最大クリークを抽出する $O(2^{0.19669n})$-時間の多項式領域アルゴリズム

中西裕陽, 富田悦次

電気通信大学大学院 電気通信学研究科 情報通信工学専攻
〒 182-8585 東京都調布市調布ヶ丘 1-5-1
E-mail: {hironaka, tomita}@ice.uec.ac.jp

あらまし. 節点数 n のグラフの最大クリーク抽出問題に対する多項式領域アルゴリズムの時間計算量は，Tarjan-Trojanowsky(1977) の $O(2^{0.333n})$ から Fomin ら (2006) の $O(2^{0.288n})$ に至るまで，この間約 30 年かけての着実な改良が進められてきた．本稿では，既に発表している Shindo-Tomita(1990) のアルゴリズムを基にして．これを更に顕著に改良した $O(2^{0.19669n})$-時間計算量の解析結果を与える．これは，極大クリーク全列挙のための Tomita ら (2006) の最適時間計算量 $O(3^{n/3}) = (2^{0.528n})$ に対する明らかな改良となっている．

An $O(2^{0.19669n})$-time and Polynomial-space Algorithm for Finding a Maximum Clique

Hiroaki Nakanishi, Etsuji Tomita
Department of Information and Communication Engineering,
Graduate School of Electro-Communications, The University of Electro-Communications
Chofugaoka 1-5-1, Chofu, Tokyo 182-8585, Japan
E-mail: {hironaka, tomita}@ice.uec.ac.jp

Abstract. Steady improvements have been made for the time complexity for finding a maximum clique in an n-vertex graph in polynomial-space from $O(2^{0.333n})$ by Tarjan-Trojanowsky(1977) to $O(2^{0.288n})$ by Fomin *et al.*(2006) in these around 30 years. We remarkably improve this complexity to have $O(2^{0.19669n})$-time based on an algorithm by Shindo-Tomita(1990). This is an obvious improvement of the optimal time complexity of $O(3^{n/3}) = (2^{0.528n})$ for generating all maximal cliques of Tomita *et al.*(2006).

1 はじめに

無向グラフ中の最大クリークを抽出する問題は理論，応用の両面で重要な問題であり，理論と実験の双方から様々な研究がなされている [1]-[13]．計算量理論の視点から見れば，この問題は自明な計算量が $O(P(n)2^n)$ (n はグラフの節点数, $P(n)$ は n の適当な多項式) という解決困難な問題である．この時間計算量はまず Tarjan ら [1] によって改善され，これに Robson[3] が続き，現在多項式領域における最良の結果は $O(2^{0.288n})$[8] となっている (詳細は表 1 を参照).

一方，Tomita らは極大クリークを全列挙する $O(3^{n/3}) = (2^{0.528n})$-時間アルゴリズムを発表しているが [9]，これを最大クリーク 1 個だけと出力を限定することにより，当然この計算量は大きく軽減できる．これに従い，筆者らは Shindo-Tomita のアルゴリズム MAXCLIQUE[4] を基として，$O(2^{0.24945n})$-時間 の多項式領域アルゴリズムと新しい解析手法を確立して先に発表している [11]．本稿では，同アルゴリズムの計算量を更に詳細に解析することにより，一層改良された $O(2^{0.19669n})$-時間計算量の結果を与える．

多項式領域

Author(s)	時間計算量
Tarjan-Trojanowski(1977)[1]	$O(2^{0.333n})$
Jian(1986)[2]	$O(2^{0.304n})$
Robson(1986)[3]	$O(2^{0.298n})$
Beigel(1999)[5]	$O(2^{0.2904n})$
Fomin *et al.*(2006)[8]	$O(2^{0.288n})$

指数領域

Author	時間計算量
Robson(1986)[3]	$O(2^{0.276n})$
Robson(2001)[6]	$O(2^{0.24951n})$

表 1 時間計算量改良の主要結果

2 諸定義と記法

本稿は [10], [11] に直接基づくものであり, 諸定義および記法については [10] を参照頂きたい.

3 アルゴリズム

アルゴリズム MAXCLIQUE を以下に示す. MAXCLIQUE については [4] および [10] に詳しいので, ここでの説明は省略する.

