

平面グラフが凸図形の Voronoi 図であることの確認法

今井 敏行

和歌山大学・システム工学部
timai@sys.wakayama-u.ac.jp

概要

図形処理において、近似アルゴリズムの実装や、厳密アルゴリズムの計算誤差のある実装では、出力図形が正しいかどうかはわからない。点の Voronoi 図の構成においては、点の Voronoi 図の双対である Delaunay 図に関する定理があり、それを用いて局所的な判定で真の Voronoi 図であるか確認できる。本稿では、この定理を拡張し凸図形の Voronoi 図の構成に適用できるようにし、その証明を与える。この定理により、凸図形の Voronoi 図に構成に関して、近似アルゴリズムを利用して厳密解をもとめられるようになる。

How to Confirm that a Planar Graph is a Voronoi Diagram for Convex Objects

Toshiyuki Imai

Wakayama University, Faculty of Systems Engineering
timai@sys.wakayama-u.ac.jp

Abstract

In Geometric processing, implementations of approximated algorithms or those of exact algorithms with numerical errors do not guarantee the the correctness of the output. For the construction of Voronoi diagrams for points, a theorem related to the Delaunay diagram, which is the dual of the Voronoi diagram for points, gives us a local test to confirm that the output is the correct Voronoi diagram. In this paper, the theorem is extended to apply to the construction of the Voronoi diagrams for convex objects and the proof is given. This theorem allows us to obtain the correct Voronoi diagram for some convex objects by using an approximated algorithm.

1 はじめに

Voronoi 図は平面上に与えられた n 個の点に対して、どの点に近いかを基準にした勢力圏による平面分割である (図 1)。アルゴリズム的には、入力が点集合、出力が勢力圏の境界を示す平面グラフであるといえる。通常は、入力の 3 点が同一直線上にあったり 4 点が同一円周上であるという例外的な状況 (退化) を規定し、そういう状況にないという非退化仮定においてアルゴリズムが構築される。これをプログラムとして実装すると、非退化仮定が崩れるとき、すなわち、退化であるときや、退化に近く、計算誤差が退化と同様の動作を引き起こすとき、無限ループや異常終了、データ破壊、正しくない出力などが発生することがある。つまり、非退化な入力でも、十分な計算精度で実行するようプログラムを実装しない限り、たとえ出力が得られても、正しい Voronoi 図であることの保証はない。

一般に図形処理では、対象図形を位相情報と計量情報に分けて扱うことができる。位相情報とは、図形を構成する辺や面、頂点などの個数や接続・隣接関係など図形の構造に関する離散値からなる情報で、位相情報から得られる図形の構造を位相構造とよぶ。計量情報とは、座標値や長さ、角度などの連続値をとる量的

情報で、位相構造が定まってから求めることができる。Voronoi 図の構成において出力が真の Voronoi 図でないとは、位相構造が異なることをいう。この場合、位相構造から計量情報を無限の精度で求めても真の Voronoi 図にはならない。

通常の精度による出力が得られているとき、それが正しい Voronoi 図かどうかを高精度の計算で判定することは、 $O(n)$ の計算量の判定法が知られている ([1, 3])。Voronoi 図の平面グラフとしての複雑度 (枝数, 節点数) は $O(n)$ であり、この判定法は最適の計算量をもつ。

Voronoi 図の入力を点からより一般の図形にして同様の勢力圏分割を考える。入力がある凸図形なら、そのような勢力圏分割は存在し (図 2)、これも Voronoi 図とよぶことにする。例えば、円や線分、凸多角形の Voronoi 図を考えることができる。このような凸図形の Voronoi 図の構成でも、図形の種類ごとに非退化仮定において、それぞれアルゴリズムが構築され、通常の実装プログラムでは、出力が正しい Voronoi 図である保証はない。本稿では、出力が正しい Voronoi 図であるかどうかの判定法を示し、その正当性を証明する。この判定法は入力が点の場合の判定法の拡張になっている。

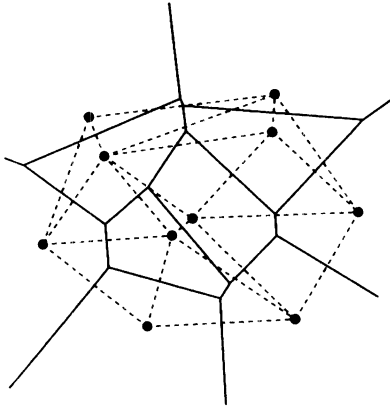


図 1. 点の Voronoi 図 (実線) と Delaunay 図 (破線)

