1} \\ \vdots \\ x_{Rn} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1(1) & \dots & x_1(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n(1) & \dots & x_n(k) \end{bmatrix} \\ &= [X] = [X_R] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} [X_{R0}] &= [x_{R0}] \\ &= \begin{bmatrix} x_0(1) & \dots & x_0(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0(1) & \dots & x_0(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

同様に、比較数列  $x_{Ri}$  中の要素  $x_i(1), \dots, x_i(k)$  を比較数列  $x_{ci}$  として灰色分析を行いたい場合は、比較数列行列  $[X_C]$  を定義する。 $[X_C]$  は  $[X_R]$  の転置行列  $[X_C] = [X_R]^T$  とする。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{C1} \\ \vdots \\ x_{Ck} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1(1) & \dots & x_n(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(k) & \dots & x_n(k) \end{bmatrix} \\ &= [X_C] = [X_R]^T = [X]^T \end{aligned} \quad (17)$$

比較数列に合わせて、基準数列  $x_{C0}$  は次式を用いて、

$$\begin{aligned} [X_{C0}] &= [x_{C0}] \\ &= \begin{bmatrix} x_0(1) & \dots & x_0(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0(k) & \dots & x_0(k) \end{bmatrix} \\ &\neq [X_{R0}]^T \end{aligned} \quad (18)$$

と展開する。

各数列を獲得後、基準数列の変数  $x_0(j)$  と比較数列の変数  $x_i(j)$  における差の絶対値  $\Delta_{0i}(j)$  を算出する。定義式は、

$$\Delta_{0i}(j) = |x_0(j) - x_i(j)| \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (19)$$

となっている。これを行列  $[X_R]$  で展開すると、

$$\begin{aligned} [\Delta_R] &= \begin{bmatrix} \Delta_{01}(1) & \dots & \Delta_{01}(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{0n}(1) & \dots & \Delta_{0n}(k) \end{bmatrix} \\ &= |[X_0] - [X_R]| \end{aligned} \quad (20)$$

となる  $[\Delta_R]$  が得られる。

次に、灰色関連係数  $\gamma_{0i}(j)$  を各  $\Delta_{0i}(j)$  要素に対して算出する。

$$f(\Delta_{0i}(j)) = \frac{\Delta_{\min.} + \zeta \Delta_{\max.}}{\Delta_{0i}(j) + \zeta \Delta_{\max.}} = \gamma_{0i}(j) \quad (21)$$

ただし、

$$\begin{cases} \zeta = 0.5 \\ \Delta_{\min.} = \min_{\forall i} \min_{\forall j} \{\Delta_{0i}(j)\} \\ \Delta_{\max.} = \max_{\forall i} \max_{\forall j} \{\Delta_{0i}(j)\} \end{cases}$$

とする。式 (20) に式 (21) を代入すると、

$$\begin{aligned} [\Delta_R] &= \begin{bmatrix} f(\Delta_{01}(1)) & \dots & f(\Delta_{01}(k)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\Delta_{0n}(1)) & \dots & f(\Delta_{0n}(k)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_{01}(1) & \dots & \gamma_{01}(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{0n}(1) & \dots & \gamma_{0n}(k) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_{01} \\ \vdots \\ \gamma_{0n} \end{bmatrix} = [\gamma_R] \end{aligned} \quad (22)$$

が得られる。

次式の平均値処理により、分析結果となる灰色関連度  $\Gamma_{0i}$  を全比較数列に対して算出する。

$$\Gamma_{0i} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \gamma_{0i}(j) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (23)$$

上記の式を式 (22) で展開すると、

$$\begin{aligned} [\Gamma_R] &= \begin{bmatrix} \Gamma_{01} \\ \vdots \\ \Gamma_{0n} \end{bmatrix} = \frac{1}{k} \left[ \sum \gamma_R \right] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{k} \sum \gamma_{01} \\ \vdots \\ \frac{1}{k} \sum \gamma_{0n} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

