2005－AL－99　(2)
2005／1／20

点ボロノイ図を利用した 線分ボロノイ図の位相構造決定法

渡辺秀臣 †　　　今井敏行 ‡
† 和歌山大学大学院 システム工学研究科
‡ 和歌山大学 システム工学部

概 要

与えられた線分をいくつかの点に置き換えて、その点ボロノイ図から線分ボロノイ図を近似構成する事ができる。しかし、本来の線分ボロノイ図の位相構造と同じである事を保証した近似構成法はまだなかった。そこで本稿では、線分を両端点に置き換え線分上に点を追加して逐次的に近似構成していくと同時に、各ボロノイ辺を調べる事で本来の位相構造と同じであるかどうかを判定し、近似構成での線分ボロノイ図の位相構造を決定する方法について述べる。

A Method for Determining the Topological Structure of Voronoi Diagram for Segments by Using Voronoi Diagram for Points.

Hideomi Watanabe †　　　Toshiyuki Imai ‡
†Graduate School of Systems Engineering, Wakayama University
‡Faculty of Systems Engineering, Wakayama University

Abstract

An approximate Voronoi diagram for segments can be constructed from the Voronoi diagram for points by replacing each segments with some points. There is no algorithm for approximate construction which guarantees that the topological structure of approximated diagram is exactly the same as the original Voronoi diagram for segments. This paper describes how to determine the topological structure of a Voronoi diagram for segments from the approximated one. First, all segments are replaced with the endpoints to construct the initial approximate Voronoi diagram for the endpoints and then the diagram is modified by adding internal points of the segments in certain manner until it is judged that the approximate diagram has the same topological structure as the original Voronoi diagram only by investigating Voronoi edges of the approximated diagram.

1　はじめに

平面上に有限個の点からなる集合が与えられているとき、ある質問点からどの点にもっとも近いのかを表すために、領域とそれらの境界で分割した図形を**点ボロノイ図**と呼ぶ [1,3,4]。同様に平面上にお互いに交差しない有限個の線分からなる集合が与えられているとき、ある質問点からどの線分にもっとも近いのかを表すために、領域とそれらの境界で分割した図形を**線分ボロノイ図**と呼ぶ [6]。線分ボロノイ図の近似構成法として与えられた線分をいくつかの点に置き換えてその点ボロノイ図から線分ボロノイ図の近似図形を得る手法がある [1,2,4]。この線分ボロノイ図の近似図形は本来曲線であるボロノイ辺を折れ線で近似する。そこで本来の線分ボロノイ図のボロノイ辺に近づけるために与えられた線分を充分な数の点に置き換える必要がある。しかし、このままでの近似構成法の利用には欠点がある。得られた線分ボロノイ図の近似図形には本来の線分ボロノイ図の位相構造 [1] と同じである事が保証されていない。線分ボロノイ図の位相構造は曖

味のまま近似図形として出力されている。そこで本稿では与えられた線分の両端のみを点に置き換えて近似構成法を適用した状態から、線分上に点の追加を繰り返しながら逐次的に線分ボロノイ図を近似構成させ、同時に本来の線分ボロノイ図の位相構造と同じである事を保証する方法を提案する。

2　準備

入力を任意としてそのボロノイ図には、入力に対して**ボロノイ領域**、2つのボロノイ領域の境界が共有する**ボロノイ辺**、3つ以上のボロノイ領域の境界が共有する**ボロノイ点**を持つ。また、ボロノイ領域に属する入力を生成元と呼ぶ。入力が点の場合は母点とも呼ぶ。ここでは入力の違いから点ボロノイ図と線分ボロノイ図を定義し、その性質を述べる。次に線分ボロノイ図の近似構成法のアルゴリズムとその問題点について述べる。

2.1　点ボロノイ図

点ボロノイ図とは、平面上に点集合 $P = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ が与えられた時、各生成元の領域を

$$V_P(p_i) = \{p \mid p \in \mathcal{R}^2, d(p, p_i) < d(p, p_j), j \neq i\} \tag{1}$$

