

## 凸多角形の点包含判定のための入力感応型最適アルゴリズム

仁尾 都

明星大学経済学部

nio@mi.meisei-u.ac.jp

凸多角形  $P$  質問点を判定する点包含判定問題において,  $P$  の任意の 2 頂点  $v_s, v_e$  の間の境界の長さの 2 等分点を含む辺と線分  $v_s v_e$  のなす角の期待値が 0 であり, 質問点が  $P$  の中, あるいは  $P$  の内点を中心とする半径が充分大きい円の中のいずれかで一様分布する場合, 平均手間が  $O(1)$  となる入力感応型最適アルゴリズムを提案する.

### An optimal and input-sensitive algorithm for the point-inclusion problem of a convex polygon

Misato Nio

School of Economics, Meisei University

nio@mi.meisei-u.ac.jp

For the point-inclusion problem whether a convex polygon  $P$  includes a question point  $q$  or not, we propose an optimal and input-sensitive algorithm such that its computing time is  $O(\log|P|)$  and especially  $O(1)$  on the average if the mean of the angles of the vectors  $v_s v_e$  and  $v_c v_{c+1}$  is 0, and  $q$  is distributed uniformly in  $P$  or in a circle whose center is in  $P$  and whose radius is large enough, where  $v_s$  and  $v_e$  are vertexes and  $v_c v_{c+1}$  includes the middle point of the length of boundary of  $P$  between  $v_s$  and  $v_e$ .

#### 1. はじめに

本論文は凸  $n$  多角形  $P$  と点  $q$  が与えられた時,  $P \ni q$  を判定する問題に関する. この点包含判定問題 ( point-inclusion problem ) は計算幾何学での基本問題の一つになっており, 2 つの多角形  $P, Q$  の交差判定問題において,  $P + + ( - Q ) \ni r$  の判定 (  $++$  は Minkowski 和,  $r$  は座標原点 ) に重要な役割を果たし, ロボット制御問題などに応用される.

以降,  $P$  の頂点番号は隣り合った頂点順につけられているとする. 隣り合った 2 つの頂点と  $P$  の固定の内点  $r$  とが作る  $n$  個の半頂角の中から, ベクトル  $r q$  を挟むような半頂角を 2 分法で探索する  $O(\log n)$  の最適アルゴリズム  $A[1]$  がよく知られている. しかも  $P$  が星状多角形であっても, 前処理で  $P$  のカーネル  $r$  を求めておけば  $A$  は適用できる.

なぜなら，Aはrを光源としqを通る光線が交差するPの辺を探索するという1次元領域探索問題に置き換えているからである．つまり，AはPが凸であることや，2次元情報を十分に利用しているとはいえず，その結果， $(\log n)$ にしかない．

一方，2次元座標情報を1次元に縮退せずに利用するアルゴリズムとしては，Hierarchical Architectureが与えられた凸多面体P，Qの交差判定アルゴリズム〔2〕を，凸多角形Pと質問点qに焼き直す $O(\log n)$ のアルゴリズムBに変換できる（Bはすでに公知かどうかは不明である）．すなわち，初期のSをPの内接3角形とし，qとの間の最短点を実現するPの点tから定まるPのひとつの頂点wをSの頂点に組み入れてtを更新することを繰り返してSをPの形状に近づける過程でqがSに含まれるかを判定すればよい．2次元の場合はPにHierarchical Architectureを前処理で求めておく必要はなく，まだSに組み込まれていないtの近傍のPの凸鎖の2分点をwとすればよい．BはAと違ってqの持つ2次元情報を活用している． $P \ni q$ という条件のほかにqの位置に関して更に何らかの条件を付加すれば，Bは平均的にsublogarithmicとなる可能性があるが， $P \not\ni q$ でない場合は $(\log n)$ 時間が必要になり，結局平均的には $(\log n)$ 時間のアルゴリズムである．

本論文は，前処理が不要で， $O(\log n)$ でもあるが，qが任意のPの中か，あるいはPと一点を共有する半径の十分に大きな円の中に一様に分布する場合で，かつ凸多角形Pの任意の2頂点 $v_s, v_e$ 間の境界の長さの2等分点を含む辺と線分 $v_s v_e$ のなす角の期待値が0であるとき，平均手間が $O(1)$ になる点包含判定アルゴリズムを提案する．

