

オフセット概念の拡張

仁尾 都
明星大学経済学部

徳増 信司
神奈川工科大学工学部

P, Q をユークリッド空間 R^d のコンパクトな部分集合とし, Q に交わる P のすべての平行移動図形の和集合を P による Q の outer on-offset と定義する. P が半径 r の R^d のボールの場合, outer on-offset は距離 $2r$ の Q の outer offset と一致することを示した. さらに, P による Q の補集合の outer on-offset の補集合を inner on-offset と定義する. 両 on-offset の形状計算は P と Q の間の Minkowski 和の計算に帰する事ができ, P, Q が凸多角形の場合, outer それらの計算量はともに $\Theta(n_p + n_q)$ であり, P, Q が 3次元の凸多面体の場合, それぞれ $\Theta(n_p^2 n_q)$, $O(n_p n_q)$ であることを示した.

An Extension of the Concept of Offset

Misato Nio
Faculty of Economics
Meisei University

Shinji Tokumasu
Department of Information and Computer Science
Kanagawa Institute of Technology

Let P and Q be compact subsets of R^d , then We call the locus of P by translating P so that P always intersects Q , an outer on-offset of Q by P . We have showed that if P is a ball of the radius r in R^d , the outer on-offset is equivalent to the offset of Q with distance $2r$. Furthermore, we have defined inner on-offset of Q by P and showed that the computation's complexities of two on-offset can be reduced to the Minkowski sum of P and Q , and if P and Q are convex polygons, then the computation's complexity of two on-offsets are $\Theta(n_p + n_q)$ both, and if P and Q are 3d-polytopes, then $\Theta(n_p^2 n_q)$ and $O(n_p n_q)$ each.

1. はじめに

ユークリッド空間 R^d の半径 r の球 $B(r)$ による Q の outer offset (または, outer parallel body, 以降, $OPB(Q, B(r))$ と記す) は点集合 $\{p \mid \exists q \in Q, p \in R^d, d(p, q) \leq r\}$, または, $Q ++ B(r)$ ($++$ は Minkowski 和) で定義される. R^d の半径 r の球 $B(r)$ による Q の inner offset $IPB(Q, B(r))$ は, $C(OPB(C(Q), B(r)))$, ($C(Q)$ は Q の補集合) として定義される. $OPB(Q, B(r))$ と $IPB(Q, B(r))$ の明示的な形状計算は NC 工作やロボット制御分野などの機械設計分野や

建築設計分野で必要とされることが多い。 R^2 の円 $B(r)$ による2次元図形 Q の **outer offset** は、 Q の境界に接しながら動く2次元NC切削機械の円軸カッターの中心軌跡が作る形状と深い関係がある。

本論文は、 P 、 Q として、一般のコンパクト集合を想定し、かつ、 P が Q に交差しながら平行移動した時の P の掃引する領域 **outer on-offset** とそれから派生する **inner on-offset** を新しく定義し、これらの性質について論じる。

$OPB(Q, B(r))$ の概念の拡張は、汎オフセットという言葉で行われた例がある[1]。図形 Q の汎オフセットとは、 Q 上の各 q 毎に定められた図形 $f(q)$ を対応させ、 $f(q)$ を Q 内の点 q 全体にわたってとった集合和をいう。 $f(q)$ を中心が q で半径 r の球であると定義したとき、汎オフセットは $OPB(Q, B(r))$ に一致する。また、任意の図形 P とその $P \ni p$ が与えられたとき、 $f(q)$ を、 p が q に一致するように P を平行移動した図形と定義すれば、 $Q++P$ も汎オフセットのひとつの実現例となる。 f は特にその性質を定めないので、汎オフセットは非常に広い概念となっている。

2章では、**outer on-offset** と **inner on-offset** の定義と、それらの定義に対して等価な **Minkowski** 和による表現式を与えることによって、**on-offset** の形状計算に一般的な手順を与え、さらに **outer on-offset** と **inner on-offset** が $OPB(Q, B(r))$ と $IPB(Q, B(r))$ の拡張になっていることを示し、第3章では、 P 、 Q が2次元、3次元の凸多面体である場合の **outer on-offset** と **inner on-offset** の計算量を示し、第4章では、本研究の結果の検討を行い、特に **outer on-offset** と **inner on-offset** は汎オフセットの実現例の一つであることに言及する。