procedure **MAXCLIQUE**(G)
begin
  $Q := \emptyset$;
  $Qmax := \emptyset$;
  EXPAND(V)
end {of MAXCLIQUE}
  procedure **EXPAND**$(SUBG)$
  begin
   if $SUBG = \emptyset$ **then**
   if $|Q| > |Qmax|$
     then $Qmax := Q$ **fi**
   else u :=a vertex in $SUBG$
        that maximizes $|SUBG \cap \Gamma(u)|$;
    $Q := Q \cup \{u\}$;
    $SUBG_u := \Gamma(u) \cap SUBG$;
    if $|Q| + |SUBG_u| > |Qmax|$ **then**
     EXPAND$(SUBG_u)$ **fi**
    $Q := Q - \{u\}$;
    $EXT_u := SUBG - \{u\} - SUBG_u$;
    sort vertices in EXT_u in a
    decreasing order w.r.t their degrees ;
    for $i := |EXT_u|$ **downto** 2 **do**
     $v_i := EXT_u[1]$;
     $\overline{U}_i := \Gamma(v_i) \cap EXT_u$;
     $SUBG_{v_i} := \overline{U}_i \cup (\Gamma(v_i) \cap SUBG_u)$;
     if $|Q| + |SUBG_{v_i}| + 1 > |Qmax|$ **then**
      $Q := Q \cup \{v_i\}$;
      EXPAND$(SUBG_{v_i})$
      $Q := Q - \{v_i\}$
      $EXT_u := EXT_u - \{v_i\}$ **fi**
      $EXT_u[1]$:=a maximum degree vertex
           in EXT_u;
    else $i := 1$; **od**
  end {of EXPAND}

アルゴリズム MAXCLIQUE

4 計算量評価

MAXCLIQUE の領域計算量が多項式オーダーとなることは明らかであるので, ここでの証明は略す.

ここでは, 時間計算量が $O(2^{0.19669n})$ となることを証明する. まず計算量評価に用いる各記号については, [10] と同様に定義する.
ただし計算量評価上重要となる (T1) 式については, ここに改めて示しておく.

$$t(n) \leq t_a(|SUBG_u|) + \sum_{i=2}^{|EXT_u|} t_b(|SUBG_{v_i}|) + Cn^2 \quad \cdots \text{(T1)}$$

$t_a(|SUBG_u|)$, $t_b(|SUBG_{v_i}|)$ $(2 \leq i \leq |EXT_u|)$ は各部分問題の計算量の上界を表す記号である.

(T1) 式によって, 部分問題の計算量の上界が示されれば, 全体の上界は容易に決定されるので, 以下にまず部分問題の上界を示していく.

一般に最大次数をパラメーターとして与えられる上界は, 以降に示すように最大次数に関する数学的帰納法によって決定される.

まず帰納法の基底として, $0 \leq \Delta \leq 23$ の各場合についての具体的解析の結果として, 次の命題を与え, その成立を示す.

[命題 1] グラフの最大次数を Δ とするとき, もし $0 \leq \Delta \leq 23$ であるならば

$t_a(|SUBG_u|) \leq 933Cn^2 = C_1 n^2$ $(C_1 = 933C)$
が成り立つ.

(証明) 以下の (0)〜(23) による. ただし $0 \leq \Delta \leq 17$ の場合においては [10] および [11] において既に解析を行っているので, その詳細についてここでは省略し, 以降の解析に用いる結果のみを示す.

以下において最大次数を Δ とするとき, 場合 (Δ-Δ_1-Δ_2-$\cdots$) は, 次数 Δ の節点の子節点の最大次数が Δ_1, さらにその子節点の最大次数が $\Delta_2, \cdots$ である場合を表すものとし, n の多項式 $P_{\Delta-\Delta_1-\Delta_2-\cdots}(n)$ はそのような場合の計算量の上界を表す式とする.

(0)$ta(|SUBG_u|) \leq Cn$
(1)$ta(|SUBG_u|) \leq 2Cn$
(2)$ta(|SUBG_u|) \leq Cn^2 + 2Cn = P_{2-1}(n)$
(3)$ta(|SUBG_u|) \leq 2Cn^2 + 2Cn = P_{3-2-1}(n)$
(4)$ta(|SUBG_u|) \leq 3Cn^2 + 2Cn = P_{4-3-2-1}(n)$
(5)$t_a(|SUBG_u|) \leq 4Cn^2 + 2Cn = P_{5-4}(n)$
(6)$t_a(|SUBG_u|) \leq 5Cn^2 + 2Cn = P_{6-5}(n)$
(7)$t_a(|SUBG_u|) \leq 6Cn^2 + 2Cn = P_{7-6}(n)$
(8)$t_a(|SUBG_u|) \leq 7Cn^2 + 4Cn = P_{8-4}(n)$
(9)$t_a(|SUBG_u|) \leq 13Cn^2 + 6Cn = P_{9-5}(n)$

(10)$t_a(|SUBG_u|) \leq 17Cn^2 + 8Cn = P_{10-5}(n)$
(11)$t_a(|SUBG_u|) \leq 21Cn^2 + 10Cn = P_{11-5}(n)$
(12)$t_a(|SUBG_u|) \leq 26Cn^2 + 12Cn = P_{12-9}(n)$
(13)$t_a(|SUBG_u|) \leq 40Cn^2 + 18Cn = P_{13-9}(n)$
(14)$t_a(|SUBG_u|) \leq 53Cn^2 + 24Cn = P_{14-9}(n)$
(15)$t_a(|SUBG_u|) \leq 68Cn^2 + 30Cn = P_{15-10}(n)$
(16)$t_a(|SUBG_u|) \leq 86Cn^2 + 40Cn = P_{16-10}(n)$
(17)$t_a(|SUBG_u|) \leq 121Cn^2 + 54Cn = P_{17-13}(n)$

本稿ではさらに以下の $18 \leq \Delta \leq 23$ なる各場合についての解析を加えることで, [命題 1] が成立することを示す.