## 2．凸多角形点包含判定アルゴリズム

### 2．1 基本的考え方

Pの頂点 $v_s$ を始点とし $v_{s+1}$ を通る半直線を $L(v_s, v_{s+1})$ と定義する． $L(v_s, v_{s+1})$ と $L(v_e, v_{e-1})$ と線分 $v_s v_e$ が囲む領域をPの外接单体 $S(v_s, v_e)$ と定義する．外接单体は三角形をなす場合に有界となり（図1のa），なさない場合は有界でない（図1のb）．

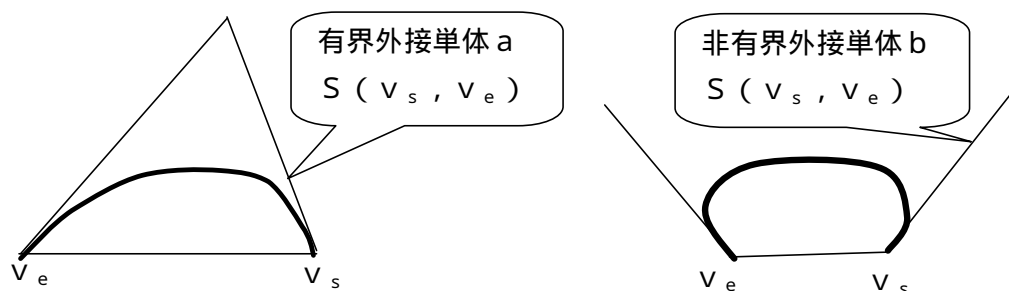


図1 外接单体

$O(1)$  の期待ステップ数を実現するために、 $q$  が  $S(v_s, v_e)$  の外部に存在することが判定できれば  $q \in P$  の判定ができることと、そうでない場合でたとえ  $P$  の部分凸鎖  $v_s v_e$  を 2 等分割して同様の操作を続ける場合でも一定条件下ではその期待値収束回数は  $n$  に無関係の一定値以下であるということを利用する。

## 2.2 点包含判定アルゴリズム

$rt(q, v_s, v_e)$  をベクトル  $v_s v_e$  が定める右平面内に  $q$  が存在すれば正または 0 の値を、そうでなければ負の値をとる関数とする。また、 $(s + e) / 2$  が整数値ならその番号を持つ頂点の両側の辺のいずれか一方をランダムに選びその辺の始点の頂点番号を、また整数値でない場合はその小数点を切り捨てた整数値を値とする関数を  $md(s, e)$  とする。頂点番号は法  $n$  で計算されるものとする。

```

s = 1 : e = n
if (rt(q, v_s, v_e) > 0) then print "out": break
Do
  if (v_{s+1} = v_e) then print "out": break
  c = md(s, e)           ' 凸鎖 v_s v_e を v_c で 2 分割する
  if (rt(q, v_c, v_{c+1}) > 0)
    print "out": break ' 接線 v_c v_{c+1} の右半平面に q が存在する
  elseif (rt(q, v_s, v_c) > 0)
    v_e = v_c           ' S(v_s, v_c) 内に q が存在する
  elseif (rt(q, v_c, v_e) > 0)
    v_s = v_c           ' S(v_c, v_e) 内に q が存在する
  else
    print "in": break  ' 三角形 (v_s v_c v_e) 内に q が存在する
  endif
loop

```

## 3. 計算複雑度

2 分法を用いる本アルゴリズムが  $O(\log n)$  であることは明らかである。したがって一定の条件下であれば、本アルゴリズムは期待収束回数は  $O(1)$  であることを示す。なお、本アルゴリズムでの収束回数は  $D$  オープンに入る前の 1 回と、入った後の  $D$  オープン繰り返し回数の合計とする。

[定理] 凸多角形  $P$  の任意の 2 頂点  $v_s, v_e$  間の境界の長さの 2 等分点を含む辺と線分  $v_s$

$v_e$  のなす角の期待値が 0 であって、点  $q$  が  $P$  内、あるいは  $P$  内の点を中心とする充分半径の大きい円内に一様分布するなら、本アルゴリズムの収束回数の期待値は 8 より小さい。

〔証明〕 本アルゴリズムの第  $i$  回目の  $D$  ループで、それまでの処理によって限定された  $P$  の部分凸鎖  $v_s v_e$  の間の境界の長さの 2 等分点を含む辺の始点を  $v_c$  とする。

