平面格子上の2種点集合の平衡分割問題

宇野美由紀† 河野 智治† 加納 幹雄†

† 茨城大学工学部
〒316-8511 茨城県日立市中成沢町 4-12-1

E-mail: †umyu@mug.biglobe.ne.jp, ††kano@mx.ibaraki.ac.jp

あらまし 平面格子上にある赤点の集合と青点の集合の分割について述べる．最初の定理は，ハム・サンドイッチの定理と類似する次の結果である．平面格子上にある $2n$ 個の赤点と $2m$ 個の青点に対して，これらを同時に2等分割する準直交分割が存在する．格子上の点集合において，各格子線上に高々1点しかその点がないとき，この点集合は一般の位置にあるという．また，各格子線との共通部分がひとつの直線分かまたは空集合となる連結領域を格子凸領域という．次に，一般の位置にある赤点集合と青点集合は凸領域によって3等分割できることも示す．つまり，平面格子上の一般の位置にある $3n$ 個の赤点と $3m$ 個の青点は，平面を3個の格子凸領域に分割して，各領域には赤点 n 個と青点 m 個が存在するようにできる．

キーワード 赤点と青点，平面格子，2種点集合，凸分割，準直交分割

Balanced Subdivision of Two Sets of Points in the Plane Lattice

Miyuki UNO†, Tomoharu KAWANO†, and Mikio KANO†

† Faculty of Engineering, Ibaraki University
Nakanarusawa 4-12-1, Hitachi, 316-8511 Japan

E-mail: †umyu@mug.biglobe.ne.jp, ††kano@mx.ibaraki.ac.jp

Abstract We consider balanced subdivision of red points and blue points in the plane lattice. We first show that if $2n$ red points and $2m$ blue points are given in the plane lattice, then there exists a semi-rectangular that bisects both red points and blue points. A set S of points in the plance lattices is said to be in general position if every lattice line contains at most one point of S. For a connected region of the lattice, if the intersection of every lattice line and the region is empty or consists of one line segment, then the region is called a lattice convex set. We next show that if $3n$ red points and $3m$ blue points are given in the plane lattice in general position, then the plance can be patitioned into three lattice convex regions so that each region contains exactly m red points and n blue points.

Key words red and blue points, two sets of points, plane lattice, balanced subdivision, semi-rectangular, semi-rectangular bisector,

1. はじめに

本稿では平面格子上にある赤点の集合 R と青点の集合 B の分割について述べる．本研究の目標は平面を凸多角形に分割して，どの多角形にも赤点と青点があらかじめ決められた数だけあるようにすることである．ただし，多角形は境界が直線からなる領域で，無限領域も許す．本稿を通して，平面格子は xy-軸に沿って定義されており，隣り合う格子間の距離は 1 である．

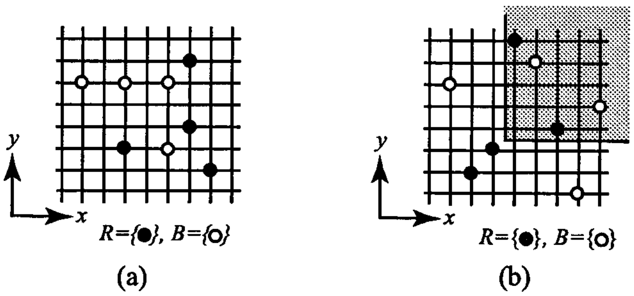

図 1　(a) 平面格子上の赤点の集合 R と青点の集合 B;　(b) 平面格子上の一般の位置にある赤点の集合 R と青点の集合 B

図 1(a) は平面格子とその上にある赤点の集合 R と青点の集合 B の例を示している．図 1(b) では，すべての格子直線上にたかだか一つの点しか存在しない．このような配置のとき，$R \cup B$ は**平面格子上の一般の位置**にあるという．平面を直交する半直線で二つの領域に分割するとき，このような分割を**直交分割**と呼ぶ．図 1(b) では，直交分割によって平面が 2 つの凸領域に分割され，各領域には $|R|/2$ 個の赤点と $|B|/2$ 個の青点がある．このような分割は下記の定理が示すように常に存在する．

[**定理** 1]　平面格子上の一般の位置にある赤点の集合 R と青点の集合 B について，$|R| = 2n$ かつ $|B| = 2m$ ならば，ある直交分割が存在して平面を 2 つの領域に分割し，各領域には赤点 n 個と青点 m 個があるようにできる．

ここで，平面格子上での凸の定義を与える．平面格子上の多角形 P について，垂直または水平な任意の直線 l との共通部分 $P \cap l$ が空集合かあるいは一つの線分からなるとき，P は**凸**であるとか，より正確に**格子凸**であるという．図 2 の左側は凸な多角形であるが，右側は $P \cap l$ が二つの線分から成っており凸ではない．