(18)

(18-0), (18-1) これらの場合は [11] 中の [補題 0.1] により, 計算量の上界とは成り得ないので, 記述は省略する. (同様の理由で以下 $19 \leq \Delta \leq 23$ の各解析中でも省略する.)

(18-2)

$t_a(|SUBG_u|) \leq 16Cn^2 + 16Cn$

(18-3)

$t_a(|SUBG_u|) \leq 14P_{3-2-1}(n) + Cn^2$
$= 29Cn^2 + 28Cn$

(18-4)

$t_a(|SUBG_u|) \leq 13P_{4-3-2-1}(n) + Cn^2$
$= 40Cn^2 + 26Cn$

(18-5)

$t_a(|SUBG_u|) \leq 12P_{5-4}(n) + Cn^2$
$= 49Cn^2 + 24Cn$

(18-6)

$t_a(|SUBG_u|) \leq 11P_{6-5}(n) + Cn^2$
$= 56Cn^2 + 22Cn$

(18-7)

$t_a(|SUBG_u|) \leq 10P_{7-6}(n) + Cn^2$
$= 61Cn^2 + 20Cn$

(18-8)

$t_a(|SUBG_u|) \leq 9P_{8-4}(n) + Cn^2$
$= 64Cn^2 + 36Cn$

(18-9)

$t_a(|SUBG_u|) \leq 8P_{9-5}(n) + Cn^2$
$= 105Cn^2 + 48Cn$

(18-10)

$t_a(|SUBG_u|) \leq 7P_{10-5}(n) + Cn^2$
$= 120Cn^2 + 56Cn$

(18-11)

$t_a(|SUBG_u|) \leq 6P_{11-5}(n) + Cn^2$
$= 127Cn^2 + 60Cn$

(18-12)

$t_a(|SUBG_u|) \leq 5P_{12-9}(n) + Cn^2$
$= 131Cn^2 + 36Cn$

(18-13)

$t_a(|SUBG_u|) \leq 4P_{13-9}(n) + Cn^2$
$= 161Cn^2 + 72Cn$

($P_{18-13}(n) = 161Cn^2 + 72Cn$ とおく.)

(18-14)

$t_a(|SUBG_u|) \leq 3P_{14-9}(n) + Cn^2$
$= 160Cn^2 + 72Cn$

(18-15)

$t_a(|SUBG_u|) \leq 2P_{15-10}(n) + Cn^2$
$= 137Cn^2 + 64Cn$

(18-16), (18-17)

$t_a(|SUBG_u|) \leq 88Cn^2 + 40Cn$ ((18-16) の場合)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 122Cn^2 + 54Cn$ ((18-17) の場合)

以上から, グラフの最大次数が 18 であれば

$t_a(|SUBG_u|) \leq 161Cn^2 + 72Cn$

(19)

(19-2)

$t_a(|SUBG_u|) = 17Cn^2 + 17Cn$

(19-3)

$t_a(|SUBG_u|) \leq 15P_{3-2-1}(n) + Cn^2$
$= 31Cn^2 + 30Cn$

(19-4)

$t_a(|SUBG_u|) \leq 14P_{4-3-2-1}(n) + Cn^2$
$= 43Cn^2 + 28Cn$

(19-5)

$t_a(|SUBG_u|) \leq 13P_{5-4}(n) + Cn^2$
$= 53Cn^2 + 26Cn$

(19-6)

$t_a(|SUBG_u|) \leq 12P_{6-5}(n) + Cn^2$
$= 61Cn^2 + 24Cn$

(19-7)

$t_a(|SUBG_u|) \leq 11P_{7-6}(n) + Cn^2$
$= 67Cn^2 + 22Cn$

(19-8)

$t_a(|SUBG_u|) \leq 10P_{8-4}(n) + Cn^2$
$= 71Cn^2 + 40Cn$

(19-9)

$t_a(|SUBG_u|) \leq 9P_{9-5}(n) + Cn^2$
$= 118Cn^2 + 54Cn$

(19-10)