となる。 $[X_{C0}]$  と  $[X_C]$  で灰色分析する場合も上述の手順と同じである。

$\Gamma_{0i} \in [0, 1]$  の実数値であり、 $\Gamma_{0i} \rightarrow 1$  であるほど基準数列  $x_0$  と比較数列  $x_i$  間のデータが類似していることを表す。

#### 4. 灰色理論による構造化モデル

以下に、本稿で提案する構造化モデルである GSM のアルゴリズムを示す。本稿は有向グラフの調整方法の違いから、 $w$ -GSM と  $k$ -GSM の 2 技法を提案する。本提案 GSM のアルゴリズムを図 1 に示す。

##### 4.1 初期構造の獲得

GSM ではデータとして基準数列行列  $[X_0]$  および比較数列行列  $[X_R]$  を獲得する。基準数列行列は以下に述べる初期構造を獲得するのに必要である。比較数列行列は、システムの構成要素  $s_i, s_j$  における観測値を表している。

基準数列行列  $[X_0]$  および比較数列行列  $[X_R]$  を獲得後、両データを用いて前述の灰色分析を行う。初期構造は、灰色分析によって得られる灰色関連度  $\Gamma_{0i}$  を降順整理した情報である。次式が初期構造情報である。

$$[n] \Rightarrow \cdots \Rightarrow [1] \quad \text{if } (\Gamma_{01} > \cdots > \Gamma_{0n}) \quad (25)$$

各数列  $x_i$  は  $\Gamma_{0i}$  の降順に整理し、1 項目 1 階層とする。結線は下位階層から上位階層へ向けて行う。式 (25) を有向グラフの拠点として構造化を行う。

##### 4.2 灰色関連行列の獲得

初期構造の獲得後、有向グラフ獲得のために必要な情報として灰色関連行列  $[\Gamma_R]$  を獲得する。 $[\Gamma_R]$  は、比較数列同士におけるデータの類似度を算出した行列である。統計処理における相関行列に相当する。 $[\Gamma_R]$  は各比較数列  $x_i$  を一度ずつ基準数列  $x_0$  に設定し、灰色分析を行うことで獲得する。したがって、 $[\Gamma_R]$  は次式に示す  $n \times n$  の正方行列となる。

$$[\Gamma_R] = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \cdots & \Gamma_{1n} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \cdots & \Gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{n1} & \Gamma_{n2} & \cdots & \Gamma_{nn} \end{bmatrix} \quad (26)$$

ただし、要素  $\Gamma_{ii} = 1 (i = 1, 2, \dots, n)$ ,  $[\Gamma_R]$  は対称行列であるとは限らない。

##### 4.3 同一階層の獲得による構造化処理

式 (26) に示す行列から構造化を行う。初期構造にある数列を、データの類似している数列から順に同一階層化する。したがって、階層  $L_h$  に同一化する数列  $x_i, x_j$  は、

$$L_h = \max_{\forall i} \max_{\forall j} \{\Gamma_{ij}\} \quad (i \neq j) \quad (27)$$

となる。このとき、下位の数列  $x_j$  が上位の数列  $x_i$  にある階層  $L_h$  と同一階層化する。矢印による結線は、 $[i] \Rightarrow [j]$  とする。

同一階層獲得後、新階層  $L_h$  と他の数列  $x_i$  間の類似度  $\Gamma_{ih}^*, \Gamma_{hi}^*$  を次式にて再計算する。

$$\Gamma_{ih}^* = \begin{cases} \bar{\Gamma}_{ih} & (\text{Average of } \Gamma_{ih}) \\ \tilde{\Gamma}_{ih} & (\text{Median of } \Gamma_{ih}) \end{cases} \quad (28)$$

