関数に基づく集合分割と有向ハイパーグラフ

河合 博之†　　　柴田 幸夫‡

†群馬大学 サテライトベンチャービジネスラボラトリー
‡群馬大学 工学部 情報工学科

要旨

二つの集合 X, Y および X から Y への二つの関数 f, g が与えられるとする．このとき，関数 f, g に基づき集合 X を分割する最適問題が存在する．この集合分割問題はダイグラフのある辺彩色問題に対応することが知られている．本研究では，ダイグラフの辺彩色問題という観点から集合分割問題について考察する．また，関数の数を一般化することにより有向ハイパーグラフの辺彩色問題として扱う手法について述べ，彩色数の上界について考察する．

Partition using functions and directed hypergraphs

Hiroyuki Kawai†　　　Yukio Shibata‡

†Satellite Venture Business Laboratory, Gunma University
‡Department of Computer Science, Gunma University

Abstract

Given two sets X, Y and two functions f, g from X to Y, there exists an optimization problem with respect to partition of X using functions f and g. It is known that this set partitioning problem is equivalent to an arc-coloring problem of digraphs. We study the set partitioning problem from the point of view of an arc-coloring of digraphs. We also discuss an arc-coloring of directed hyper graphs as a generalization of the number of functions.

1　はじめに

二つの集合 X, Y が与えられ，$\forall x \in X$ に対し $f(x) \neq g(x)$ を満足する，X から Y への二つの関数 f, g が与えらるものとする．このとき，$\forall x, y \in X_i$ に対し $f(x) \neq g(y)$ となるような集合 X の分割 $X_1, X_2, \dots X_n$ を求める問題がある．濃度が 1 の部分集合による自明な分割はこの分割条件を満すことから，分割数をできるだけ小さくなるように分割集合を求めることが目的となる．実際の具体的な応用問題としては，例えばスポーツ観戦を趣味とする人々のパーティにおいて出席者のテーブル配置問題を考えることにする．出席者へは事前にアンケートで好きなチームと嫌いなチームを一つずつ選んでもらっているものとする．いま，同じテーブルには，好みのチームと嫌いなチームが同じ人を同席させないような配置にしたい．このとき，少なくともいくつのテーブルが必要であろうか?これは，集合 X を参加者の集合，集合 Y をスポーツチームの集合とし，関数 f をひいきのチーム，関数 g をアンチのチームに対応させることにより上記の関数による集合の分割問題として定式化できる．この他にも，関数による集合分割問題はスケジューリング問題等，幅広い応用が可能となるであろう．

Sahili ら [11] はこの関数による分割問題をダイグラフの彩色問題に置きかえることにより研究を行なった．つまり，集合 X, Y をそれぞれ頂点集合として持つ二つのダイグラフを構成し，その彩色問題が関数による集合分割問題と同値であることを示した．彼らはその分割数の上界を与えたが，河合, 柴田 [9] はその上界を改善した．

グラフの彩色問題は，グラフの各要素に対し色を割り当てる問題であり，一般にそれらの隣接性を条件とすることにより行われる．一方，ダイグラフの辺彩色では，隣接性という条件に着目した場合には辺の向きを考慮する必要がある．したがって，ダイグラフの辺彩色は隣接性のみを考慮しても複数の定義が可能である．Sahili ら [11] が示したような，ダイグラフの辺彩色と関数による集合分割との関係という枠組を利用すれば，ダイグラフの辺彩色の定義と集合分割を対応させることができるため新たな集合分割問題を得ることになる．本研究は，第 3 節で隣接性にもとづくダイグラフの辺彩色について分類を行い，ダイグラフの辺彩色と関数による集合分割との関係を概観する．第 4 節では，集合分割するための関数の数を拡張することについて考察する．これまでは二つの関数による集合分割を考えているが，我々は "関数が二つから関数の集合が二つ" へと考えることにより拡張する．これはダイグラフの辺彩色から有向ハイパーグラフの辺彩色への拡張に等しい．