$q$  が非有界な  $S(v_s, v_e)$  に含まれている場合に、 $q$  が  $S(v_s, v_c)$  と  $S(v_c, v_e)$  のいずれにも含まれないか、あるいは  $q$  を含む外接単体が有界である確率を  $f_i$  とする。また、 $q$  が有界な  $S(v_s, v_e)$  に含まれている場合に、 $q$  が  $S(v_s, v_c)$  と  $S(v_c, v_e)$  のいずれにも含まれない確率を  $g_i$  とする。

本アルゴリズムの手順が開始して  $q$  がいずれかの有界の外接単体に最初に含まれるとわかるまでの必要な繰り返し回数の期待値を  $a$  とし、その後、 $q$  が  $P$  に含まれるかどうかを断定できるまでの回数の期待値を  $b$  とする。 $f_i$  および  $g_i$  は互いに独立であるので下記の式が得られる。

$$\begin{aligned}
 a + b &= E(f_1 + \sum_{i=2}^{\log n} (i * f_i * \prod_{j=1}^{i-1} (1 - f_j))) \\
 &\quad + E(g_1 + \sum_{i=2}^{\log n} (i * g_i * \prod_{j=1}^{i-1} (1 - g_j))) \\
 &\quad + E(1 + \sum_{i=2}^{\log n} (i * \prod_{j=1}^{i-1} (1 - f_j))) \\
 &\quad + E(1 + \sum_{i=2}^{\log n} (i * \prod_{j=1}^{i-1} (1 - g_j))) \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} (i * (1 - E(f_i))^{i-1}) + \sum_{i=1}^{\infty} (i * (1 - E(g_i))^{i-1}) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{\infty} (i * (1 - E(f_i))^{i-1}) + \sum_{i=1}^{\infty} (i * (1 - E(g_i))^{i-1}) \\
 &\quad \dots \dots \dots (1)
 \end{aligned}$$

なお、 $E(f_i)$ ,  $E(g_i)$  は  $E(f_j)$ ,  $E(g_j)$  の期待値である。まず  $q$  が非有界な  $S(v_s, v_e)$  に含まれている場合を取り上げる。条件より  $L(v_c, v_{c+1})$  と  $L(v_s, v_e)$  の角の期待値は 0 である。一方、 $L(v_s, v_{s+1})$  と  $L(v_e, v_{e-1})$  のなす角はより小さい。したがって、たとえ  $q$  が  $S(v_s, v_c)$  と  $S(v_c, v_e)$  のいずれか一方に含まれるとしても、 $v_c$  と  $v_{c+1}$  を通る直線が  $L(v_s, v_{s+1})$  と  $L(v_e, v_{e-1})$  の両方に交差する事象の発生割合は  $q$  が一様分布するため交差しない事象の発生割合より大きいので、期待値  $E(f_i) > 0.5$  となる。

次に  $q$  が  $P$  内に一様に分布する場合は、 $H(*)$  を閉図形  $*$  の面積とすると、 $L(v_c, v_{c+1})$  と  $L(v_s, v_e)$  のなす角の期待値は 0 であるから、  
 $= H(S(v_s, v_c) \cap P) + H(S(v_c, v_e) \cap P)$  とおけば、  
 $< H(S(v_s, v_c)) + H(S(v_c, v_e)) = H(v_s \times v_e) < H(v_s v_c v_e)$   
 であり、 $q$  が一様分布するため、確率は面積に比例するから (図 2)、

$E \left( \frac{1}{L(v_c, v_{c+1}) + H(v_s, v_c, v_e)} \right) < 0.5$  となり,  $E(g_*) = 0.5$  を得る.  
 $q$  が  $P$  を含む充分大きい閉領域に一様に分布する場合も同様に,  $E(g_*) = 0.5$