とその境界に平面を分割するものである。ただし、$d(p, q)$ は2点 p, q のユークリッド距離を意味する。$V_P(p_i)$ は母点 p_i のボロノイ領域である。ボロノイ点はその周辺の3つの母点を通る空円の中心である。ボロノイ辺は両端のボロノイ点の間を移動するボロノイ辺で向かい合うボロノイ領域の生成元である母点2つを通る全ての空円の中心の軌跡である。

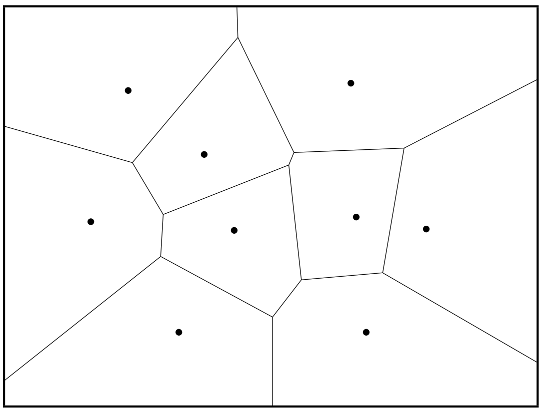

図 1: 点ボロノイ図

2.2　線分ボロノイ図

線分ボロノイ図とは、生成元を線分として、$S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ を互いに交差しない n 個の線分集合が与えられた時、各生成元の領域を

$$V_S(s_i) = \{p \mid p \in \mathcal{R}^2, d(p, s_i) < d(p, s_j), j \neq i\} \tag{2}$$

とその境界に平面を分割するものである。ただし、$d(p,s_i) = \min\{d(p,s) \mid s \in s_i\}$、すなわち $d(p,s_i)$ は線分 s_i 上の点と点 p との距離の最小値である。$d(p,s_i) = d(p,s)$ となる s_i 上の点 s を p から s への**射影点**呼ぶ。$V_S(s_i)$ は生成元 s_i のボロノイ領域である。ボロノイ点はその周辺の線分３つに接する空円の中心である。ボロノイ辺は両端のボロノイ点の間を移動するボロノイ辺で向かい合うボロノイ領域の生成元である線分２つを接している全ての空円の中心の軌跡である。