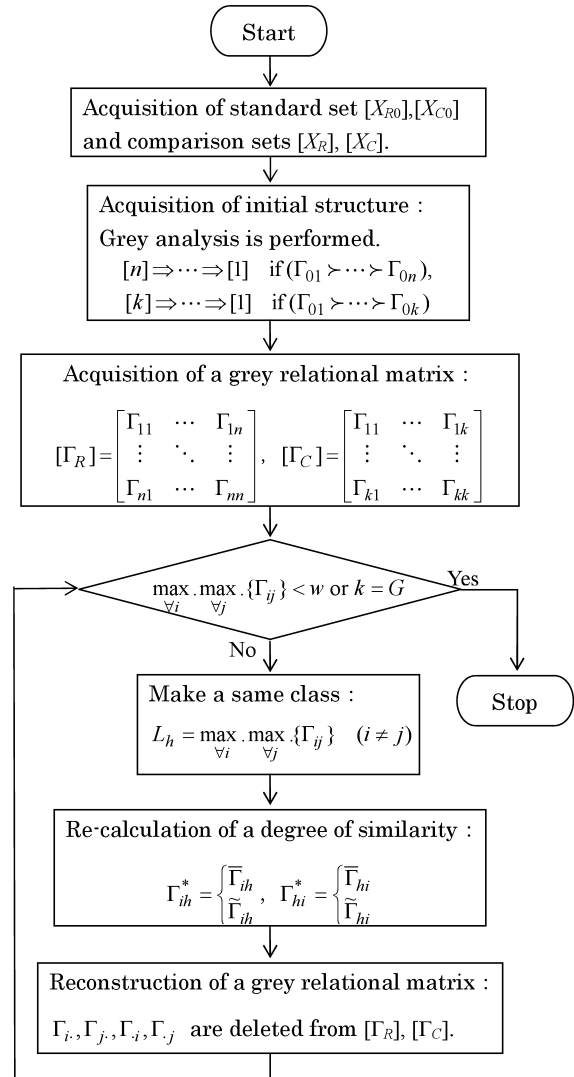


図 1 GSM のアルゴリズム

$$\Gamma_{hi}^* = \begin{cases} \bar{\Gamma}_{hi} & (\text{Average of } \Gamma_{hi}) \\ \tilde{\Gamma}_{hi} & (\text{Median of } \Gamma_{hi}) \end{cases} \quad (29)$$

$\Gamma^*$  の計算は平均値もしくは中央値のどちらか一方を用いる。

$\Gamma^*$  を算出後、 $[\Gamma_R]$  から  $\Gamma_i, \Gamma_j, \Gamma_i, \Gamma_j$  を削除し、 $[\Gamma_R]$  を再構成する。再構成後、式 (27) 以降の処理を繰り返し行い、構造化を行う。構造化の結果として得られる有向グラフの例を図 2 に示す。

同様の手順で  $[X_C]$  から有向グラフを獲得することができる。ただし、灰色関連行列  $[\Gamma_C]$  は  $k \times k$  の正方行列となる。

##### 4.4 $w$ -GSM による構造化技法

式 (27) から式 (29) による構造化処理を繰り返す行くと、最終的には 1 階層の有向グラフとなる。適切な階層数の有向グラフを獲得するために、構造化処理をどこかで終了させる必要がある。1 つの方法として、閾値  $w$  による制御方法を提案する。

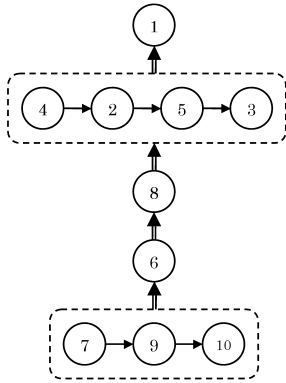


図 2 GSM による有向グラフの例

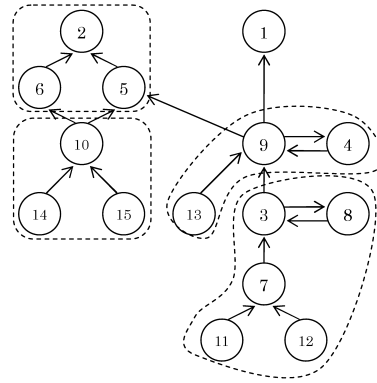


図 3 ISM[1] による有向グラフ

表 1 2 値による数値例 [1]