2. **outer on-offset** と **inner on-offset**

P 、 Q を R^d のコンパクトな部分集合とする。 $\delta(P)$ は P の境界点の集合とすると、 P はコンパクトであるため、 $\delta(P)$ は空でない。**outer offset** $OPB(Q, B(r))$ の $B(r)$ に代わりに P を置き換えた $OPB(Q, P)$ は、**outer parallel body**の拡張概念である。 $IPB(Q, P)$ は $OPB(Q, P)$ の定義を用いて下記のように定義する。

$$OPB(Q, P) = Q++P$$

$$IPB(Q, P) = C(OPB(C(Q), P))$$

$OEPB(Q, P)$ を Q の P による **outer on-offset** と呼び、 Q に交わる P の平行移動図形すべての和集合と定義する。 $IEPB(Q, P)$ を **inner on-offset** と呼び、 $OEPB(Q, P)$ の定義を用いて定義する。なお、 $P^t = \{p \mid p = q + t, t \in R^d, q \in P\}$ 。

$$OEPB(Q, P) = \{p \mid p \in P^t, t \in R^d, P^t \cap Q\}$$

$$IEPB(Q, P) = C(OEPB(C(Q), P))$$

[定理1] $OEPB(Q, P) = Q++P++(-P)$

[証明] $\forall r \in \text{OEPB}(Q, P)$ とする. もし, $r \in Q$ である場合は, $\forall s \in P$ に対して, $r + s + (-s) = r \in Q \oplus P \oplus (-P)$.

もし, $r \in Q$ でない場合は, $r \in \text{OEPB}(Q, P)$ であることの定義より, $\exists t, r \in P'$ であり, かつ, $s \in Q, s \in P'$ であるような s が存在する. したがって, Q からは s を, P からは $(r - t)$ を, $(-P)$ からは $(-s + t)$ の点を選んだ場合, $s + (r - t) + (-s + t) = r \in Q \oplus P \oplus (-P)$ となる. したがって, $\text{OEPB}(Q, P) \subseteq Q \oplus P \oplus (-P)$ が成り立つ.

逆に, $\forall r \in Q \oplus P \oplus (-P)$ としよう. すると $\exists q \in Q, \exists s \in P, \exists t \in (-P), r = q + s + t$. 一方, $-t \in P$. したがって P' は P を $(-t)$ が原点になるように平行移動した図形となる. したがって $P' \ni s + t$ であり, かつ P' は原点を含む. よって, $P' \ni q + s + t$ となり, かつ $P' \ni q$ は q を含む. 一方, $Q \ni q$ であるから, $P' \ni q$ と Q は共通点 q を持つことになる. よって, $\text{OEPB}(Q, P)$ の定義より, $\text{OEPB}(Q, P) \supseteq P' \ni q + s + t = r$. よって, $\text{OEPB}(Q, P) \supseteq Q \oplus P \oplus (-P)$ ■

[系1-1] $\text{OEPB}(Q, P) = \text{OPB} \oplus (-P)$

定理1より, on-offsetの計算は, P と Q の Minkowski 和で計算可能であることがわかる.

図1の左は多角形 P, Q を用いた場合の, 一般化された outer parallel body と inner parallel body の例であり, 図1の右は outer on-offset と inner on-offset の例である.