2 準備

ダイグラフ $G = (V, A)$ は頂点集合として V，有向辺集合として V の順序対の集合 A を持つ．ここでは自己ループと多重辺は持たないものとする．有向辺 (u, v) に対して u を始点，v を終点と呼ぶ．ダイグラフ G のラインダイグラフ $L(G)$ とは，頂点集合として G の有向辺集合 $A(G)$ が対応し，有向辺集合として $\{((u,v),(w,x)) | v = w, (u,v),(w,x) \in A(G)\}$ を持つダイグラフとして定義される．ダイグラフ G において，$S \subseteq V(G)$ が独立集合であるとは，任意の S の 2 頂点間に有向辺が存在しないときをいう．ダイグラフ G の頂点彩色とは，隣接するどの 2 頂点に対しても同じ色を割り当てないような，頂点集合 $V(G)$ から色集合への写像をいう．ダイグラフ G の彩色数とは，頂点彩色に必要な最も少ない色数であり $\chi(G)$ で表す．グラフの彩色数の上界は，Brooks の定理 [2] により，その最大次数または最大次数+1 で与えられている．

二つの集合 X, Y が与えられ，すべての $x \in X$ に対し $f(x) \neq g(x)$ を満足する X から Y への二つの関数 f, g が定められたとする．このとき集合 X の部分集合 S は，任意の S の要素対 x, y に対し $f(x) \neq g(y)$ を満たすならば排他的部分集合と呼ばれる．いま，集合 X を排他的部分集合へ分割する問題について考える．この問題は次のように定式化される．ここで，$f(X) = \bigcup_{x \in X} f(x)$ とする．

(排他的集合分割問題) f と g を集合 X から集合 Y への間の二つの写像とし，すべての X の要素 x に対して $f(x) \neq g(x)$ を満足するものとする．このとき，集合 X を $f(X_i) \cap g(X_i) = \emptyset$ となるような部分集合 $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ に分割し，さらに分割数 n を最小にしたい．

この問題に対して，Sahili ら [11] は二つの集合の間の関係をダイグラフとそのラインダイグラフに置換えることによって分割数の上界を示した．つまり，集合と関数との関係から次のように二つのダイグラフ $\mathcal{D}$ と $\mathcal{H}$ を構成した: $V(\mathcal{D}) = Y, A(\mathcal{D}) = \{(u, v) \mid \exists x \in X, g(x) = u, f(x) = v\}, V(\mathcal{H}) = X, A(\mathcal{H}) = \{(x, y) \mid f(x) = g(y)\}$. これらの定義より，$\mathcal{H}$ は $\mathcal{D}$ のラインダイグラフであることがわかる．さらに，集合 S を X の排他的部分集合とすると S はダイグラフ $\mathcal{H}$ の独立集合である．したがって，排他的集合分割問題はラインダイグラフの頂点彩色問題に置きかえることができる．

3 ダイグラフの辺彩色

グラフの多くの彩色問題は，基本的にそのエレメントの隣接性に依存している．しかしながら，ダイグラフ G の辺彩色を考える際には，その隣接性に関して有向辺の向きを考慮する必要がある．したがって，始点と終点の組合わせにより複数の定義を与えることができる．ここでは隣接性という観点からダイグラフの辺彩色を考えることにする．任意の $(u, v), (w, x) \in A(G)$ に対して，ダイグラフ G の有向辺の彩色 c が $c(u, v) \neq c(w, x)$ となる条件として次の三つの場合が考えらえる．

1. $v = w$ のとき:
   連続する有向辺を異なる色で塗る，

2. $v = x$ のとき:
各頂点に入ってくる有向辺を異なる色で塗る,
3. $u = w$ のとき:
各頂点から出ていく有向辺を異なる色塗る.

しがたって,これら基本的な三つのタイプを組合せることによりダイグラフの辺彩色は隣接条件に関して 7 通りに分類される.これまでに知られているダイグラフの辺彩色は,Harner ら [4] はタイプ 1,Bermod ら [1] はタイプ $2 \cap 3$,Hasunuma[5] はタイプ $1 \cap 2$,そして Kawai ら [7] はタイプ 2 及び 3 を扱っている.また,ダイグラフ G の底グラフの辺彩色に対応するのはタイプ $1 \cap 2 \cap 3$ である.

次の補題はラインダイグラフの定義から直接示すことができる.

補題 1 *ダイグラフ G のタイプ 1 の辺彩色はそのラインダイグラフ $L(G)$ の頂点彩色に等しい.*

したがって,排他的集合分割問題はダイグラフのタイプ 1 の辺彩色問題と等価となる.排他的集合分割がダイグラフのタイプ 1 の辺彩色に対応していることが示されたと同様に,この枠組を用いればダイグラフの 7 種の辺彩色からそれぞれに対応する 7 種の集合分割問題を導入可能となる.すなわち,任意の $x, y \in V_i$ に対し $f(x) \neq g(y)$, $f(x) \neq f(y)$ および $g(x) \neq g(y)$ の組合せから選択される条件によって X の集合分割 $\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ を分割数が最小となるように求める問題である.