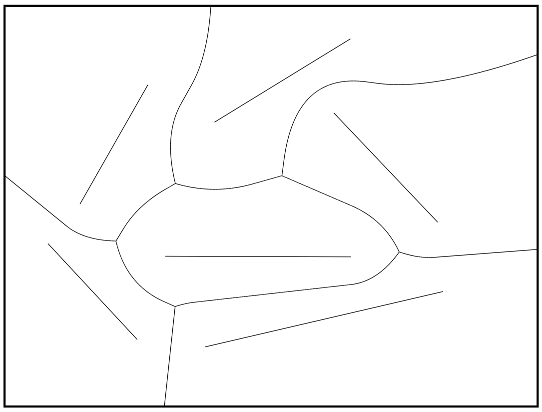

図 2: 線分ボロノイ図

2.3 線分ボロノイ図の近似構成法

アルゴリズム

手順 1 線分を点集合に置き換える

手順 2 点集合に対して点ボロノイ図を構成する

手順 3 点ボロノイ図から、同一の線分に属する点を分離するボロノイ辺をすべて除去し、残った図形を出力する

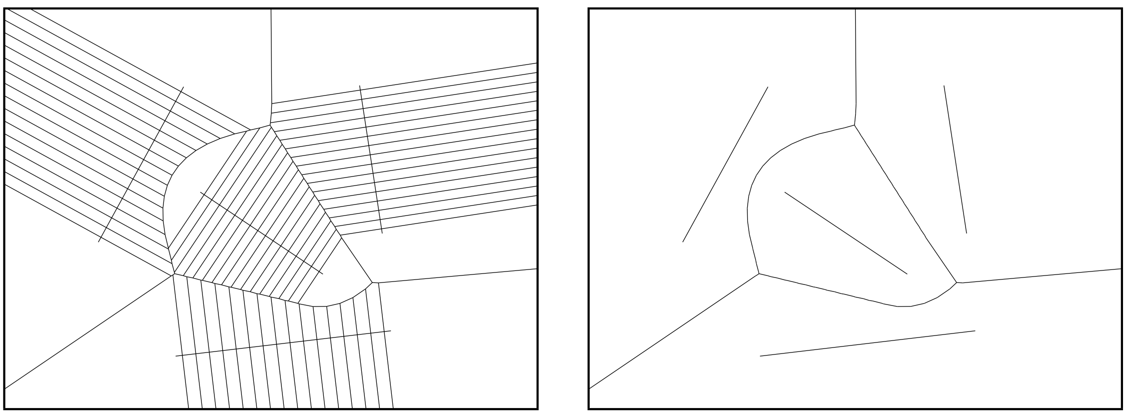

図 3: 線分ボロノイ図の近似構成法（左:手順２　右:手順 3）

この近似構成法の利点としては、点ボロノイ図で近似するので本来曲線であるボロノイ辺が折れ線によって近似され扱い易くなる事や入力を点で近似するので線分以外の一般図形に対しても有効な近似構成法となる事があげられる。問題点としては、このままの手法では得られる近似図形には本来の線分ボロノイ図の位相構造が保証されていない事があげられる。

3 アルゴリズム

本稿でのアプローチは、(1) 与えられた線分を両端点で置き換えて、それらの点から近似構成法で得られる線分ボロノイ図の近似図形を初期状態とし、線分上に点を追加する事で逐次的に線分ボロノイ図を近似構成すると同時に (2) その位相構造が本来の線分ボロノイ図の位相構造と同じである事を判定するものである。このアプローチでの (1) に関しては逐次添加型点ボロノイ図構成法と線分ボロノイ図の近似構成法によって導かれる [1,2,3,5]。また、初期状態での線分の両端点からの近似構成された線分ボロノイ図からは無限に伸びるボロノイ辺について本来の線分ボロノイ図と同じである事が保証されている。つまり、この後どのような点の追加が行われてもこの無限に伸びるボロノイ辺の総数は変わらない。そこで、重要なのは (2) のどのようにしてある状態の近似構成された線分ボロノイ図の位相構造が本来の線分ボロノイ図の位相構造と同じである事を判定するかである。この部分を具体的に提案アルゴリズムとして記述する。ただし、４つ以上の線分が同一円で接する位置にある事を退化として、このアルゴリズムは非退化仮定のもとで安定して動く事ができる。

提案アルゴリズム

- **手順 1** 全ての線分を両端の点に置き換える
- **手順 2** 近似構成し、全ての局所構造を未判定にする
- **手順 3** 未判定の局所構造について位相構造の判定を行う（全ての局所構造での位相構造が正しいと判定済の場合終了）
  - **手順 3.1** その局所構造での位相構造が正しい場合 ⇒ 判定済にして手順３に戻る
  - **手順 3.2** その局所構造での位相構造が間違っている場合 ⇒ 点を追加して手順２に戻る

局所構造とは近似構成されたボロノイ辺を作っている４つまたは３つ組の線分の事である。近似構成されたボロノイ辺はいくつかの点による点ボロノイ図の一部である。手順３では、近似構成された局所構造だけを注目してその位相構造が本来の線分によるボロノイ辺の性質から正しいか間違っているかを判定する。そして、近似構成された線分ボロノイ図の位相構造が本来のと同じである事は「全ての局所構造での位相構造が正しいと判定済の場合」によって決定される。言い換えると、１つでも局所構造での位相構造が間違っていると判定されると、その状態での近似構成された線分ボロノイ図の位相構造は本来のと同じであると決定する事はできない。点の追加に関しては本稿ではその間違っていたと判定された局所構造の４つまたは３つ組の線分に対して行う。