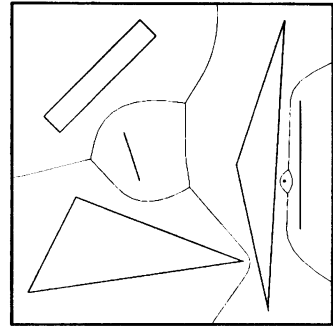


図 2. 凸図形の Voronoi 図

2 点の Voronoi 図の性質と Voronoi 図であることの確認法

本節で点の Voronoi 図に関して、その性質と、Voronoi 図であることの確認法についてまとめる。入力として与えられた点を $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbf{R}^2$ とし、生成元とよぶ。平面 \mathbf{R}^2 上の任意の点 $p \in \mathbf{R}^2$ に対して、 $d(p, p_i) = |p - p_i|$ とする。ただし点を位置ベクトルとみなし、 $|\bullet|$ はベクトルの長さを表す。すなわち、 $d(p, p_i)$ は点 p から生成元 p_i までの距離である。生成元 p_i と p_j から等距離にある点の集合を $B(p_i, p_j)$ とし、 p_j より p_i に近い点の集合を $D(p_i, p_j)$ とする:

$$B(p_i, p_j) = \{p \in \mathbf{R}^2 \mid d(p, p_i) = d(p, p_j)\} = B(p_j, p_i), \quad D(p_i, p_j) = \{p \in \mathbf{R}^2 \mid d(p, p_i) < d(p, p_j)\}.$$

$B(p_i, p_j)$ は直線になり、これを p_i, p_j の等距離線とよぶ。 $D(p_i, p_j)$ は等距離線を境界とする半平面になる。生成元 p_i の勢力圏 $V(p_i)$ を、

$$V(p_i) = \bigcap_{j \neq i} D(p_i, p_j) \quad (1)$$

で定め、 p_i の Voronoi 領域とよぶ。 $V(p_1), V(p_2), \dots, V(p_n)$ は平面の分割を定める。この平面の分割を、点の Voronoi 図という。

ある 3 生成元が同一直線上にあるか、4 生成元が同一円周上にあるとき、生成元が退化の位置にあるという。生成元が退化の位置にないとき、非退化であるという。本稿では非退化の場合のみ考える。

隣接する二つの Voronoi 領域の共通境界を Voronoi 辺という。Voronoi 辺の端点を **Voronoi 点**とよぶ。Voronoi 点は三つの Voronoi 領域の共通境界であり、三つの Voronoi 辺が集まる。Voronoi 辺には有界(直線分)および非有界(半直線)なものがあるが、これらを枝、Voronoi 点を節点とすることで、点の Voronoi 図を、非有界枝をもつ平面グラフとみなすことができる。

この平面グラフの双対グラフを、Voronoi 領域が隣接する時に対応する生成元の点どうしを直線分で結ぶことで得ると、非有界枝に対応する双対グラフの枝が凸包を構成し、双対グラフは生成元の凸包の三角形分割になる。この三角形分割は **Delaunay 図**とよばれる。平面グラフとして、Delaunay 図の双対グラフから Voronoi 図を得ることができる(図 1)。

一般に、生成元の凸包を、生成元を頂点とする三角形で分割した平面グラフにおいて、凸包の辺以外の枝は、その両側に三角形が接続する。枝 $p_i p_j$ に対して、この両側の三角形を $p_i p_j p_k$, $p_j p_i p_l$ とすと、 p_i, p_j, p_k を通る円が p_l を内部に含むことと、 p_i, p_j, p_l を通る円が p_k を内部に含むことは同値になり、このとき、辺 $p_i p_j$ はフリップ可能といい、辺 $p_i p_j$ を消去して辺 $p_k p_l$ を追加し新しい三角形分割をつくることを **Delaunay フリップ**という(図 3)。Delaunay 図に対して次の定理が成立する([1, 3])。