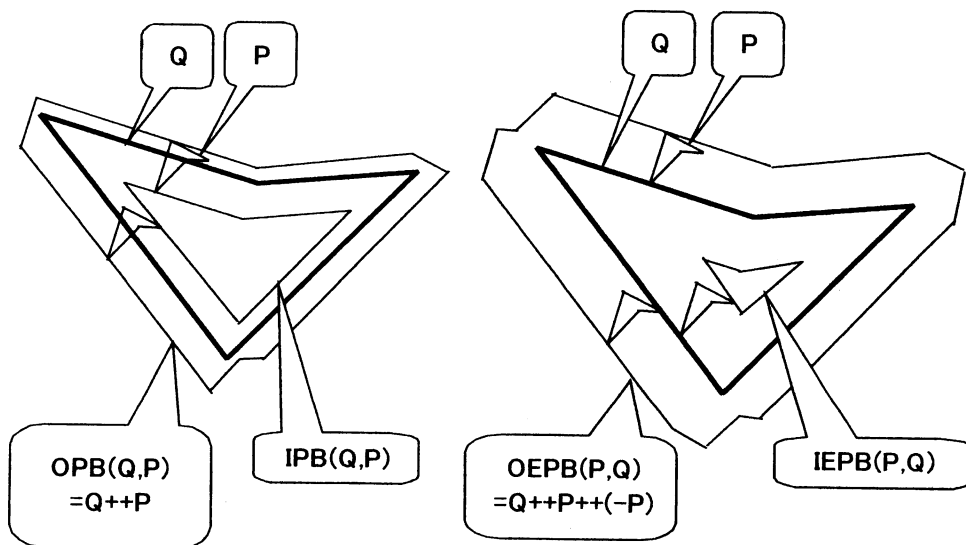


図1 outer/inner parallel body と outer/inner on-offset の比較

[定理2] $OEPB(Q, B(r)) = OPB(Q, B(2r))$

[証明] 定理1より, $OEPB(Q, B(r)) = Q ++ B(r) ++ (-B(r))$

一方, $B(2r) = B(r) ++ (-B(r))$ であるから,

$OEPB(Q, B(r)) = Q ++ B(2r) = OPB(Q, B(2r))$. ■

[定理3] $IEPB(Q, B(r)) = IPB(Q, B(2r))$

[証明] 定義より, $IEPB(Q, B(r)) = C(OEPB(C(Q), B(r)))$

$= C(C(Q) ++ B(r) ++ (-B(r))) = C(C(Q) ++ B(2r))$

一方, $B(2r) = B(r) ++ (-B(r))$ であるから,

$IEPB(Q, B(r)) = C(C(Q) ++ B(2r)) = OPB(Q, B(2r))$ ■

3. Outer on-offset と inner on-offset の計算複雑度

コンパクト集合 P, Q が与えられた時, $OTB(Q, P)$ は, Q の内点に交差することなく, Q の境界を P が接しつつ, 滑りながら P を平行移動するときに行われる P の軌跡であると定義する. なお, $I(Q)$ は Q の内点の集合であるとする.

$$OTB(Q, P) = \{p \mid \forall p \in P^t, \exists t \in \mathbb{R}^d, P^t \cap \delta(Q) \neq \emptyset, I(P^t) \cap Q = \emptyset\}$$

更に, コンパクト集合 P に対して, P に属しない点 $t \in \mathbb{R}^d$ が与えられたとき, t に関する P の弧状連結境界と呼ぶ $OMB(P, t)$ を下記のように定義する.

$$OMB(P, t) = \{p \mid p \in \delta(P), \exists \text{pass}(p, t) \cap P = \{p\}\}$$

ただし, $\text{pass}(p, t)$ は p と t を結ぶ道であるとする. t を無限遠点 (∞) をとったとき, $OMB(P, \infty)$ は P の最も外側の境界となる (図2).

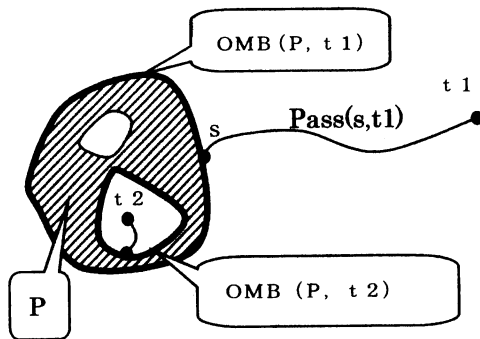


図2 t_1, t_2 に関する P の弧状連結境界

[補題1] コンパクト集合 P, Q と点 $t \in C(P)$ が与えられ, $P \supseteq Q \supseteq \delta(P)$ であるとき, $OMB(P, t) = OMB(Q, t)$

[証明] $\forall p \in OMB(P, t)$ とする. 定義より, $\exists \text{pass}(p, t) \cap P = \{p\}$.