3.1 局所構造での位相構造の判定について

ここでは局所構造での位相構造を判定する方法について述べる。この方法は局所構造の４つ組と３つ組とで異なるが同じ線分ボロノイ図の性質から判定を行っている。局所構造は位相構造を決めているボロノイ辺とその両端のボロノイ点がある。これらを他と区別するために近似構成さ

れている事から近似ボロノイ辺、近似ボロノイ点と呼ぶ事にする。この近似ボロノイ辺と近似ボロノイ点は線分上のいくつかの点から構成された点ボロノイ図のボロノイ辺とボロノイ点である。また、点ボロノイ図の性質から近似ボロノイ点を含め近似ボロノイ辺上を移動する点ボロノイ図による空円が存在している。そこで、今度は線分ボロノイ図の性質からこの移動する空円を本来の線分に対して交差判定を用いる事でこの位相構造を判定する。具体的に説明すると、近似ボロノイ辺で分離している２つの線分を線分 A、線分 B とし、近似ボロノイ点を含めた近似ボロノイ辺上を移動する点ボロノイ図による空円の内、線分 A と線分 B のみを内部に含んで構成する空円が存在すれば、この空円の内部にある線分 A と線分 B を接する円もまた空円であるので線分ボロノイ図の性質からこの局所構造の位相構造は正しい事が判定できる。

局所構造での位相構造の判定アルゴリズム

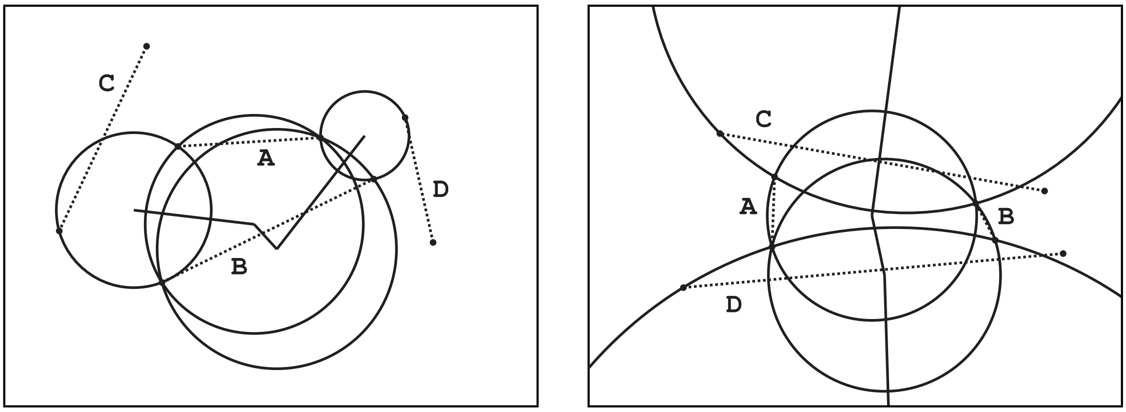

図 4: 局所構造での位相構造の判定（４つ組の場合　左：正しい　右:間違っている）

４つ組の場合

手順 1 線分に名前を付ける

- 近似ボロノイ辺で分離している２つの線分 ⇒ 線分 A、線分 B
- 手順２で開始となる近似ボロノイ点側にある線分 ⇒ 線分 C
- 手順２で終了となる近似ボロノイ点側にある線分 ⇒ 線分 D

手順 2 開始から終了となる近似ボロノイ点を含め近似ボロノイ辺上を移動する点ボロノイ図によるボロノイ点を中心とする円と線分 C、線分 D に対して交差判定を行う

手順 2.1 円が線分 C でも線分 D でも交差しない場合　⇒　位相構造は正しい（終了）

手順 2.2 円が線分 C と線分 D の両方で交差する場合　⇒　位相構造は間違っている（終了）

手順 2.3 円が線分 C のみに交差する場合　⇒　手順２に戻る（次の円に進む）

手順 2.4 円が線分 D のみに交差する場合　⇒　手順３に移る（この円を円 Q、その直前の円を円 P とする）

手順 3 円 P から円 Q の間を通る点ボロノイ図のボロノイ辺上の点を中心とする円と線分 C、線分 D に対して交差判定を行う
最初の円の中心はボロノイ辺の中間点とする（二分探索）