定理 1: 生成元を頂点とする凸包の三角形分割にフリップ可能な辺がなければ三角形分割は Delaunay 図である。

本稿で対象とする、実装されたプログラムによる出力図は、生成元を頂点とする凸包の三角形分割の双対グラフであるとする。ただし、凸包の外の領域の双対は無限遠点にとる。これは Voronoi 図に準じた位相構造をもつ。すなわち、すなわち出力のグラフの各枝(Voronoi 辺)からは両側に接続する領域(Voronoi 領域)、枝の両端点(Voronoi 点)などが参照でき、他に節点(Voronoi 点)から接続領域や接続辺領域からは接続辺などが参照できるとする。非有界な枝の両側の領域の生成元は凸包上で隣接するとする(これは別に容易に判定できる)。この出力を擬似 Voronoi 図とよぶ。擬似 Voronoi 図でも Voronoi 辺、Voronoi 点、Voronoi 領域などの用語を援用する。擬似 Voronoi 図の双対の三角形分割の枝 $p_i p_j$ とその両側の三角形 $p_i p_j p_k$, $p_j p_i p_l$ に対応するものは、擬似 Voronoi 図では、それぞれ、 p_i, p_j の Voronoi 領域を両側にもつ Voronoi 辺、その両端の Voronoi 点(それぞれ p_i, p_j, p_k および p_j, p_i, p_l の Voronoi 領域に囲まれる)である。このとき、この Voronoi 辺は、 p_i, p_l, p_j, p_k で囲まれている、あるいは、 p_i, p_j の間にある、あるいは、 p_k, p_l で止められている、ということにする。特に、三角形の頂点の順序が時計回りか逆かに応じて生成元が Voronoi 点や Voronoi 辺を囲む向きを定める。これらの情報は出力の位相構造のみから組合せ的に確定する。擬似 Voronoi 図では、Voronoi 点は計量情報は、双対な三角形の外心、Voronoi 辺は Voronoi 点間をつなぐ直線として得られるため、出力の位相情報から得られる Voronoi 辺を反時計回りに囲む生成元の順番は計量情報から再計算すると同じ順になるとは限らない(図 3)。三角形分割でこの枝 $p_i p_j$ がフリップ不可能であることは、4 生成元 p_i, p_j, p_k, p_l からなる真の Voronoi 図を描くと、 p_i, p_j の Voronoi 領域が隣接すること、すなわち、この 4 生成元で囲まれ、 p_i, p_j の間にある Voronoi 辺が存在することと言い換えられる(図 3)。これから、定理 1 を擬似 Voronoi 図の用語で書き換えると、

定理 2: 擬似 Voronoi 図の任意の有界な Voronoi 辺 e が、辺 e を囲む 4 生成元の真の Voronoi 図の Voronoi 辺でもあるとき、擬似 Voronoi 図は真の Voronoi 図である。

となる。これは擬似 Voronoi 図が真の Voronoi 図であることの確認を、Delaunay 図に依らず、局所的な判定だけで行う方法を示している。擬似 Voronoi 図は $O(n)$ の本数の Voronoi 辺を持つから、この方法で真の Voronoi 図であるかどうかを判定すると $O(n)$ の計算時間ですむ。入力 n 点の Voronoi 図の構成にかかる計算時間は $O(n \log n)$ が理論的に最適で、計算量が $O(n^2)$ である逐次添加法によるものも実装が比較的容易なためよく使われる。したがって、定理 2 の方法により、真の Voronoi 図であるかどうかの判定を Voronoi 図構成より効率的に行うことができる。

定理 1 の証明として, xy 平面から放物面 $z = x^2 + y^2$ への持ち上げ写像 $(x, y) \mapsto (x, y, x^2 + y^2)$ を用いるもの ([1, 3]) が有名である. この写像で Delaunay 図を放物面へ持ち上げると, 持ち上げられた生成元の点集合の下側凸包になり, Delaunay フリップは, 下に凸でない部分を凸にする局所変形として解釈できる (図 4). この解釈により, 定理 1 は直感的にも明らかに証明され, 定理 2 も同時に証明されるが, この証明は生成元が点であることに依存しているため, そのままでは, 一般化 Voronoi 図には適用できない. 本稿では, 定理 2 が生成元が凸図形に拡張された場合にも成立することを証明する.