$t_a(|SUBG_u|) \leq 8P_{10-5}(n) + Cn^2$
$= 137Cn^2 + 64Cn$
(19-11)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 7P_{11-5}(n) + Cn^2$
$= 148Cn^2 + 70Cn$
(19-12)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 6P_{12-9}(n) + Cn^2$
$= 157Cn^2 + 72Cn$
(19-13)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 5P_{13-9}(n) + Cn^2$
$= 201Cn^2 + 90Cn$
(19-14)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 4P_{14-9}(n) + Cn^2$
$= 213Cn^2 + 96Cn$
($P_{19-14}(n) = 213Cn^2 + 96Cn$ とおく．)
(19-15)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 3P_{15-10}(n) + Cn^2$
$= 205Cn^2 + 96Cn$
(19-16)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 2P_{16-10}(n) + Cn^2$
$= 173Cn^2 + 80Cn$
(19-17), (19-18)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 123Cn^2 + 54Cn$ ((19-17) の場合)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 162Cn^2 + 54Cn$ ((19-18) の場合)
以上から，グラフの最大次数が 19 であれば
$t_a(|SUBG_u|) \leq 213Cn^2 + 96Cn$

(20)
(20-2)
$t_a(|SUBG_u|) = 18Cn^2 + 18Cn$
(20-3)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 16P_{3-2-1}(n) + Cn^2$
$= 33Cn^2 + 32Cn$
(20-4)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 15P_{4-3-2-1}(n) + Cn^2$
$= 46Cn^2 + 30Cn$
(20-5)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 14P_{5-4}(n) + Cn^2$
$= 57Cn^2 + 28Cn$
(20-6)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 13P_{6-5}(n) + Cn^2$
$= 66Cn^2 + 26Cn$
(20-7)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 12P_{7-6}(n) + Cn^2$
$= 73Cn^2 + 24Cn$
(20-8)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 11P_{8-4}(n) + Cn^2$
$= 78Cn^2 + 44Cn$
(20-9)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 10P_{9-5}(n) + Cn^2$
$= 131Cn^2 + 60Cn$
(20-10)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 9P_{10-5}(n) + Cn^2$
$= 154Cn^2 + 72Cn$
(20-11)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 8P_{11-5}(n) + Cn^2$
$= 169Cn^2 + 80Cn$
(20-12)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 7P_{12-9}(n) + Cn^2$
$= 183Cn^2 + 84Cn$
(20-13)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 6P_{13-9}(n) + Cn^2$
$= 241Cn^2 + 108Cn$
(20-14)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 5P_{14-9}(n) + Cn^2$
$= 266Cn^2 + 120Cn$
(20-15)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 4P_{15-10}(n) + Cn^2$
$= 273Cn^2 + 128Cn$
($P_{20-15}(n) = 273Cn^2 + 128Cn$ とおく．)
(20-16)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 3P_{16-10}(n) + Cn^2$
$= 259Cn^2 + 120Cn$
(20-17)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 2P_{17-13}(n) + Cn^2$
$= 243Cn^2 + 108Cn$
(20-18), (20-19)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 163Cn^2 + 54Cn$ ((20-18) の場合)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 214Cn^2 + 96Cn$ ((20-19) の場合)
以上から，グラフの最大次数が 20 であれば
$t_a(|SUBG_u|) \leq 273Cn^2 + 128Cn$

(21)
(21-2)
$t_a(|SUBG_u|) = 19Cn^2 + 19Cn$
(21-3)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 17P_{3-2-1}(n) + Cn^2$
$= 35Cn^2 + 34Cn$
(21-4)

$t_a(|SUBG_u|) \le 16P_{4-3-2-1}(n) + Cn^2$
$= 49Cn^2 + 32Cn$

(21-5)

$t_a(|SUBG_u|) \le 15P_{5-4}(n) + Cn^2$
$= 61Cn^2 + 30Cn$

(21-6)

$t_a(|SUBG_u|) \le 14P_{6-5}(n) + Cn^2$
$= 71Cn^2 + 28Cn$

(21-7)

$t_a(|SUBG_u|) \le 13P_{7-6}(n) + Cn^2$
$= 79Cn^2 + 26Cn$

(21-8)

$t_a(|SUBG_u|) \le 12P_{8-4}(n) + Cn^2$
$= 85Cn^2 + 48Cn$

(21-9)

$t_a(|SUBG_u|) \le 11P_{9-5}(n) + Cn^2$
$= 144Cn^2 + 66Cn$

(21-10)

$t_a(|SUBG_u|) \le 10P_{10-5}(n) + Cn^2$
$= 171Cn^2 + 80Cn$

(21-11)

$t_a(|SUBG_u|) \le 9P_{11-5}(n) + Cn^2$
$= 190Cn^2 + 90Cn$

(21-12)

$t_a(|SUBG_u|) \le 8P_{12-9}(n) + Cn^2$
$= 209Cn^2 + 96Cn$

(21-13)

$t_a(|SUBG_u|) \le 7P_{13-9}(n) + Cn^2$
$= 281Cn^2 + 126Cn$

(21-14)

$t_a(|SUBG_u|) \le 6P_{14-9}(n) + Cn^2$
$= 319Cn^2 + 144Cn$

(21-15)

$t_a(|SUBG_u|) \le 5P_{15-10}(n) + Cn^2$
$= 341Cn^2 + 160Cn$

(21-16)