然るに、 $p \in \delta(P) \subseteq Q \subset P$ であるから、 $p \in \delta(Q)$ 。しかも $P \supset Q$ であるから、 $\text{pass}(p, t) \cap Q = \{p\}$ 。よって $p \in \text{OMB}(Q, t)$ 。よって、 $\text{OMB}(P, t) \subseteq \text{OMB}(Q, t)$ 。

$\forall q \in \text{OMB}(Q, t)$ とする。定義より、 $\exists \text{pass}(q, t) \cap Q = \{q\}$ 。然るに、 $Q \supseteq \delta(Q) \supseteq \text{OMB}(P, t)$ であるから、 $\text{pass}(q, t) \cap \text{OMB}(P, t) = \{q\}$ 。 q が P の内点であるなら、 $\exists p \in \text{pass}(q, t) \cap \text{OMB}(P, t)$ 、かつ $p \neq q$ 。これは、 $\text{pass}(q, t) \cap \text{OMB}(P, t) = \{q\}$ に矛盾する。したがって、 $q \in \delta(P)$ 。よって、定義より、 $q \in \text{OMB}(P, t)$ 。よって、 $\text{OMB}(P, t) \supseteq \text{OMB}(Q, t)$ 。■

〔補題2〕点 $t \in C(\text{OEPB}(Q, P))$ が与えられた時、

$$\text{OMB}(\text{OTB}(Q, P), t) = \text{OMB}(\text{OEPB}(Q, P), t)$$

〔証明〕 $\delta(\text{OEPB}(Q, P), t) \ni \forall p$ に対して、 $\exists q \in Q, \exists t, q \in P^t, p \in P^t$ 。もし、 q が Q の内点であれば、 q の近傍 $\exists N(q) \subset Q, N(q) \cap \delta Q \neq \emptyset$ 。すると、 $N(q)^{p^{-q}} \subset P^{p^{-q}}$ 。したがって、 p は $P^{p^{-q}}$ の内点になり、 $\delta(\text{OEPB}(Q, P), t) \ni p$ に矛盾する。したがって、 $q \in \delta Q$ 。よって、 $p \in \text{OTB}(Q, P)$ 。よって、 $\delta(\text{OEPB}(Q, P), t) \subseteq \text{OTB}(Q, P)$ 。一方、明らかに $\text{OTB}(Q, P) \subseteq \text{OEPB}(Q, P)$ であるから、結局、 $\delta(\text{OEPB}(Q, P), t) \subseteq \text{OTB}(Q, P) \subseteq \text{OEPB}(Q, P)$ 。また、 $\text{OTB}(Q, P), \text{OEPB}(Q, P)$ は共にコンパクト。したがって、 $t \in C(\text{OEPB}(Q, P))$ に対しては、補題1によって、補題2が得られる。■

t として、無限遠点 ∞ を採用すれば、常に下記が成り立つ。すなわち、 $\text{OTB}(Q, P)$ と $\text{OEPB}(Q, P)$ の最も外側の境界は等しい。

$$\text{〔補題3〕 } \text{OMB}(\text{OTB}(Q, P), \infty) = \text{OMB}(\text{OEPB}(Q, P), \infty)$$

〔定理4〕 P, Q が凸多角形るとき、 $\text{OEPB}(Q, P)$ の計算複雑度は、 $\Theta(n_P + n_Q)$ である。

〔証明〕補題3と定理1より、 $\text{OMB}(\text{OTB}(Q, P), \infty)$ は $Q++P++(-P)$ の輪郭線と与えられる。一方、凸多角形間のMinkowski和の計算量は、 $\Theta(n_P + n_Q)$ となる。したがって、3つの凸多角形 Q, P と $(-P)$ のMinkowski和である $\text{OEPB}(Q, P)$ の計算量も、 $\Theta(n_P + n_Q)$ である。

〔定理5〕 P, Q が凸多角形るとき、 $\text{IEPB}(Q, P)$ の計算複雑度は、 $\Theta(n_P + n_Q)$ である。

[証明] $C(OEPB(CQ), P) \ni \forall t$ を定めると、補題2より、 $IEPB(Q, P)$ は、 δQ に P を Q の内側の方向から接しながら平行移動してできる軌跡の境界のうち、 t に弧状連結となる境界に一致する。したがって、その生成アルゴリズムは下記となる。ただし、ここでは、 n_P, n_Q は P, Q の頂点数とし、頂点は反時計方向に並べられているとする。