ダイグラフのタイプ 1 の辺彩色において,河合,柴田 [8] は,Harner ら [4, 10] の結果をもとに,ダイグラフのタイプ 1 の辺彩色数が半完全ダイグラフ R_n への準同形写像と同値であることを示した.ここで,ダイグラフ R_n は頂点集合として n 集合 Σ のべき集合 2^{Σ} を持ち,有向辺集合は $\{(u, v) \mid u \backslash v \neq \emptyset\}$ であるダイグラフである.

定理 1 ([8]) *ダイグラフ G が タイプ 1 の n-辺彩色を持つための必要十分条件は G が R_n への準同形写像を持つことである.*

ダイグラフ R_n の頂点は長さ n の二進ベクトルによって置きかえることができる.このとき,半完全ダイグラフ R_n が n 色によって辺彩色可能であることは次のようにわかる.頂点 $x_1 x_2 \cdots x_n$ から $y_1 y_2 \cdots y_n$ へ出ている有向辺は,$x_i = 1$ かつ $y_i = 0$ を満足する i に対して色 i で塗ることができる.

この節の最後として,Harner ら [4] によって最初に得られたダイグラフの辺彩色数の上下界に関する定理を示す.また,この定理は定理 1 の直接的な系である.

定理 2 ([4]) *ダイグラフ G のタイプ 1 の辺彩色数に関して次が成立する.*

$$\lceil \lg \chi(G) \rceil \leq \chi'(G) \leq \min \left\{ k \mid \chi(G) \leq \binom{k}{\lceil \frac{k}{2} \rceil} \right\}.$$

4 有向ハイパーグラフ

有向ハイパーグラフ (以下,DHG) $H = (V, \mathcal{A})$ は,頂点集合 V とハイパー辺集合 $\mathcal{A}$ を持つ.ハイパー辺とは,V の空ではない互いに素な二つの部分集合 S, T の順序対 (S, T) であり,S はテール,T はヘッドと呼ばれる.DHG H において,頂点 v の出次数とは v が属するテールを持つハイパー辺の数であり,入次数とは v が属するヘッドを持つハイパー辺の数である.(k, l) ハイパー辺とは,テール及びヘッドの濃度がそれぞれ k, l であるときをいう.二つのハイパー辺 (S, T) と (S', T') が連続であるとは,$T \cap S' \neq \emptyset$ のときである.正定数 $k, l \geq 1$ に対し,DHG H のすべてのハイパー辺 (S, T) が (k, l) ハイパー辺ならば,H は (k, l) ユニフォームと呼ばれる.DHG $H = (V, \mathcal{A})$ のラインダイグラフ $L(H)$ は次のように定義される.$V(L(H)) = \mathcal{A}$, $A(L(H)) = \{((S, T), (W, X)) | T \cap W \neq \emptyset\}$,ここで H は DHG であるのに対し $L(H)$ はダイグラフとなることに注意する.

DHG の辺彩色もダイグラフと同様にいくつかの定義を与えることができる.ここでは,タイプ 1 の辺彩色を定義する.DHG のタイプ 1 の辺彩色 c とは,ハイパー辺集合 $\mathcal{A}$ から色集合への写像であり,任意の二つのハイパー辺 E, F に対して,E のヘッドと F のテールが共通頂点を持つならば $c(E) \neq c(F)$ が成立する.DHG H のタイプ 1 の辺彩色とそのラインダイグラフ $L(H)$ の頂点彩色は等価である.DHG の辺彩色について考えるために,ダイグラフ R_n の一般化として次のユニフォーム DHG を導入する.