$t_a(|SUBG_u|) \le 4P_{16-10}(n) + Cn^2$
$= 345Cn^2 + 160Cn$

(21-17)

$t_a(|SUBG_u|) \le 3P_{17-13}(n) + Cn^2$
$= 364Cn^2 + 162Cn$

($P_{21-17}(n) = 364Cn^2 + 162Cn$ とおく．)

(21-18)

$t_a(|SUBG_u|) \le 2P_{18-13}(n) + Cn^2$
$= 323Cn^2 + 144Cn$

(21-19), (21-20)

$t_a(|SUBG_u|) \le 214Cn^2 + 96Cn$ ((21-19) の場合)
$t_a(|SUBG_u|) \le 274Cn^2 + 128Cn$ ((21-20) の場合)

以上から，グラフの最大次数が 21 であれば

$t_a(|SUBG_u|) \le 364Cn^2 + 162Cn$

(22)

(22-2)

$t_a(|SUBG_u|) = 20Cn^2 + 20Cn$

(22-3)

$t_a(|SUBG_u|) \le 18P_{3-2-1}(n) + Cn^2$
$= 37Cn^2 + 36Cn$

(22-4)

$t_a(|SUBG_u|) \le 17P_{4-3-2-1}(n) + Cn^2$
$= 52Cn^2 + 34Cn$

(22-5)

$t_a(|SUBG_u|) \le 16P_{5-4}(n) + Cn^2$
$= 65Cn^2 + 32Cn$

(22-6)

$t_a(|SUBG_u|) \le 15P_{6-5}(n) + Cn^2$
$= 76Cn^2 + 30Cn$

(22-7)

$t_a(|SUBG_u|) \le 14P_{7-6}(n) + Cn^2$
$= 85Cn^2 + 28Cn$

(22-8)

$t_a(|SUBG_u|) \le 13P_{8-4}(n) + Cn^2$
$= 92Cn^2 + 52Cn$

(22-9)

$t_a(|SUBG_u|) \le 12P_{9-5}(n) + Cn^2$
$= 157Cn^2 + 72Cn$

(22-10)

$t_a(|SUBG_u|) \le 11P_{10-5}(n) + Cn^2$
$= 188Cn^2 + 88Cn$

(22-11)

$t_a(|SUBG_u|) \le 10P_{11-5}(n) + Cn^2$
$= 211Cn^2 + 100Cn$

(22-12)

$t_a(|SUBG_u|) \le 9P_{12-9}(n) + Cn^2$
$= 235Cn^2 + 108Cn$

(22-13)

$t_a(|SUBG_u|) \le 8P_{13-9}(n) + Cn^2$
$= 321Cn^2 + 144Cn$

(22-14)

$t_a(|SUBG_u|) \le 7P_{14-9}(n) + Cn^2$

$= 372Cn^2 + 168Cn$

(22-15)

$t_a(|SUBG_u|) \le 6P_{15-10}(n) + Cn^2$
$= 409Cn^2 + 192Cn$

(22-16)

$t_a(|SUBG_u|) \le 5P_{16-10}(n) + Cn^2$
$= 431Cn^2 + 200Cn$

(22-17)

$t_a(|SUBG_u|) \le 4P_{17-13}(n) + Cn^2$
$= 485Cn^2 + 216Cn$

($P_{22-17}(n) = 485Cn^2 + 216Cn$ とおく．)

(22-18)

$t_a(|SUBG_u|) \le 3P_{18-13}(n) + Cn^2$
$= 484Cn^2 + 216Cn$

(22-19)

$t_a(|SUBG_u|) \le 2P_{19-14}(n) + Cn^2$
$= 427Cn^2 + 192Cn$

(22-20), (22-21)

$t_a(|SUBG_u|) \le 274Cn^2 + 128Cn$ ((22-20) の場合)
$t_a(|SUBG_u|) \le 365Cn^2 + 144Cn$ ((22-21) の場合)

以上から, グラフの最大次数が 22 であれば

$t_a(|SUBG_u|) \le 485Cn^2 + 216Cn$

(23)

(23-2)

$t_a(|SUBG_u|) = 21Cn^2 + 21Cn$

(23-3)

$t_a(|SUBG_u|) \le 19P_{3-2-1}(n) + Cn^2$
$= 39Cn^2 + 38Cn$

(23-4)

$t_a(|SUBG_u|) \le 18P_{4-3-2-1}(n) + Cn^2$
$= 55Cn^2 + 36Cn$

(23-5)

$t_a(|SUBG_u|) \le 17P_{5-4}(n) + Cn^2$
$= 69Cn^2 + 34Cn$

(23-6)

$t_a(|SUBG_u|) \le 16P_{6-5}(n) + Cn^2$
$= 81Cn^2 + 32Cn$

(23-7)

$t_a(|SUBG_u|) \le 15P_{7-6}(n) + Cn^2$
$= 91Cn^2 + 30Cn$

(23-8)