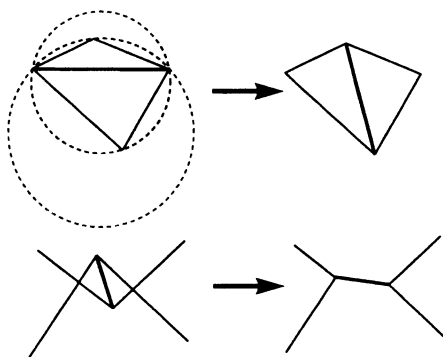


図 3. Delaunay フリップと双対の疑似 Voronoi 図

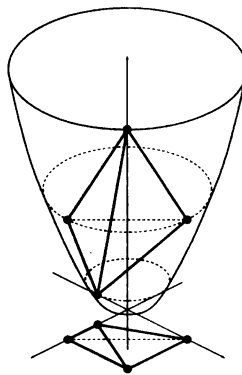


図 4. 持ち上げ写像

3 凸図形の Voronoi 図の性質

本稿では凸図形とは, 凸多角形や円盤, 線分, 点のように, 平面 \mathbb{R}^2 上の有界かつ凸な閉領域のこととする.

凸図形を生成元とする Voronoi 図について考える. g_1, \dots, g_n をどの二つも共有点をもたない凸図形とし生成元とよぶ. 平面上の点 p に対して, 点の Voronoi 図と同様に, $d(p, g_i) = \min\{|p - q| \mid q \in g_i\}$ と定め, p から g_i までの距離とよぶ. g_i が凸図形であるから $d(p, g_i) = |p - q|$ となる点 $q \in g_i$ は p に対し唯一つ定まる. この点 q を p から g_i への射影点とよぶ. また, p と q を結ぶ線分を射影線分とよぶ. 生成元 g_i, g_j の等距離線 $B(g_i, g_j)$, g_j より g_i に近い点の集合を $D(g_i, g_j)$ を点 Voronoi 図と同様に定める. 凸図形であることから, 等距離線は非有界な連結曲線, $D(g_i, g_j)$ は非有界で単連結な領域になる. 点 Voronoi 図と同じように, 生成元 g_i の勢力圏 $V(g_i)$ を,

$$V(g_i) = \bigcap_{j \neq i} D(g_i, g_j) \quad (2)$$

で定め, g_i の Voronoi 領域とよぶ. $V(g_1), V(g_2), \dots, V(g_n)$ は平面の分割を定める. この平面の分割を, 凸図形の Voronoi 図という (図 2).

凸図形の Voronoi 図でも Voronoi 領域, Voronoi 辺, Voronoi 点を同様に考えることができる.

任意の 3 生成元が同一直線に接するか, 4 生成元が同一円周 (直線を含む) に接するとき退化と定め, 本稿では非退化を仮定する.

凸図形の Voronoi 図では領域が 2 辺以上で隣接することがあり (図 2), 連結な各辺をそれぞれ Voronoi 辺とよぶ. したがって両側の生成元では Voronoi 辺を特定できないが, 反時計回りに囲む 4 生成元を指定することにより Voronoi 辺を特定できる (図 5).

4 生成元 g_i, g_k, g_j, g_l で真の Voronoi 図を構成して, 4 生成元がこの順に反時計回りに囲み, g_i, g_j の間にある真の Voronoi 辺 e が存在するとき, e の両端の Voronoi 点 u, v は, それぞれ反時計回りに g_i, g_j, g_k および g_i, g_l, g_k で囲まれる. このとき, Voronoi 図の定義から, Voronoi 辺 e 上の任意の点 p を中心とし, g_i, g_j に q_i, q_j で接する円で内部に 4 生成元のどれも含まない円 (空円) が存在する. このとき, q_i, q_j は p から g_i, g_j

への射影点になる。この射影点と中心を結ぶ射影線分を考えると、Voronoi 図の定義より、 e 上の任意の 2 点において、射影線分は端点以外を共有しない。

Voronoi 辺が非有界なことで、その両側の生成元が凸包を構成し、それらの Voronoi 領域が隣接することが同値である。Voronoi 図が平面グラフであることから、非退化仮定のもとでは Voronoi 辺と Voronoi 点の数は生成元数 n と凸包上の生成元数により、その他の生成元の配置によらず定まる。