定義 1 (k, l) ユニフォーム DHG $R_n(k, l)$ は,
$V(R_n(k, l) = 2^{\Sigma}$, Σ は n 集合であり,
$\mathcal{A}(R_n(k, l)) = \{(S, T) \mid |S| = k, |T| = l, s_1 \cap s_2 \cap$

$\cdots \cap s_k \cap \bar{t}_1 \cap \bar{t}_2 \cap \cdots \cap \bar{t}_l \neq \emptyset, s_i \in S, t_j \in T, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l\}$ である．ここで，$\bar{t} = \Sigma \setminus t$ を表す．

DHG $R_n(k,l)$ は (k,l) ユニフォーム DHG であり，$R_n(1,1)$ は半完全ダイグラフ R_n に等しい．この定義から DHG の辺彩色に関して次の定理を得ることができる．

定理 3 (k,l) ユニフォーム DHG H がタイプ 1 の n-辺彩色を持つための必要十分条件は H から $R_n(k,l)$ への準同形写像を持つことである．

証明 DHG H が $R_n(k,l)$ へ準同形写像 σ を持つものとする．H のハイパー辺 (S,T) には，$\sigma(s_1)\cap\sigma(s_2)\cap\cdots\cap\sigma(s_k)\cap\overline{\sigma(t_1)}\cap\overline{\sigma(t_2)}\cap\cdots\cap\overline{\sigma(t_l)}$,$s_i \in S, t_j \in T$, の色を割り当てることができる．逆に，H がタイプ 1 の辺彩色 c を持つとする．このとき，次のアルゴリズムによって $V(H)$ から DHG $R_n(k,l)$ への準同形写像 σ が得られる．(1) すべての $v \in V$ で $\sigma(v) = \emptyset$ とする．(2) 各ハイパー辺 $e = (S,T)$ に対して (3) を行う．(3)S のすべての要素 v に対して $\sigma(v)$ に $c(e)$ を追加する．□

次に排他的集合分割問題の拡張を行う．

(排他的 (k,l) 集合分割問題): 集合 X から集合 Y への写像の集合 F が与えらている．ただしどの二つの写像 $f,g \in F$ に対して，$\forall x \in X$ で $f(x) \neq g(x)$ を満足するものとする．いま，写像の集合 F が二つの部分集合，$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ と $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_l\}, k,l \geq 1$ に分割されたとき，集合 X を $\forall p \in P, \forall q \in Q$ に対して $p(X_i) \cap q(X_i) = \emptyset$ を満たすような部分集合 $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ に分割し，さらに分割数 n を最小にしたい．

この問題から，頂点集合として Y を持つ DHG は次のように定義される: $V(\mathcal{D}) = Y$, $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \left\{(S,T) | S = \bigcup_{p \in P} p(x), T = \bigcup_{q \in Q} q(x), x \in X\right\}$. したがって，拡張排他的集合分割問題は，DHG $\mathcal{D}$ のタイプ 1 の辺彩色問題と同値となる．

完全ダイグラフとは，すべての 2 頂点間に双方向辺があるダイグラフである．ダイグラフ G のクリーク数を G の最大の完全部分ダイグラフの頂点数とする．ダイグラフ $R_n(1,1)$ は，すべての 2 頂点間に有向辺が存在する半完全ダイグラフであり，そのクリーク数は，$\binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$ として知られている [4]．しかしながらその一般化である DHG $R_n(k,l)$ において，一般にクリーク構造を調べることは難しい．次からは $(k,l) = (2,1), (2,2)$ の二つの場合について考察する．

4.1 排他的 (2,1) 集合分割

ここでは，排他的 (2,1) 集合分割について考えるために DHG H の $R_n(2,1)$ への埋め込み可能性について考える．

完全 (k,l) ユニフォーム DHG $HK_n(k,l)$ とは，すべての (k,l) ハイパー辺が存在する (k,l) ユニフォーム DHG である．完全 DHG $HK_n(k,l)$ のハイパー辺の数は多項係数

$$\binom{n}{k, l, n-k-l} = \frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}$$

で表すことができる．$(k,1)$ ユニフォーム DHG の辺彩色数の上界を求める一手法として，$R_n(k,1)$ のクリーク求めることを考える．なぜなら，クリークの大きさが辺彩色数の上界となるからである．DHG $R_n(k,1)$ の定義より次が成立する．

補題 2 DHG $R_n(k,1), 1 \leq k \leq n$ において，頂点集合 $\{x \mid |x| = n-1\}$ は $HK_n(k,1)$ を誘導する．