$t_a(|SUBG_u|) \le 14P_{8-4}(n) + Cn^2$
$= 99Cn^2 + 56Cn$

(23-9)

$t_a(|SUBG_u|) \le 13P_{9-5}(n) + Cn^2$
$= 170Cn^2 + 78Cn$

(23-10)

$t_a(|SUBG_u|) \le 12P_{10-5}(n) + Cn^2$
$= 205Cn^2 + 96Cn$

(23-11)

$t_a(|SUBG_u|) \le 11P_{11-5}(n) + Cn^2$
$= 232Cn^2 + 110Cn$

(23-12)

$t_a(|SUBG_u|) \le 10P_{12-9}(n) + Cn^2$
$= 261Cn^2 + 120Cn$

(23-13)

$t_a(|SUBG_u|) \le 9P_{13-9}(n) + Cn^2$
$= 361Cn^2 + 162Cn$

(23-14)

$t_a(|SUBG_u|) \le 8P_{14-9}(n) + Cn^2$
$= 425Cn^2 + 192Cn$

(23-15)

$t_a(|SUBG_u|) \le 7P_{15-10}(n) + Cn^2$
$= 477Cn^2 + 224Cn$

(23-16)

$t_a(|SUBG_u|) \le 6P_{16-10}(n) + Cn^2$
$= 517Cn^2 + 240Cn$

(23-17)

$t_a(|SUBG_u|) \le 5P_{17-13}(n) + Cn^2$
$= 606Cn^2 + 270Cn$

(23-18)

$t_a(|SUBG_u|) \le 4P_{18-13}(n) + Cn^2$
$= 645Cn^2 + 288Cn$

($P_{23-18}(n) = 645Cn^2 + 288Cn$ とおく．)

(23-19)

$t_a(|SUBG_u|) \le 3P_{19-14}(n) + Cn^2$
$= 640Cn^2 + 288Cn$

(23-20)

$t_a(|SUBG_u|) \le 2P_{20-15}(n) + Cn^2$
$= 547Cn^2 + 256Cn$

(23-21), (23-22)

$t_a(|SUBG_u|) \le 365Cn^2 + 144Cn$ ((23-21) の場合)
$t_a(|SUBG_u|) \le 486Cn^2 + 216Cn$ ((23-22) の場合)

以上から, グラフの最大次数が 23 であれば

$t_a(|SUBG_u|) \le 645Cn^2 + 288Cn \le 933Cn^2$

である. **(証明終)**

ここまで具体的に $0 \le \Delta \le 23$ においての計算量の上界を示してきたが, これらを一般化して次の補題を

示し, MAXCLIQUE の部分問題について, 時間計算量の上界を与える.

[補題 1.1] グラフの最大次数を Δ とするとき, $\Delta < n$ をみたす任意の Δ に対して定数 $C_1 = 933C$ としたとき

$t_a(|SUBG_u|) \le C_1 2^{0.19668\Delta} n^2$

が成立する.

(証明) いま定数 C_1 を

$C_1 = 933C$

によって定義すると, グラフの最大次数を Δ とするとき, もし $\Delta \le 23$ であれば, [命題 1] によって $\Delta < n$ をみたす任意の n に対して

$t_a(|SUBG_u|) \le C_1 n^2$

$\le C_1 2^{0.19668\Delta} n^2$

が成立する. 一般に節点数 n であるグラフの最大次数が $\Delta \ge 23$ であるとき,

$t_a(|SUBG_u|) \le C_1 2^{0.19668\Delta} n^2$

が成立すると仮定する. この仮定のもとで, 節点数 n, 最大次数 $\Delta + 1$ であるグラフについて, 最大次数節点 u の隣接部分の計算に要する手数を考える.

この節点の子節点の最大次数は Δ 以下であるから, そのような最大次数子節点の次数を $\Delta - \Delta'(0 \le \Delta' \le \Delta)$ とおく.

(i)$\Delta - \Delta' < 23$ の場合:

(T1) 式, および [命題 1] により

$t_a(|SUBG_u|) \le 22 \cdot C_1 n^2$

$\le C_1 \cdot 23 n^2$

$\le C_1 2^{0.19668 \cdot 23} n^2$

$\le C_1 2^{0.19668(\Delta+1)} n^2$

であるから, 題意は成立する.

(ii)$\Delta - \Delta' \ge 23$ の場合:

以下の 2 通りの場合に分ける.