(1) リストを空にし、長さをゼロにする。

(2) for ($i=1$ to n_Q)

(2. 1) while ($i > 1$ and リストの長さはゼロ) Do

(2. 1. 1) Q の i 番目の頂点 q_i (座標は $(q_i x, q_i y)$) を始点とする辺の法線ベクトル $v : (q_{i+1} y - q_i y, -(q_{i+1} x - q_i x))$ に対応する P 側の第1対蹠点 s_i と $-v : (- (q_{i+1} y - q_i y), q_{i+1} x - q_i x)$ に対応する P 側の対蹠点 t_i を探索

(2. 1. 2) if ($i > 1$ and $s_i \neq s_{i-1}$)

then (if (リストの最後尾の要素の辺と a との交点 u が存在)

then (リストの最後尾の要素の辺の終点を u に変更し、 u から a の終点までの線分をリストの最後尾の要素の直後に挿入し、exit Loop)

else (リストの最後尾の要素を削除))

else ($a^{s_i-t_i}$ を最後尾リストの後に挿入、なお、 $i=1$ のときはリストの数はゼロであるのでリストに無条件に登録。)

(2. 2) while (リストの長さはゼロ) Do

(2. 2. 1) if (リストの先頭の要素の辺 b とリストの最後尾の辺 c との交点 u が存在)

then (b の終点を u に変更し、 c の始点を u に変更し、exit Loop)

else (if (b は c が2分する2つの半平面のうち右半平面に存在)

then (b を削除)

else (exit Loop))

上記アルゴリズムの計算複雑度を計算する。

(2. 1. 1) の処理は、 $i=1$ のときは、まだ1対の対蹠点が求まっていない段階なので、 Q 側の辺 $q_1 q_2$ に対する P 側の対蹠点計算となり、その計算複雑度は $\Theta(\log n_P)$

である。 $i = 2$ 以降では、すでに求まっている s_{i-1} と t_{i-1} を起点として P 側の頂点を偏角順に辿って探索すればよいので、 Q 側のすべての辺に対するすべての s_i と t_i を求める計算必要量は合計で $\Theta(n_P + n_Q)$ である。(2) の計算の途中で次の新しい軌跡によってすべてが削除された辺は2度と現れない。一方、リストに登録される数はたかだか n_P 個である。したがって(2) のループの間に(2. 1) と(2. 2) の `loop` が繰り返される回数は $O(n_P)$ である。したがって、本アルゴリズムの計算複雑度は $\Theta(n_P + n_Q)$ である。 ■

〔定理6〕 P, Q が3次元凸多面体のとき、 $OEPB(Q, P)$ の計算複雑度は、 $\Theta(n_P^2 n_Q)$ である。

〔証明〕 定理4と同様の議論で、 $OMB(OTB(Q, P), t)$ は $Q++P++(-P)$ の輪郭線で与えられる。一方、3次元凸多角形間の Minkowski 和の計算量は、 $\Theta(n_P n_Q)$ である。したがって、3つの凸多角形 Q, P と $(-P)$ の Minkowski 和である $OEPB(Q, P)$ の計算量は、 $\Theta(n_P^2 n_Q)$ である。

〔定理7〕 P, Q が3次元凸多面体のとき、 $IEPB(Q, P)$ の $O(n_P n_Q)$ の計算計算アルゴリズムが存在する。

〔証明〕 $IEPB(Q, P)$ を計算するには、 Q の各ファセット a の法線ベクトル b に対応した P 側の対蹠点 s と $-b$ に対応した P 側の対蹠点 t を求め、 $-b$ を法線ベクトルに持った部分平面 a^{t-s} を含む無限平面を n_P 個作成する。これらの無限平面が指定する半空間の凸共通集合が $IEPB(Q, P)$ である。ひとつのファセットにつき、対応する P 側の対蹠点の計算は $O(n_P)$ であるから、 Q のすべてのファセットに対応する P 側の対蹠点の計算は $O(n_P n_Q)$ である。一方、 n_P 個の半空間の凸共通集合の計算量は $O(n_P \log n_P)$ にしかならない [2]。したがって、定理を得る。 ■