	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$	$s_7$	$s_8$	$s_9$	$s_{10}$	$s_{11}$	$s_{12}$	$s_{13}$	$s_{14}$	$s_{15}$
$s_1$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$s_2$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$s_3$	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
$s_4$	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$s_5$	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$s_6$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$s_7$	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
$s_8$	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
$s_9$	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$s_{10}$	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$s_{11}$	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0
$s_{12}$	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0
$s_{13}$	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
$s_{14}$	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
$s_{15}$	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1

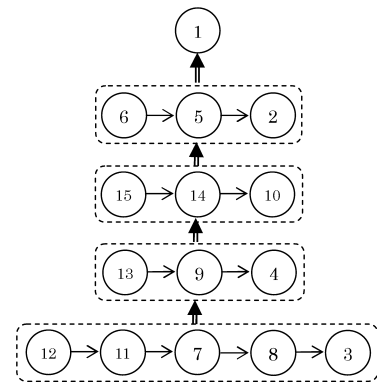


図 4 GSM による有向グラフ ( $w = 0.95, k = 5$ )

$w$  は分析者が任意の実数値を  $0 \leq w \leq 1$  として指定する. 式 (27) は  $w$  を加えることにより,

$$L_h = \max_{\forall i} \max_{\forall j} \{\Gamma_{ij}\} \quad (i \neq j; \Gamma_{ij} \geq w) \quad (30)$$

となる.  $\max_{\forall i} \max_{\forall j} \{\Gamma_{ij}\} < w$  となった時点で構造化処理を終了する. 終了時における有向グラフが処理結果となる.

#### 4.5 $k$ -GSM による構造化技法

$w$  は閾値であるのに対し,  $k$  は階層数を表す. 分析者は階層数  $k$  をあらかじめ指定することで構造化処理を制御する. これが  $k$ -GSM である.

初期構造構成時における階層数  $G$  は, 比較数列の数と同じ  $n$  である. 構造化処理を繰り返すことで  $G$  は 1 ずつ減少していく. 構造化処理を繰り返していき,  $G = k$  となった時点で構造化処理を終了する.  $k$ -GSM の場合, 式 (27) は  $G, k$  を加えた,

$$L_h = \max_{\forall i} \max_{\forall j} \{\Gamma_{ij}\} \quad (i \neq j; k < G) \quad (31)$$

となる.

## 5. 数値例

本稿で提案する GSM を実際のデータに適用し, システムの構造化ならびに有向グラフの獲得を行う.

### 5.1 0 と 1 による 2 値の例

表 1 は, 0 と 1 の 2 値により構成されている隣接行列である [1]. 表中の値は各項目における因果関係の有無を表しており, 1 ならば因果関係有, 0 ならば因果関係無しである. ISM で適用可能なこのデータに GSM を適用し, 有向グラフの獲得を試みる.

ISM では表 1 だけで構造化が可能である. GSM では階層を得るために基準数列  $x_{R0}$  が必要となる. 本適用例では, 0 と 1 の 2 値により構成されているので,

$$\begin{aligned} x_{R0} &= \{x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(15)\} \\ &= \{0, 0, \dots, 0\} \end{aligned}$$

と設定する.

ISM および GSM を実行した結果, 図 3 および図 4 に示す有向グラフが得られている. GSM では  $w = 0.95, k = 5$  としている. 両者のグラフを比較すると, 矢印結線や構造が類似していることがわかる. 完全一致ではないが, GSM は ISM と類似傾向の有向グラフを同一データから獲得することができる.

### 5.2 0 から 1 による実数値の例

表 2 は, システムの構成要素  $s_1$  から  $s_{15}$  におけるファジー二項関係を記述したものである [2]. FSM

表 2 実数値による数値例 [2]