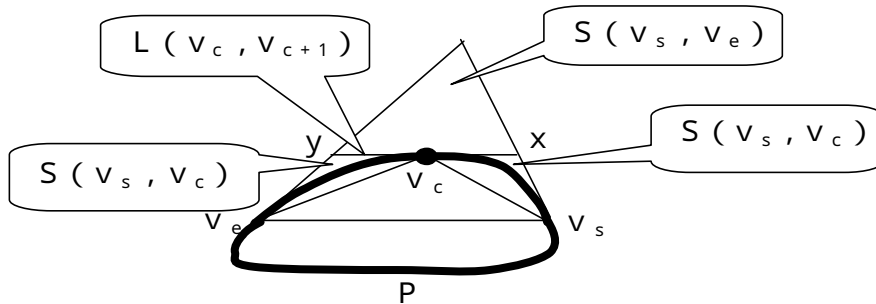


図2  $L(v_c, v_{c+1})$  と  $L(v_c, v_{c+1})$  の角の期待値は0

したがって(1)式より下式を得る.

$$\begin{aligned}
 a + b &= \sum_{i=1}^{\infty} (i * (1 - E(f_*))^{i-1}) + \sum_{i=1}^{\infty} (i * (1 - E(g_*))^{i-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} (i * 0.5^{i-1}) + \sum_{i=1}^{\infty} (i * 0.5^{i-1}) \\
 &= 1 / 0.5^2 + 1 / 0.5^2 = 8
 \end{aligned}$$

#### 4. 結果の検討

##### (1) 定理が適用できるPの形状

Pの任意の2頂点 $v_s, v_e$ 間の境界の長さの2等分点を含む辺と線分 $v_s v_e$ のなす角の期待値が0であるような凸多角形Pはどのような図形であろうか. 最も自明な例として正多角形がある. また, 偏角分布が一様に与えられた円の中心を光源とする光線が円と交わる点を頂点とする円の内接多角形も然りである, 頂点が円周上にない場合でも, 辺の長さの分布の標準偏差が充分小さな(辺長がほぼ均等な)凸多角形も定理の条件に当てはまる. 定理の条件はあくまで期待値に制限を加えているのであって, 期待値がどの程度まで小さければよいかを述べてはいない. したがって, 辺長にある程度の差があっても偏角の昇順で見た場合の辺の出現順序が充分ランダムにマージされているような図形であれば本アルゴリズムには高速性が期待できる.

そこで, これらを確認するために本アルゴリズムとアルゴリズムAを計算機に実装し性能を比較した. 楕円に内接し楕円の中心 $r$ から頂点に向かうベクトルの偏角の分布を一様とする凸多角形をPとすることにより, Pの辺長の分布の標準偏差を容易に制御できるようにした. 楕円の長径と短径との比を $f$ とすると,  $f$ が1に等しい場合にPの辺長ほぼ均等になる.  $f$ を大きくするに従って, Pは長細くなり, 頂点は北極と南極に偏在するようになり, 辺長の分布の標準偏差は大きくなる.  $f$ を変化させたときの平均収束回数と所要

計算時間の実験結果を図3, 4にしめす. なお,  $q$  は  $P$  内に一様分布させた. 図中, 点線はアルゴリズムAの結果である. また  $q$  の存在領域として  $P$  を含む充分大きな円としたときは本アルゴリズムの平均収束回数は1.5にまで低下することを実験で確認した.

図3, 4は, 一定の条件下では本アルゴリズムの平均手間は  $O(1)$  であるという定理1の主張と矛盾していない.