補題 2 より，$HK_n(k,1)$ は $R_n(k,1)$ の部分グラフであるから，その辺彩色数の上界は n であることがわかる．完全 DHG $HK_n(k,1)$ の各頂点の出次数と入次数はそれぞれ $k\binom{n-1}{k}$, $\binom{n-1}{k}$ であり，そのラインダイグラフの出次数，入次数も同じである．したがって，例えば $k=2$ の場合においても，次数は $(n-1)(n-2)3/2$ であるから Brooks の定理の上界を利用した場合よりこの上界は小さい．補題 2 はほぼ自明な方法と言えるが, 実際 $n \leq 6$ に対しては $HK_n(2,1)$ の正確な辺彩色数を与えている．

さて，直接 $R_n(2,1)$ のクリークを見つけるのは少し難しそうなため発想を変えてみることにする．ダイグラフ $R_n(1,1)$ の最大クリークは，頂点集合 $\{x \mid |x| = \lceil n/2 \rceil\}$ から誘導される部分ダイグラフである．この最大クリークのラベルを用いて，完全 DHG $HK_n(k,1)$ が何色で辺彩色できるかについて考えることとする．ここで，整数 $n \geq q$ に対し $\alpha_n = \min\left\{k \mid n \leq \binom{k}{\lceil \frac{k}{2} \rceil}\right\}$ とする．

命題 1 完全 DHG $HK_N(k,1)$ は $(\alpha_{N+1} \cdot \alpha_N)/2$ 色で辺彩色可能である．

証明 整数 $m = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}, n \geq 1$ とする．まずはじめに，$HK_m(2,1)$ が $(n+1)n/2$ 色で辺彩色可能であることを示す．Σ を濃度 n の集合とし，$HK_m(2,1)$ の頂点集合を $\{x \mid x \subseteq \Sigma, |x| = \lceil n/2 \rceil\}$ に置きか

表 1: $n \times \binom{n}{2}$ テーブル T_5

$\beta(1)$	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
$\beta(2)$	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
$\beta(3)$	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
$\beta(4)$	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0
$\beta(5)$	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0

える．このとき，各ハイパー辺 $(\{x,y\},\{z\})$ を非順序対 (a,b), $a \in x \cap \bar{z}, b \in y \cap \bar{z}$ で塗ることができ，これに必要な色数は $\binom{n+1}{2}$ である．したがって $HK_m(2,1)$ は $(n+1)n/2$ 色で辺彩色可能である．次に，n を $\alpha_{n-1} < N \leq \alpha_n$ を満足する整数とする．完全 DHG $HK_N(2,1)$ は $HK_m(2,1)$ の部分 DHG であるから $HK_N(2,1)$ は $(n+1)n/2$ 色で辺彩色可能である．また，$\alpha_N = \alpha_m = n$ である．□

値 α_n が $\log_4 n$ に漸近的等しいことを用いれば，頂点数 N の完全 $(2,1)$ DHG は $\log_4^2 N$ のオーダー色で辺彩色可能といえる．これは，補題2を利用した彩色数の上界は N であるのに対し N が大きい場合には，より小さい上界を得ることができることを表す．

排他的分割問題において次の系を得る．

系 1 排他的 $(2,1)$ 集合分割問題は高々$O(\log_4^2 Y)$ 個の分割が可能である．

4.2 排他的 (2,2) 集合分割

ここでは，排他的 $(2,2)$ 集合分割について考えるために，DHG H の $R_n(2,2)$ への埋め込み可能性について考える．

まず始めに，$R_n(k,2)$ のクリーク求めることを考える．いま，$n \times \binom{n}{2}$ のテーブル T_n の各列に、0の数がちょうど二つあるような2進 n 桁の列を当てはめることとする．このとき，$\beta(i), 1 \leq i \leq n$ を T_n の i 番目の行に対応する長さ $\binom{n}{2}$ の2進列とする．表1に $n=5$ の場合の $n \times \binom{n}{2}$ テーブルを示す．

補題 3 正整数 $n \geq 4$ が与えられたとき，DHG $R_{\binom{n}{2}}(k,2), 1 \leq k \leq n$ において，頂点集合 $\{\beta(i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ は $HK_n(k,2)$ を誘導する．

証明 頂点集合 $\{\beta(i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ の任意の異なる4頂点 a,b,c,d に対して a,b の i 番目のビットが0であり，c,d の i 番目のビットが1となるような整数 i がちょうど一つ存在する．したがって完全 DHG $HK_n(k,2)$ は誘導部分 DHG として存在する．□