(ii-i)$\Delta' \ge 23$ の場合;

(T1) 式により

$t_a(|SUBG_u|) \le ((\Delta+1) - (\Delta - \Delta') - 1)$
$\cdot C_1 2^{0.19668(\Delta-\Delta')} n^2 + Cn^2$

$= \Delta' C_1 2^{0.19668(\Delta-\Delta')} n^2 + Cn^2$

$= C_1 2^{0.19668\Delta} (\frac{\Delta'}{2^{0.19668\Delta'}} + \frac{1}{933 \cdot 2^{0.19668\Delta}}) n^2$

$\le C_1 2^{0.19668\Delta} (\frac{\Delta'}{2^{0.19668\Delta'}} + 0.00005) n^2$

$\Delta' \ge 23$ により, $\Delta' \le 2^{0.19668\Delta'}$ が成立するから

$t_a(|SUBG_u|) \le C_1 2^{0.19668\Delta} (1 + 0.00005) n^2$

$= C_1 2^{0.19668\Delta} \cdot 1.00005 n^2$

$\le C_1 2^{0.19668\Delta} \cdot 2^{0.19668} n^2$

$= C_1 2^{0.19668(\Delta+1)} n^2$

となる.

新たに具体的解析 (18)〜(23) を追加したことで, (ii-i) において $\frac{\Delta'}{2^{c\Delta'}} \le 1$ を成立させる c の値が, [11] の 0.2494 から 0.19668 へと減少させることが可能になった.

(ii-ii)$0 \le \Delta' \le 23$ の場合;

いま最大次数節点 u の子節点中最大次数の節点 u_0 の次数を $\Delta - k$ $(0 \le k \le 23)$ とおき,

$SUBG_{u_0} = SUBG_u \cap \Gamma(u_0)$

$EXT_{u_0} = SUBG_u - SUBG_{u_0}$

および $EXT_{u_0}[i] = v_{0i}$

とそれぞれ定義する. いま帰納法の仮定により

$t_a(|SUBG_{u_0}|) \le C_1 2^{0.19668(\Delta-k)}$ (T2)

である.

u_0 探索後に, EXT_{u_0} の各節点 ($k-1$ 個存在する) を根とする探索が行われるのであるが, このとき各探索においては u_0 隣接部分の最大クリークサイズが分枝限定条件として与えられる.

この条件のもとに探索が行われると, EXT_{u_0} の各節点の隣接部分中で, 分枝限定が効かずに探索されるのは, 各根節点中の (u_0 中のものより大きな) 最大クリークに属する節点だけである.

ここでその最大クリークは, $SUBG_{u_0}$ の部分集合に EXT_{u_0} の節点を加えた集合中に存在する. よって各 $t_b(|SUBG_{v_{0i}}|)$ は EXT_{u_0} の節点が構成する誘導部分グラフについての計算量によって決定され, いま $|EXT_{u_0}| \le 23$ であるから, [命題 1] により

$t_b(|SUBG_{v_i}|) \le C_1 n^2 + \Delta C n^2$ (T3)

である. 従って, (T1)〜(T3) を用いれば

$t_a(|SUBG_u|) \le t_a(|SUBG_{u_0}|)$
$+ \sum_{i=2}^{k-1} t_b(|SUBG_{v_{0i}}|) + Cn^2$

$\le C_1 2^{0.19668(\Delta-k)} + (k-1)(C_1 n^2 + \Delta C n^2) + Cn^2$

$\le C_1 2^{0.19668\Delta} (\frac{1}{2^{0.19668k}} + \frac{k-1}{2^{0.19668\Delta}} + \frac{k-1}{933}$
$+ \frac{1}{933 \cdot 2^{0.19668 \cdot 23}}) n^2$

$\le C_1 2^{0.19668\Delta} (\frac{1}{2^{0.19668k}} + \frac{k-1}{2^{0.19668 \cdot 23}}$
$+ \frac{k-1}{933} + 0.00005) n^2$

ここで, $0 \le k \le 23$ なる範囲内のいずれの k に対しても

$\frac{1}{2^{0.19668k}} + \frac{k-1}{2^{0.19668 \cdot 23}} + \frac{k-1}{933} + 0.00005 \le 1.14$

が成立する. よって

$t_a(|SUBG_u|) \le 1.14 \cdot C_1 2^{0.19668\Delta} n^2$

$\le 2^{0.19668} \cdot C_1 2^{0.19668\Delta} n^2$

$= C_1 2^{0.19668(\Delta+1)} n^2$

であるから, この場合も補題は成立する.

以上と数学的帰納法により, 一般にグラフ中の最大次数節点を u とするとき, u の次数が Δ であれば

$t_a(|SUBG_u|) \leq C_1 2^{0.19668\Delta} n^2$
が成り立つ. **(証明終)**

また, このとき $v_i = EXT[i]$ の次数は Δ 以下であるから, $t_b(|SUBG_{v_i}|)$ に関しても次が成立する.

[補題 1.2] グラフの最大次数を Δ とするとき, $\Delta < n$ をみたす任意の Δ に対して

$t_b(|SUBG_{v_i}|) \leq C_1 2^{0.19668\Delta} n^2$

をみたす定数 $C_1 = 933C$ が存在する. □

証明は [補題 1.1] と全く同様である.

以上から, 全体の計算量の上界について次の補題が成り立つ.