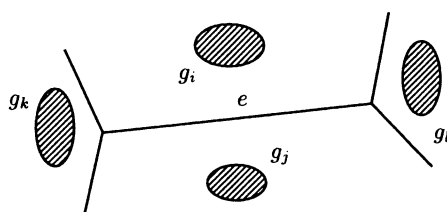


図 5. Voronoi 辺を囲む 4 生成元

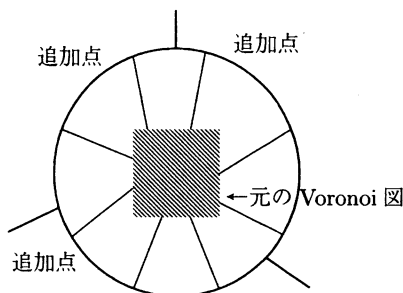


図 6. 3 点の生成元への追加 (模式図)

4 凸図形の Voronoi 図であることの確認法

本稿で凸図形の疑似 Voronoi 図とは、実装プログラムの出力として、(a) 真の Voronoi 図と同様に、Voronoi 領域や Voronoi 辺、Voronoi 点などの個数および隣接、接続に関する位相構造の情報をもつ平面グラフで、(b) 非有界な Voronoi 辺の両側の生成元は正しく生成元の凸包を反映しているものとする。このうち、(a) は出力として当然の仮定であり、(b) は、出力の位相情報から得られる凸包が真の凸包であることは別判定で確認するということである。疑似 Voronoi 図の計量情報は位相情報から正確に計算されるものとする。点の Voronoi 図と同様に次の定理が成り立つ。

定理 2': 疑似 Voronoi 図の任意の有界な Voronoi 辺 e が、辺 e を囲む 4 生成元の真の Voronoi 図の Voronoi 辺でもあるとき、疑似 Voronoi 図は真の Voronoi 図である。

以下ではこの定理を証明する。

まず、すべての生成元を内部に含む非常に大きい三角形の 3 頂点を生成元に加える。これら 3 点を十分に遠くにとれば、もとのどの生成元との等距離線も非有界な Voronoi 辺のみと遠くでしか交わらないから、既存の Voronoi 点すべてを残して、真の Voronoi 図と疑似 Voronoi 図を書き換えることができる (図 6)。これでももとの生成元の Voronoi 領域はすべて有界になり有限の面積をもつ。また、ここで付け加えた 3 点の Voronoi 領域は真の Voronoi 図と疑似 Voronoi 図で一致し、この 3 点の Voronoi 領域以外の部分は有界であり、一致した面積 S をもつ。

次に生成元を微小量 ϵ だけたらせる。すなわち、生成元 g_i を $g'_i = \{(x+p, y+q) \mid (p, q) \in g_i, x^2 + y^2 \leq \epsilon\}$ でおきかえる (図 7)。すべての生成元が面積をもち、境界が円周と同相になるが、 ϵ が小さく、生成元が互いに離れたままなら Voronoi 図には変化がない。なぜなら、生成元外の任意の点から生成元までの距離が一律 ϵ だけ小さくなり、等距離線に変化がないからである。

付け加えた 3 生成元を除く生成元の面積の合計を S' とおく。

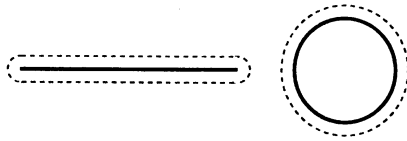


図 7. 生成元の置き換え

疑似 Voronoi 図で, 生成元 g'_i の Voronoi 領域の周に生成元を時計回りにまわる向きをつけ, Voronoi 辺ごとに分け e_{ij} ($j = 1, \dots, j_i$) と名付ける (j_i は g'_i の領域の周上の辺の本数). したがって, 後から加えた外側 3 生成元の Voronoi 領域に面した Voronoi 辺以外には, 両側の生成元に対応して二つの名が付き向きが逆になる (図 8).