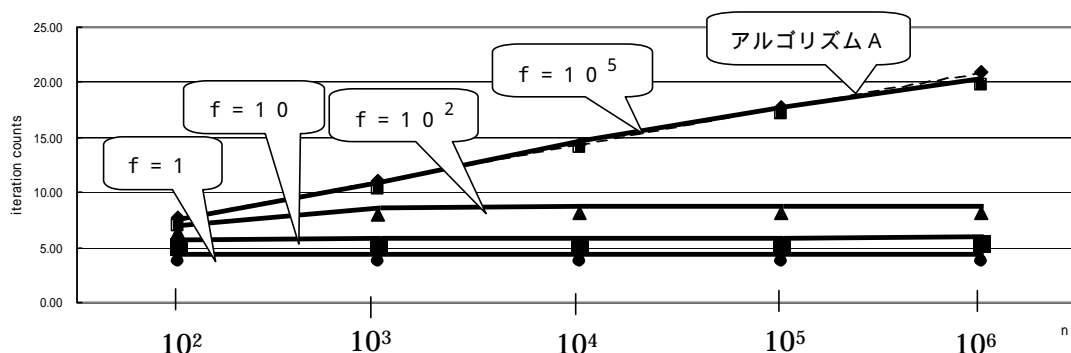


図3 本アルゴリズムとアルゴリズムAの平均収束回数比較

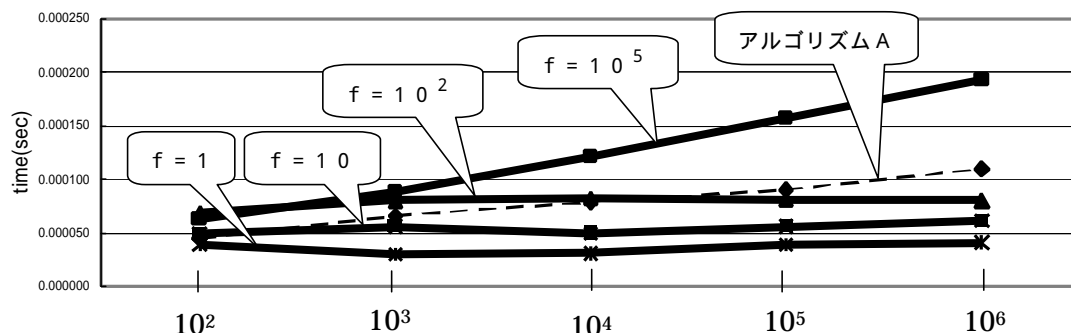


図4 本アルゴリズムとアルゴリズムAの平均計算時間比較

$f$  の値が  $10^5$  のように非常に大きいとき, すなわち辺長の標準偏差が大きいときは平均収束回数と平均計算時間がAと同様に  $\log n$  に比例している. 特に計算時間は  $n = 10^6$  の場合でAの約175% (図4) に悪化している. この原因は, 本アルゴリズムは2分法の繰り返しの度に質問点と半平面との位置関係判定処理をAに比べて1回だけ多く行うので,  $O(\log n)$  のケースではその処理が無駄になり, Aに比べて処理時間が余計にかかる結果となるためである. しかしながら  $f$  が10のときのように極めて歪な形状の場合でも殆ど性能劣化が起こっていないことから, 現実には辺長の標準偏差がある程度大きい多くの凸図形に対しても本アルゴリズムに高速に実行できると期待できる.

## (2) アルゴリズムが $O(\log n)$ となるケース

まず, 図5の左のように  $q$  が  $P$  の内部から見て長い辺  $L$  の裏に隠れているような場合が

挙げられる。この場合、 $q$  が非有界の  $S(v_{s-1}, v_{e+1})$  内に存在する可能性が大きくなり、 $L$  を特定するのに  $\log n$  の収束回数を必要とするケースが存在する。

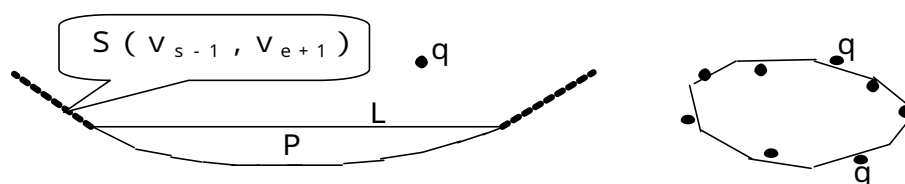


図5 本アルゴリズムが  $O(\log n)$  となる場合

また図5の右のように、たとえ  $P$  の辺長がほぼ均等であっても、 $q$  が  $P$  の辺の近傍にのみ偏在する場合は、結局  $q$  に近い辺を特定するまで収束が続くため、結局  $O(\log n)$  の収束回数が必要となる。図3, 4で  $f = 10^2$  の範囲では性能劣化の程度は  $n$  に無関係に同程度であることが図から読み取れる。この理由は  $q$  が存在する図5の左の  $S(v_{s-1}, v_{e+1})$  を作る半頂角の角の大きさ、あるいは隣り合った  $P$  の2辺が囲む3角形内に  $q$  が存在する場合は、その3角形の面積に比例して処理量が大きくなるが、それらの角や面積は辺長の比に依存し、 $n$  には無関係であるからである。

本アルゴリズムが  $O(1)$  であるためには、 $0 < E(f_*) < \alpha_1 < 1$ ,  $0 < E(g_*) < \alpha_2 < 1$  となるような  $\alpha_1, \alpha_2$  の存在を保証する充分条件さえ提示できればよく、定理の条件以外に存在する可能性がある。