	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$	$s_7$	$s_8$	$s_9$	$s_{10}$	$s_{11}$	$s_{12}$	$s_{13}$	$s_{14}$	$s_{15}$
$s_1$	0.0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	0.0	0.1	0.1	0.0	0.2	0.2	0.1	0.2	0.1
$s_2$	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.4	0.3	0.0	0.2	0.1	0.1	0.2	0.0	0.6	0.2
$s_3$	0.6	0.2	0.0	0.1	0.0	0.4	0.0	0.0	0.0	0.2	0.1	0.1	0.1	0.2	0.3
$s_4$	0.0	0.6	0.1	0.0	0.2	0.3	0.7	0.1	0.0	0.2	0.2	0.1	0.6	0.6	0.1
$s_5$	0.0	0.0	0.2	0.0	0.0	0.6	0.6	0.0	0.1	0.0	0.7	0.2	0.0	0.6	0.2
$s_6$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.0	0.0	0.1	0.1	0.0	0.1	0.2	0.2	0.1	0.0
$s_7$	0.0	0.2	0.1	0.0	0.1	0.4	0.0	0.1	0.1	0.1	0.2	0.1	0.2	0.5	0.1
$s_8$	0.6	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.0	0.0	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.6
$s_9$	0.2	0.0	0.0	0.4	0.0	0.6	0.5	0.2	0.0	0.1	0.7	0.2	0.1	0.7	0.1
$s_{10}$	0.1	0.5	0.0	0.1	0.0	0.4	0.6	0.1	0.2	0.0	0.1	0.4	0.5	0.5	0.1
$s_{11}$	0.1	0.0	0.1	0.0	0.1	0.6	0.5	0.0	0.1	0.1	0.0	0.1	0.1	0.5	0.0
$s_{12}$	0.0	0.4	0.2	0.0	0.1	0.1	0.3	0.1	0.1	0.1	0.0	0.1	0.0	0.4	0.1
$s_{13}$	0.0	0.7	0.0	0.1	0.0	0.4	0.6	0.0	0.2	0.0	0.4	0.1	0.0	0.6	0.1
$s_{14}$	0.1	0.0	0.0	0.1	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.1	0.1	0.2	0.0	0.1
$s_{15}$	0.7	0.1	0.1	0.0	0.1	0.0	0.1	0.2	0.0	0.1	0.0	0.1	0.2	0.2	0.0

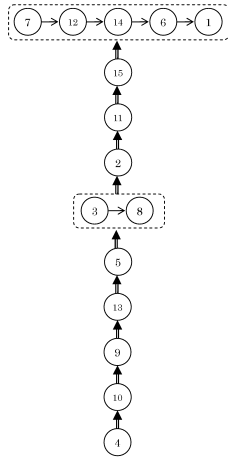


図 5 有向グラフ ( $w = 0.84, k = 10$ )

に適用可能なこのデータを GSM により有向グラフを獲得する. 基準数列  $x_{R0}$  は, 先の例と同じく,

$$\begin{aligned} x_{R0} &= \{x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(15)\} \\ &= \{0, 0, \dots, 0\} \end{aligned}$$

とする.

図 5 から図 7 は GSM にて得られた有向グラフである. FSM ではパラメータ  $\lambda, p$  によってグラフを調整することができる. 同様に, GSM においてもパラメータ  $w$  または  $k$  によって類似な複数のグラフを獲得することができる.

### 5.3 $[X_R]$ および $[X_C]$ の構造化例

表 3 は, 学生  $s(s_1, \dots, s_9)$  における, ある課題に対する学習の進捗状況である [6]. 各学習者  $s_i$  は, 学習項目  $t(t_1, \dots, t_{10})$  をすべて理解することを目標とする. 学習者  $s_i$  が項目  $t_j$  を学習し, 理解したのであれば 1, 未学習または理解をしていなければ 0 とする. 表 3 を基に, 学習の進行が早い者とそうでない者を区別するために,  $s$  を GSM にて構造化することを試みる. また, 学習者にとって理解しやすい項目とそうでない項目を区別するために,  $t$  を GSM

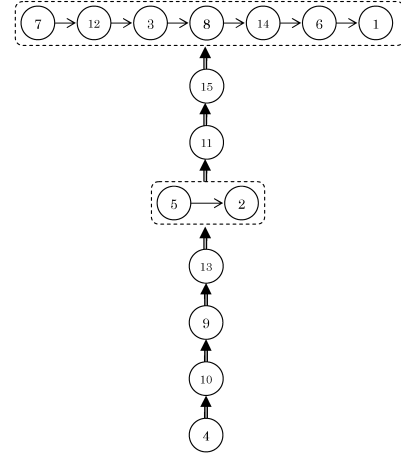


図 6 有向グラフ ( $w = 0.83, k = 8$ )