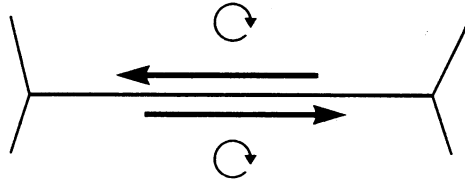


図 8. Voronoi 辺の向き付け

Voronoi 辺 e_{ij} の両端の Voronoi 点から g'_i への射影線分と e_{ij} , g'_i の周 (の一部) で閉路をつくることができる. これに e_{ij} と同期した向きをつけ, $c_{ij}(s) = (x_{ij}(s), y_{ij}(s))$ とかく. パラメタ s は曲線長にとる. この c_{ij} で各 Voronoi 領域が細分され (図 9), $S - S' = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_{c_{ij}} (y_{ij} \frac{dx_{ij}}{ds} - x_{ij} \frac{dy_{ij}}{ds}) ds$ が成立する. なぜなら, 右辺の積分は線積分であり, 経路に沿って逆向きの積分は打ち消し合い, 積分として残るのは, 後から加えた外側 3 生成元の Voronoi 領域に面した Voronoi 辺に沿った時計回りの周回積分と, 各生成元の周を反時計回りにまわる周回積分だけだからである.

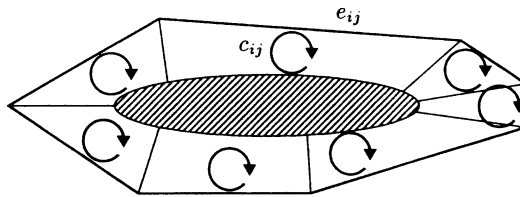


図 9. Voronoi 領域の細分

定理の前提が満たされる, すなわち, 疑似 Voronoi 図の任意の Voronoi 辺 e_{ij} が生成元 g'_i, g'_c, g'_a, g'_d に囲まれるとき, この 4 生成元で構成した真の Voronoi 図が e_{ij} と同一の Voronoi 辺をもつとする. e_{ij} が g'_i, g'_a の間にあるとする. 定理の前提から, e_{ij} 上の任意の点 p を中心とする円で, g'_i, g'_a に接し, 4 生成元を内部に含まないものが存在する. これは, 点 p を e_{ij} 上つけられた向きに沿って動くと, その点から g'_i への射影点 q が g'_i の周上を単調に時計回りにまわることを意味する (図 10). したがって g'_i の周上の点 q と領域の周上の点 p は一対一に対応する. p を中心とし, q を通る (g'_i に接する) 円を q に付随する円とよぶ. また, 閉路 c_{ij} は時計回りの (自己交差のない) 閉路となる. つまり, $\int_{c_{ij}} (y_{ij} \frac{dx_{ij}}{ds} - x_{ij} \frac{dy_{ij}}{ds}) ds > 0$ が成り立つ.

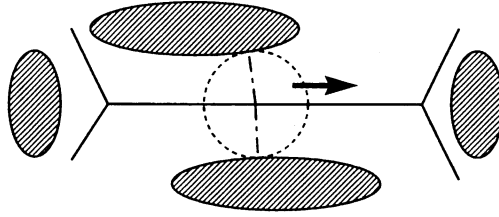


図 10. 円と射影点の移動

真の Voronoi 図と疑似 Voronoi 図で生成元 g_i の Voronoi 領域と隣接する Voronoi 領域の生成元全体の集合をそれぞれ, N_i, N'_i とすると, N_i, N'_i に属する生成元と g'_i の等距離線が g'_i の Voronoi 領域をそれぞれ, 構成する. $N'_i \subseteq \{g'_1, \dots, g'_n\} - \{g'_i\}$ であるから

$$\bigcap_{g'_j \in N'_i} D(g'_i, g'_j) \supseteq \bigcap_{j \neq i} D(g'_i, g'_j) = \bigcap_{g'_j \in N_i} D(g'_i, g'_j).$$

左辺が疑似 Voronoi 領域, 右辺が真の Voronoi 領域である.

定理の結論が成立しない, すなわち, 疑似 Voronoi 図が真の Voronoi 図でないとして, 疑似 Voronoi 図の Voronoi 領域で真の Voronoi 図のものとは一致しないものがある. この Voronoi 領域の生成元を g_k とする.

$$\bigcap_{g'_j \in N'_k} D(g_k, g'_j) \supset \bigcap_{j \neq k} D(g_k, g'_j) = \bigcap_{g'_j \in N_k} D(g_k, g'_j).$$

すなわち g'_k の疑似 Voronoi 領域は真の Voronoi 領域より真に広く, 他の生成元の疑似 Voronoi 領域も真の Voronoi 領域より狭くはない. したがって, 疑似 Voronoi 図において g'_1, \dots, g'_n の Voronoi 領域の面積の総和は, 真の Voronoi 図における Voronoi 領域の面積の総和より大きい:

$$S - S' < \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left| \int_{c_{ij}} \left(y_{ij} \frac{dx_{ij}}{ds} - x_{ij} \frac{dy_{ij}}{ds} \right) ds \right|.$$