### (3) アルゴリズム B との関係

第1章で述べたアルゴリズム B では、 $P$  の内接多角形の辺のうち、高々連続する2つの辺が特定される。Bでもその2辺を外接する  $P$  の凸鎖の両端の辺が成す凸錐が  $q$  を含むかどうかを各収束段階で判定すれば結局本アルゴリズムと本質的には変わらない。

### (4) 出力感応型と入力感応型

同一問題に対する複数の最適アルゴリズムの間にも優劣がある。Kirkpatrick と Seidel は  $O(n \log h)$  の出力感応型最適凸包アルゴリズム ([3],  $h$  は凸包の頂点数) を提示し、それを ultimate (究極の) ではないか? と主張した。

一般的に、出力感応型アルゴリズムはその最悪手間を表すための図形的に意味のある  $h$  のようなパラメータを持っている。しかしどのアルゴリズムもそのような明示的なパラメータを常に持つとは限らない。それでも、特定の入力条件下では平均手間、あるいは最悪手間を一般条件下での最悪手間よりも小さくできるアルゴリズムが存在しうる。それらの総称を入力感応型と呼べば、出力感応型はその中のひとつの分類となる。

ただし、入力感応型アルゴリズムと呼ばれる資格を持つアルゴリズムは、一般入力に対してもそのまま適用できるものでなければならない。元の一般問題に対して、入力条件を制約して(例えばシンプルな多角形を凸角形に制限するなどして)別個の問題を作り、その問題に対してのみ適用できるアルゴリズムが提案されることが一般に行われているが、それらは入力感応型とは呼べない。

入力感応型アルゴリズムが一般の入力条件に対しても最適であるならば，入力感応型最適アルゴリズムとなり，他の最適アルゴリズムとは区別されるべきである．たとえば Jarvis の  $O(n \log n)$  の出力感応型凸包アルゴリズム〔4〕は  $O(n^2)$  でもあり，最適ではないので入力（この場合は出力）感応型最適アルゴリズムとはいえない．

入力感応型を実現するための入力データに与える条件は様々のものが存在する可能性があり，入力感応型最適アルゴリズムの中でもまた優劣が存在する．その為，Kirkpatrick と Seidel が言うような ultimate なアルゴリズムが存在するかどうかは疑問である．

凸包問題など少数の問題領域を除いては，最適アルゴリズムが発見された後，更に入力感応型最適アルゴリズムの研究が引き続いて充分に行われているとは必ずしもいえない．入力感応型のアルゴリズムの研究は，対象とする問題構造のより詳しい解明に必要であるばかりでなく，アルゴリズムを必要とする日常業務の効率向上の観点から見ても非常に大切である．

#### （5）応用

$P$  から遠くに存在する  $q$  は包含判定を  $O(1)$  でできる可能性が高いという本アルゴリズムの特性を活用して，平面上に散開する互いに疎な複数の凸多角形から  $q$  を含むものを列挙する問題は高速に処理できる．また，2つの凸多角形の Minkowski 和が定理2の条件を満たせばそれらの交差判定を平均的に  $O(1)$  で判定できる．

### 5．終わりに

凸多角形  $P$  の任意の2頂点  $v_s, v_e$  間の境界の長さの2等分点を含む辺と線分  $v_s v_e$  のなす角の期待値が0であり，かつ質問点  $q$  が任意の  $P$  の中で，あるいは  $P$  内の点を中心とする十分に半径の大きい円の中に一様に分布する場合は，処理時間が平均的に  $O(1)$  となる点包含判定最適アルゴリズムを提案した．

〔1〕 浅井哲夫，計算幾何学，朝倉書店，82 - 85（1990）

〔2〕 D. Dobkin, D. Kirkpatrick, Determining the separation of preprocessed polyhedra—a unified approach, Proc. of ICLALP '90, 400-413, 1990, Lecture Notes in Computer Science 443.

〔3〕 D.G. Kirkpatrick and R. Seidel, The ultimate planar convex hull algorithm?, SIAM J. Comput. 15, 287-299(1986)

〔4〕 R.A. Jarvis, On the identification on the convex hull of a finite set of points in the plane, Info. Proc. Lett. 2. 18-21(1973)