[補題 2] 節点数 n, 最大次数 Δ のグラフ G に対して

$t(n) \leq C_1 2^{0.19668\Delta} n^3$

である.

(証明) (T1) 式によって

$t(n) \leq t_a(|SUBG_u|) + \sum_{i=2}^{|EXT_u|} t_b(|SUBG_{v_i}|) + Cn^2$

であるから

$t(n) \leq (n - \Delta - 1) C_1 2^{0.19668\Delta} n^2 + Cn^2$

$\leq n \cdot C_1 2^{0.19668\Delta} n^2 = C_1 2^{0.19668\Delta} n^3$

となる. **(証明終)**

以上を用いて, MAXCLIQUE の計算量が $O(2^{0.19669n})$ であることを示す.

[定理 1]

$t(n) = O(2^{0.19669n})$ である.

(証明) 定数 C_2 を, $C_2 = 4.66 \cdot 10^{15}$ と定義すると, 任意の整数 $n \geq 0$ に対して

$C_2 2^{0.00001n} \geq n^3$

が成立する. いま [補題 2] によって

$t(n) \leq C_1 2^{0.19668\Delta} n^3$

が成立しているから

$t(n) \leq C_1 2^{0.19668(n-1)} n^3$ ($\Delta \leq n - 1$ による)

ここで C_2 の設定により

$t(n) \leq C_1 2^{0.19668(n-1)} \cdot C_2 2^{0.00001n}$

$\leq C_1 C_2 2^{0.19669n}$

$= C_3 2^{0.19669n} \quad (< C_3 2^{n/5})$

($C_3 = C_1 C_2$ とおく)

故に, $t(n) = O(2^{0.19669n})$ である. **(証明終)**

5 むすび

最大クリーク抽出問題に対する単純なアルゴリズム MAXCLIQUE を提唱し, その計算量が, 節点数 n のグラフに対して $O(2^{0.19669n})$ であることを示した.

また MAXCLIQUE 自体の特徴として, 従来の各アルゴリズムより格段に実働化が容易である. これより, [1] を初めとするアルゴリズムと計算機上で実行速度比較を行った結果, より高速に動作することが知られている [4]. また, [8] のアルゴリズムと比較しても高速に動作することが確認できている [13].

謝辞 有益なコメントを頂いた, 京都大学　岩間一雄 教授, 伊藤大雄 准教授および, 本稿アルゴリズム MAXCLIQUE の実験的確認評価に当たって頂いた当研究室卒研生 玉田和洋君に感謝いたします. なお, 本研究は科学研究費基盤研究 (B), (C) の補助を受けている.

参考文献

[1] R. E. Tarjan, A. E. Trojanowski, "Findig a maximum independent set," SIAM J. on Computing 6, 537-546 (1977).

[2] T. Jian, An $O(2^{0.304n})$ algorithm for solving maximum independent set problem. IEEE Trans. on Computing 35, 847-851(1986).

[3] J. M. Robson, "Algorithms for maximum independent sets," J. on Algorithms 7, 425-440 (1986).

[4] M. Shindo, E. Tomita, "A simple algorithm for finding a maximum clique and its worst-case time complexity," Systems and Conputing in Japan 21, 1-13 (1990).

[5] R. Beigel, "Finding maximum independent sets in sparse and general graphs," Proc. ACM-SIAM Symp. On Discrete Algorithms, 856-857 (1999).

[6] J. M. Robson, "Finding a maximum independent set in time $O(2^{n/4})$," Tech. Rep. 1251-01, LaBRI, Universite Bordeaux (2001).

[7] J. Chen, I. A. Kanji, G. Xia, "Labeled search trees and amortized analysis: improved upper bounds for NP-hard problems," Algorithmica 43, 245-273 (2005).

[8] F. V. Fomin, F. Grandoni, D. Kratsch, "Measure and conquer: A simple $O(2^{0.288n})$ independent set algorithm," Proc. ACM-SIAM Symp. On Discrete Algorithms, 18-25 (2006).

[9] E. Tomita, A. Tanaka, H. Takahashi, "The worst-case time complexity for generating all maximal cliques and computational experiments," Theoretical Computer Science 363, 28-42 (2006).

[10] 中西裕陽, 富田悦次, "最大クリークを抽出する単純なアルゴリズムの最大次数 4 のグラフにおける計算量," 信学技報, COMP2007-18, 1-7(2007).

[11] 中西裕陽, 富田悦次, "最大クリークを抽出する計算量 $O(2^{0.24945n})$ の多項式領域アルゴリズム" 信学技報, COMP2007-46, 33-40(2007).

[12] E. Tomita, "The maximum clique problem and its applications (Invited lecture)," IPSJ SIG Thch. Rep., 2007-MPS-67 (2007, to appear).

[13] 玉田和洋, 富田悦次, 中西裕陽, "理論評価付き最大クリーク抽出アルゴリズムの実験的評価" 情処研報, 2007-MPS-67(2007, 発表予定)