しかし, これは $\int_{c_{ij}} \left(y_{ij} \frac{dx_{ij}}{ds} - x_{ij} \frac{dy_{ij}}{ds} \right) ds > 0$. に反する. (証明終)

つまり, 疑似 Voronoi 図で Voronoi 領域を小部品に細分しておいて, 各 Voronoi 辺で局所的に真の Voronoi 図なら裏返らない (面積正) が, 大域的に真の Voronoi 図でなければ Voronoi 領域は増大するので矛盾が生じるということである.

一般の凸図形に対してとなると, 定理 2' の前提はオラクルとして確認できるとするしかないが, その計算時間を定数とすると, Voronoi 辺の総数は $O(n)$ であるから, 疑似 Voronoi 図が Voronoi 図であることの確認は $O(n)$ の計算時間でできることになる. また, 等距離線がたとえ正確に計算できなくても, 疑似 Voronoi 辺を囲む 4 生成元から, 局所的にこの 4 生成元の真の Voronoi 図の位相構造だと確認できれば, すなわち, この 4 生成元で確かにそこにその Voronoi 辺があると言えれば, 大域的に真の Voronoi 図であると結論できる.

5 まとめと課題

実装プログラムが出力した疑似 Voronoi 図が真の Voronoi 図であることを確認することは, 凸図形の Voronoi 図においても点の Voronoi 図と同様に, 各 Voronoi 辺に対して, 局所的な判定をすることで可能な

ことを示した。Voronoi 辺ごとの局所的な判定は Voronoi 辺を囲む 4 生成元に対して行なうため定数時間で済むといえ、この確認法にかかる計算時間は全体で $O(n)$ である。

この確認法では非退化が仮定されているが、退化時の対処は今後の課題である。また、この確認法は、近似アルゴリズムで擬似 Voronoi 図を構成し、真の Voronoi 図であると確認できるまで、近似精度を高めていく反復法型の凸図形の Voronoi 図構成アルゴリズムを設計するのに利用できる。この型のアルゴリズムは、従来の、生成元の凸図形を多数の点で一様に近似して点の Voronoi 図から凸図形の Voronoi 図の近似を求めるアルゴリズム ([2, 6, 7]) に較べて、出力が真の Voronoi 図であるうえ、近似が一様でなく必要な部分を高精度に近似するだけで済むので、結果として高速性も期待できる。従来、真の Voronoi 図を得る厳密アルゴリズム ([4, 5]) は、円盤、線分、凸多角形のように、生成元ごとに個別にアルゴリズム設計が必要であったが、この型のアルゴリズムでは出力の厳密性を損なうことなく近似アルゴリズムで一貫した処理できる可能性がある。円盤、線分、凸多角形といった、等距離線を計算できる凸図形の具体例に対して、このような型の Voronoi 図構成アルゴリズムの構築と、計算速度の解析は今後の課題である。また、凸図形以外の Voronoi 図に、このような真の Voronoi 図の確認法を適用できるかどうかの検討も今後の課題である。

参考文献

- [1] Edelsbrunner, H.: Algorithms in Combinatorial Geometry, Springer-Verlag, 1987.
- [2] Gold, C.: Voronoi diagram of line segments made easy, *Proc. the Seventh Canadian Conf. on Comp. Geom.*, pp. 223–228, 1995.
- [3] 今井浩, 今井桂子: 計算幾何学, 情報数学講座, 共立出版, 1994.
- [4] 今井敏行, 杉原厚吉: 計算誤差に強い線分 Voronoi 図の構成法, 情報処理学会論文誌, Vol. 35, No. 10, pp.1966–1976, 1994.
- [5] Karavelas, M. I: A robust and efficient implementation for the segment Voronoi diagram, *Abst. The International Symp. on Voronoi Diagrams in Science and Engineering*, pp. 51–62, 2004.
- [6] 杉原厚吉: 計算幾何工学, アドバンスト エレクトロニクス シリーズ II-2, 培風館, 1994.
- [7] 山田和広, 杉原厚吉: 一般図形 Voronoi 図の近似構成法とその改良, 情報処理学会研究報告 96-AL-51, pp.9–16, 1996.