手順 3.1 円が線分 C でも線分 D でも交差しない場合　⇒　位相構造は正しい（終了）

手順 3.2 円が線分 C と線分 D の両方で交差する場合　⇒　位相構造は間違っている（終了）

手順 3.3 円が線分 C のみに交差する場合　⇒　手順 3 に戻る（ボロノイ辺から円 Q 側のエリアの中間点を次の円の中心とする）

手順 3.4 円が線分 D のみに交差する場合　⇒　手順 3 に戻る（ボロノイ辺から円 P 側のエリアの中間点を次の円の中心とする）

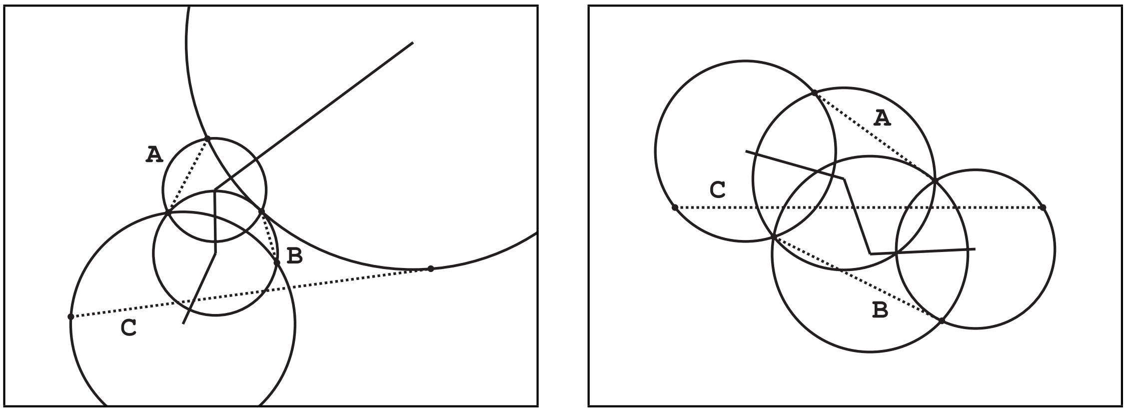

図 5: 局所構造での位相構造の判定（３つ組の場合　左:正しい　右:間違っている）

３つ組の場合

手順 1 線分に名前を付ける

- 近似ボロノイ辺で分離している 2 つの線分 ⇒　線分 A、線分 B
- 開始と終了となる近似ボロノイ点側にある線分 ⇒　線分 C

手順 2 線分 C が線分 A と線分 B の間にない場合 ⇒ 位相構造は正しい（終了）

手順 3 線分 C が線分 A と線分 B の間にある場合 ⇒ 位相構造は間違っている（終了）

3.2　点の追加方法

提案アルゴリズムでは局所構造での位相構造が間違っていたと判定されると直ぐに点の追加を行う。今回、次のような点の追加方法を採用した。

点の追加方法

局所構造での位相構造の判定で間違っている原因になった円の中心から、その局所構造の４つ組または３つ組の線分に対して射影点を追加点とする（ただし、射影点が線分の両端点の場合は追加点としない）

この点の追加に関して次の事が考えられる。点の追加は現状態での局所構造を新しくするかその位相構造を改善する事を考える。円の中心から線分に対して射影点を追加点にする事で、円との交差判定によって交差した線分の射影点はその円の内部である事から次からはこの円は存在しなくなる。これは、新しい円が局所構造を新しくするかその位相構造を改善する事になる。