よってこの手法における完全DHG $HK_n(k,2)$ の辺彩色数の上界は $\binom{n}{2}$ となる．この値は前節で示した $HK_n(k,1)$ の辺彩色数の上界と比較してかなり大きい．しかしながら、$n=4,5$ の場合では最適であることがわかっている．

次に頂点数 n が大きな場合における完全 DHG $HK_n(k,2)$ の辺彩色数の上界の改善を示す．

命題 2 完全 DHG $HK_N(k,2)$ は $(\alpha_{N+3} \cdot \alpha_{N+2} \cdot \alpha_{N+1} \cdot \alpha_N)/24$ 色で辺彩色可能である．

証明 整数 $m = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$ とする．命題1と同様に $HK_m(2,2)$ が $(n+3)(n+2)(n+1)n/24$ 色で辺彩色可能であることを示す．Σ を濃度 n の集合とし，$HK_m(2,2)$ の頂点集合を $\{x \mid x \subseteq \Sigma, |x| = \lceil n/2 \rceil\}$ に置きかえる．このとき，各ハイパー辺 $(\{x,y\},\{z,w\})$ を非順序4組 (a,b,c,d), $a \in x \cap \bar{z}, b \in y \cap \bar{z}, c \in x \cap \bar{w}, d \in y \cap \bar{w}$ で塗ることができる．この彩色に必要な色数は，n 個の要素から重複を許して4個選ぶ組合せの数に等しく，$\binom{n+3}{4}$ である．したがって $HK_m(2,2)$ は $(n+3)(n+2)(n+1)n/24$ 色で辺彩色可能である．□

命題2より次の系を得る。

系 2 排他的 $(2,2)$ 集合分割問題は高々$O(\log_4^4 Y)$ 個の分割が可能である．

5 おわりに

本研究では、関数に基づく集合分割問題に関する研究において，ダイグラフの辺彩色という観点から考察した．ダイグラフの辺彩色が基本的な3種類の組合せよりなることを示し，辺彩色と集合分割との関係の枠組を用いることにより関連する集合分割の分類を行った．また，二つの関数による排他的集合分割問題を関数の数を一般化することにより拡張し，有向ハイパーグラフの辺彩色問題として扱った．有向ハイパーグラフの辺彩色に対しては完全DHGのみに対して考察を行っているため，次数制限等による条件のついたDHGの辺彩色問題は今後の研究課題として残されている．

参考文献

[1] J.C-.Bermond and P.Hell, On even factorization and the chromatic index of the Kautz and de Bruijn digrpahs, J Graph Theory, vol.17, no.5, pp.647–655 (1993).

[2] R.L. Brooks, On colouring the nodes of a network, Proc Cambridge Philos. Soc., vol.37, pp.194–197 (1941).

[3] G. Cherlin and J. Hirschfeld, Ultrafilters and ultraproducts, Contributions to Non-Standard Analysis, W.A.J. Luxemburg and A. Robinson (Editors), 263–264, North-Holland Publishing Company (1972).

[4] C.C. Harner and R.C. Entringer, Arc colorings of digraphs, J Combinatorial Theory (B), vol.13, pp.219–225 (1972).

[5] T. Hasunuma, Embedding iterated line digrpahs in books, Networks, vol.40, no.2, pp.51–62 (2002).

[6] H. Kawai, N. Fujikake and Y. Shibata, Factorization of de Bruijn digraphs by cycle-rooted trees, Information Processing Letters, vol.77, pp.269–275 (2001).

[7] H. Kawai and Y. Shibata, The chromatic number and the chromatic index of de Bruijn and Kautz digraphs, IEICE Trans. Fundamentals, vol.E85–A, no.6, pp.1352–1358 (2002).

[8] H. Kawai and Y. Shibata, On the arc-coloring of digraphs, FIT2003 Information Technology Letters, vol.2, pp.11–13 (2003).

[9] 河合博之，柴田幸夫， 関数に基づく集合分割とラインダイグラフ，信学技法 COMP2004-18, pp.1–3 (2004).

[10] S. Poljak and V. Rödl, On the arc-chromatic number of a digraph, J Combinatorial Theory (B), vol.31, pp.190–198 (1981).

[11] A.E. Sahili, Functions and line digraphs, J Graph Theory, vol.44, pp.296–303 (2003).

[12] M. Zwonek, Pseudototal colourings of digraphs, Discrete Mathematics, vol.218, 253–263 (2000).