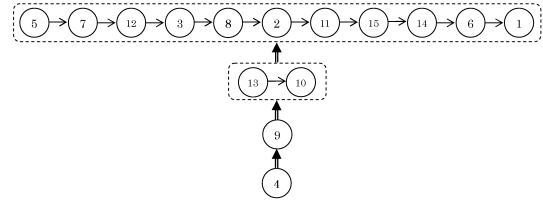


図 7 有向グラフ ( $w = 0.82, k = 4$ )

にて構造化する.

$s$  を構造化する場合, 比較数列行列は表 3 を用いて  $[X_R]$  とする.  $t$  を構造化するのであれば, 比較数列行列は表 3 を転置させた  $[X_C]$  となる. 基準数列  $x_{R0}, x_{C0}$  は共に,

$$\begin{aligned} x_{R0} &= \{x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(10)\} \\ &= \{1, 1, \dots, 1\} \\ x_{C0} &= \{x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(9)\} \\ &= \{1, 1, \dots, 1\} \end{aligned}$$

とする.

GSM を適用した結果, 図 8 および図 9 に示す有向グラフが得られている. 図 8 では, 下位層よりも上位層の学習者が進行が早いことを表している. 同一階層の学習者同士では, 矢印の向きにより進行の早い学習者を表現している. 同様に, 理解した学習者の多い項目とそうでない項目が図 9 により解釈が可能である.

## 6. 考察

### 6.1 既存の方法との比較

表 4 は, 既存の構造化手法である ISM, FSM と本稿で提案している GSM の各特徴を比較した表である. 取り扱いデータは, ISM, FSM, GSM となるにつれて拡張されていることが表 4 から読み取れる. 特に, 取り扱う集合の性質が各手法ともに全く

表 3 学習者と学習進捗状況の関係 [6]

	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$
$s_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$s_2$	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$s_3$	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
$s_4$	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1
$s_5$	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0
$s_6$	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
$s_7$	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
$s_8$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$s_9$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

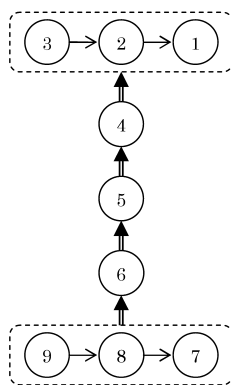


図 8 学習者の有向グラフ ( $w = 0.93, k = 5$ )

異なっている。ISM, FSM は項目間の因果関係を直接的に表現する値であるのに対し、GSM は任意に観測された値を取り扱う。直接的な因果関係から、間接的な連立方程式のような特係式まで含まれるようになっていく。連立方程式的な関係が二項関係の推移性から導き出された間接的な情報を重ね合わせて出力情報を生成している。

ISM は入力されたデータにより階層数が固定となる。FSM, GSM は分析者が操作を加えることにより階層数が可変となる。特に、GSM では階層数の調節方法を 2 種類提案しているため柔軟性が高い。

サイクリックパスは一定項目間を巡回する構造であり、存在しないことが望ましい。ISM ではサイクリックパスの回避は手続き上できない。FSM では操作次第で回避できることが報告されている [2]。GSM においても構造化処理を行うことで回避することができる。

同一階層項目同士において優先順位があれば、その手法は比較が可能であることを示している。ISM および FSM では同一階層項目間の比較は難しい。比較できる状態はサイクリックパスになっている状態である。GSM ではパスが常に同じ方向になるように処理していることから、同一階層項目の比較が可能である。

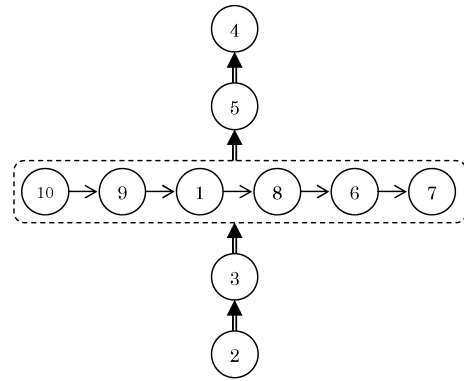


図 9 学習項目の有向グラフ ( $w = 0.92, k = 5$ )