4. 検討

$OEPB(Q, P)$ は汎オフセットのひとつの実現例であるとみなすことができる。なぜなら、 $\forall q \in Q$ に対して、 $f(q)$ を、 $f(q) = \{p \mid \exists t, p \in P^t, P^t \ni q\}$ と定義すればよいからである。つまり、 $f(q)$ は P の境界を q にこすりつけたまま平行移動した P の軌跡に等しく、一方、定理1より、 $f(q) = q++P++(-P)$ である。したがって、 Q のすべての点 q にわたって $f(q)$ の和集合を取ったものが、 $Q++P++(-P)$ となるとみなすことが出来る。

Q がただ1点 q の場合、 P の境界を q にこすりつけたまま平行移動した P の軌跡 $OTB(q, P)$ は、 $OEPB(q, P)$ に一致する。しかし、 Q がただ1点でない場合は、一般に $OTB(q, P) \subseteq OEPB(Q, P)$ であり、逆に、 $\delta(OTB(q, P)) \supseteq \delta(OEPB(Q, P))$ であるが、最も外側の境界は一致する。

本論文では、 P 、 Q には複数の孤立点や複数の弧状連結成分を持つことが許されている。

P 、 Q が3次元凸多面体のとき、inner on-offsetの最悪計算量は Q の各ファセットに対応する P 側の対蹠点の計算で決定されている。 Q の頂点と P 側の頂点との間の対蹠点対の数は $O(n_P n_Q)$ である。しかし、 Q のファセットと P 側の頂点との対蹠ファセット・点対の数は $O(n_P + n_Q)$ であると考えられるため、 Q の全ファセットに対応する P 側の対蹠点の計算量は削減できる可能性がある。なお、 Q の Hierarchical representation [3]を前処理で作成しておけば、 Q のひとつのファセットにつき、対応する P 側の対蹠点の計算は $O(\log n_P)$ とすることができるから、inner on-offsetの計算量は $O(n_Q (\log n_P + \log n_Q))$ まで少なくすることは出来る。

P の姿勢が一定角度範囲にある場合の outer on-offset の計算はロボットの運転計画作成上有益ではないかと考える。OEPB(Q , P)の最も外側の境界OMB(OEPB(Q , P), ∞)は、 Q の表面に P を密着させたまま、 P を平行移動したできた軌跡の最外郭線に等しくなるので、レーザービーム束の形状が円形ではない場合のNC工作経路計算などに応用が可能である。また、円形近似できないロボットの運転計画作成にも応用できる可能性がある。さらに、カッターの未切削部分、あるいは移動ロボットと障害物の間の非干渉空間の計算にも応用可能性がある。

5. 終わりに

R^d のコンパクト部分集合 P 、 Q が与えられたとき、 Q と交わるような P の平行移動図形の和集合 $\{p \mid p \in P^t, t \in R^d, P^t \cap Q \neq \emptyset\}$ を outer on-offset として定義し、従来の Q の距離 r のオフセットの概念の拡張になっていることを示した。また、inner on-offsetも定義し、 P 、 Q が凸多角形の場合、新しく定義した2つのオフセットの計算複雑度は共に $\Theta(n_P + n_Q)$ であり、 P 、 Q が3次元凸多面体の場合、それぞれ $\Theta(n_P^2 n_Q)$ 、 $O(n_P n_Q)$ であることを示した。

参考文献

- [1] 徳増信司, 巽久行, 村井保之, 仁尾都: 距離場空間モデルによる汎オフセット概念とその応用, 情報処理学会, Vol.42, No.1, pp26-37(2001).
- [2] F. P. Preparata and D. E. Muller: Finding the intersection of n half-spaces in time $O(n \log n)$, Theoretical Computer Science 8(1), pp45-55(1979).
- [3] D. Dobkin, J. Hershberger, D. Kirkpatrick, S. Suri: Computing the Intersection-Depth of Polyhedra, <http://www.cs.princeton.edu/~dpd/Papers/DoHerKirkSuri.ps.Z>, (1993).