3.3 アルゴリズムの収束性について

本稿では４つ以上の線分の位置が同一円で接する位置にある場合を退化する。ここでは、提案アルゴリズムの非退化仮定のもとでの収束性について考察する。もし、このアルゴリズムで無限ループに陥るならば、それは位相構造の決定ができないで、局所構造での位相構造が間違っていると永遠に判定され、点の追加も永遠に繰り返されてる事になる。点の追加は円との交差する線分への射影点でもあった。この射影点は円の内部にあるので、点の追加によって近似構成された後にはこの円は存在しない。しかし、無限ループでは位相構造が間違っていると永遠に判定が続くのでこの円がまだ存在する事になる。この円は同一円で４つの線分が接する円の他にはない。よって、非退化仮定に反するので、この提案アルゴリズムは非退化仮定のもとで収束するといえる。

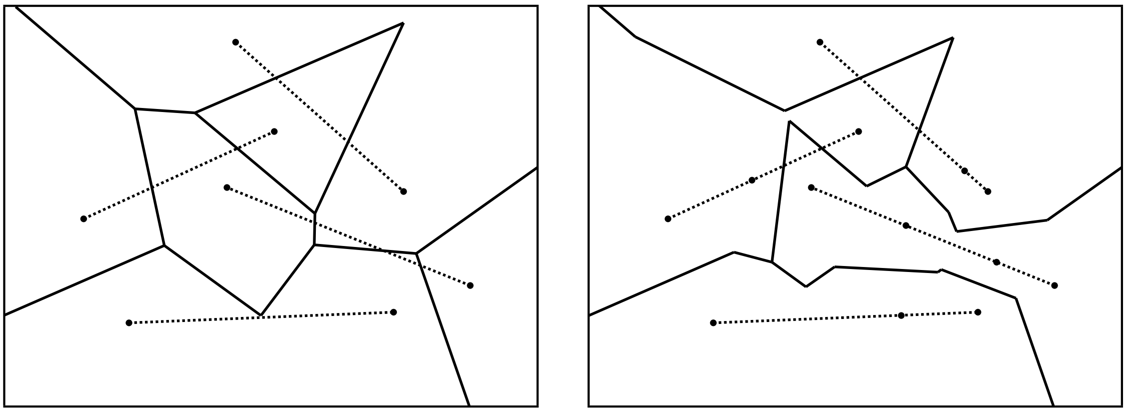

図 6: 動作例

4 まとめ

本稿では、線分を両端点に置き換え線分上に点を追加しながら近似構成された線分ボロノイ図の位相構造を決定する方法を提案した。近似構成された線分ボロノイ図の全ての局所構造での位相構造が正しければ、その位相構造は本来の線分ボロノイ図の位相構造と同じである。この事から、点の追加によって逐次的に近似構成される線分ボロノイ図の位相構造が決定できる。局所構造での位相構造の判定は、点ボロノイ図の性質と線分ボロノイ図の性質から導く事ができた。点の追加の方法には、局所構造での位相構造の判定が間違っていた時、その原因となった点ボロノイ図のボロノイ点またはボロノイ辺上の点を中心とする円と交差する線分に対して射影点を追加点とした。この追加点は原因となった円の内部なので次からこの円は存在しなくなる。よって、局所構造が新しくなるか位相構造が改善する。この提案アルゴリズムは非退化過程のもとで安定して動く事ができる。今後はこの提案アルゴリズムの計算速度の解析と向上を計画している。また、退化の取り扱いも今後の課題である。

参考文献

[1] 杉原厚吉：計算幾何工学，アドバンスとエレクトロニクスシリーズ　II-2，培風館，1994.

[2] 山田和公，杉原厚吉：一般図形ボロノイ図の近似構成法とその改良，1996.

[3] Mark de Verg，Marc van Kreveld，Mark Overmars，Otfried Schwarzkopf 著，浅野哲夫 訳：コンピュータ・ジオメトリ 計算幾何学：アルゴリズムと応用，近代科学社，2000.

[4] 杉原厚吉：FORTRAN 計算幾何プログラミング，岩波コンピュータサイエンス，岩波書店，1998.

[5] 今井浩，今井桂子：計算幾何学，共立出版，1994.

[6] 今井敏行：有限の計算精度のもとでの幾何的アルゴリズムの研究，東京大学大学院工学系研究科 博士論文，1996.