## 6.2 GSM の特徴

上述の比較から本稿で提案する GSM の特徴をまとめると以下ようになる。

1. 取り扱い可能なデータの集合が拡張されている
2. 因果関係が間接的なデータの構造化が可能
3. 同一階層の項目同士の比較が可能
4. 階層数の指定が可能

本稿では階層数の指定できる方法を 2 種類提案している。そのため、既存の手法に対してより人間の考えに合ったシミュレートが可能となっていることがわかる。GSM は FSM をさらに拡張し、制約を緩和した手法となっている。

GSM は既存の手法と異なり、初期構造獲得のための基準値、すなわち基準数列  $x_{R0}, x_{C0}$  を必ず与えなければならない。基準数列獲得のために従来の手法よりも工数が増えることが考えられる。また、誤った値を入力すると適切な有向グラフを得ることができなくなる。したがって、基準数列の設定は正しく行わなければならない。基準数列に対する検定などが求められる。しかし、ISM や FSM における、二項関係データの対比較法による直接的なデータ入力は作業効率がよいとは限らない。GSM では観測値をそのまま導入可能なため、データ獲得のための工数が削減可能である。

## 7. おわりに

本論文では、灰色理論を用いたシステムの構造モデルである GSM を提案した。灰色分析を数理拠点とする本手法は、 $w$ -GSM,  $k$ -GSM の二種類を示し、既存の方法よりも柔軟性が向上する方法であることを示した。二項関係および取り扱いデータの拡張により、既存の方法よりも多くのデータに対して有向グラフの獲得が可能となった。適用例を 3 点示し、多数の有向グラフを獲得したことから、本手法によりシステムの構造化が可能であることを示した。

適用例を基に既存の方法と比較検討したところ、取り扱い可能なデータは従来よりも拡張された。現

表 4 三種の構造化方法の比較

	ISM	FSM	GSM
適用集合理論	クリस्प集合	ファジー集合	灰色集合
入力値の二項関係	代数的二項関係	ファジー数的二項関係	連立方程式関係
取り扱いデータ	0,1 の 2 値	[0,1] の実数	任意の実数
入力データの因果関係	確定的既知値	あいまいな既知値	間接的既知値
階層数	固定	可変可能	可変可能
矢印結線の二股可能性	ある	ある	少ない
サイクリックパス	避けられない	避けられる	避けられる
同一階層項目同士の比較	不可	ほぼ不可	可

在の GSM では、階層数の調整は可能であるが、グラフの有方向表現における柔軟性が欠けている。有方向表現アルゴリズムの改善が今後の課題となる。また、初期構造獲得のための基準数列が適切かどうか判定する処理についても今後検討していくことが必要となる。

### 参考文献

- [1] J. N. Warfield, "Binary Matrices in System Modeling," IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, vol.SMC-3, no.5, pp.441-449, Sept. 1973.
- [2] 田崎栄一郎, 天笠三知夫, 滝沢雅人, "あいまい理論によるシステムの構造モデル," 日本オペレーションズ・リサーチ学会論文誌, vol.20, no.4, pp.285-310, Dec. 1977.
- [3] D. Julong, "The control problems of grey systems," Systems & Control Letters, no.5, pp.288-294, North-Holland, 1982.
- [4] 鄧聚龍(著), 趙君明, 北岡正敏(訳), 灰色理論による予測と意思決定, 日本理工出版会, 1999.
- [5] 永井正武, 山口大輔, 灰色理論と工学応用方法入門, 共立出版, 2004.
- [6] 小林俊裕, 水谷晃三, 山口大輔, 池本 悟, 永井正武, "学習経路提示とグループ化による Web 教育への一提案," 情報処理学会第 66 回全国大会, 4Q-4, Mar. 2004.