また，下記の定理のように，$R \cup B$ が平面格子上の一般の位置にあるときには，凸領域に 3 等分割することもできる．

[**定理** 2]　平面格子上の一般の位置にある赤点の集合 R と青点の集合 B について，$|R| = 3n$ かつ $|B| = 3m$ ならば，平面を 3 つの凸領域に分割し，各領域には赤点 n 個と青点 m 個があるようにできる．

なお，上の平面を 3 つの凸領域に分割する方法は，2 つの長方形を用いた分割でできることも示される．

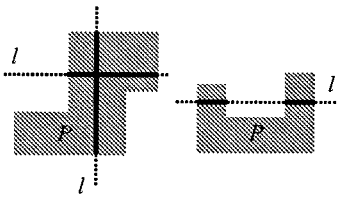

図 2　左図：凸な多角形, 右図：凸でない多角形の例.

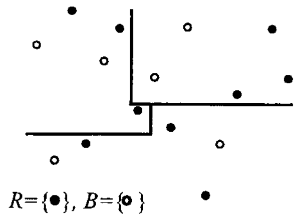

図 3　平面格子上の一般の位置にある $R \cup B$ の 3 等分割．各領域は凸である．

つぎに，平面格子上の一般の位置にない赤点と青点の分割について考える．すなわち，平面格子の水平または垂直な直線上に２つ以上の点が存在してもよい場合について考える．図 1(a) はこのような配置の例である．まず，このときには直交分割では２つの点集合を同時に２等分割することはできない配置があることを示す．図４の左図の配置では，赤点の集合を２等分割するのに少なくとも３本の水平または垂直な線分からなる多角形が必要である．つまり，どのような直交分割を用いても２等分割できない．よって図４の右図のような赤点と青点の配置のとき，これを同時に２等分割するには少なくとも６本の線分からなる多角形が必要となる．

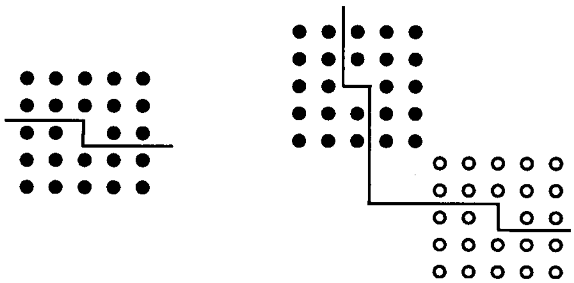

図 4　左図：ある 24 個の赤点の配置．右図：赤点青点それぞれ 24 個からなる配置.

ここで，新しい用語をいくつか定義する．**準垂直線**とは，(i) 垂直な直線であるか，(ii) ２本の垂直線分と長さ１の水平線分から構成される多角形である (図 5)．**準水平線**も同様に定義される．**準直交分線**とは，端点を共有する準垂直線分と準水平線分で構成される多角形で，これによる平面の分割を平面の**準直交分割**という．

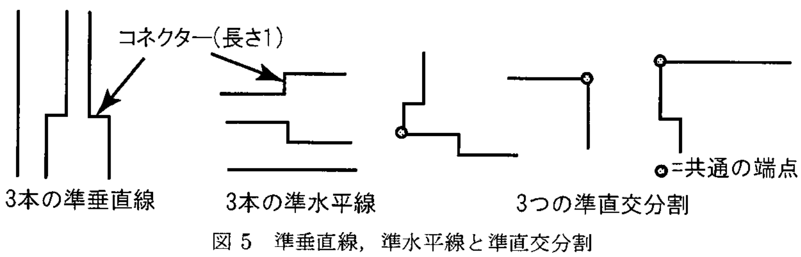

図 5　準垂直線，準水平線と準直交分割

［**定理** 3］ 平面格子上にある赤点の集合 R と青点の集合 B について，もし $|R| = 2n$ かつ $|B| = 2m$ ならば，ある準直交分割が存在して平面を 2 つの領域に分割し，各領域には n 個の赤点と m 個の青点があるようにできる．

2. 定理 1, 2 の証明

この節では各格子直線上に赤点とか青点が高々 1 個しか存在しない $R \cup B$ が一般の位置ある点集合と仮定する．初めに証明のための用語をいくつか導入する．直交分割 $Odiv$ (orthogonal division) は，ある点 p を端点とする垂直線分 r_y と水平線分 r_x によって定義される．$Odiv$ によって平面は長方形ともう一つの領域に分割される．これらの領域を $Reg1(Odiv)$ と $Reg2(Odiv)$ で表わし，$R \cap Regi(Odiv)$ と $B \cap Regi(Odiv)$ はそれぞれ領域 $Regi(Odiv)$ にある赤点集合と青点集合を表わすものとする．

［**補題** 4］ もし次の条件 (i),(ii) を満たす直交分割 $Odiv_1$ および $Odiv_2$ が存在するなら，ちょうど k 個の赤点と h 個の青点を含む領域 $Reg(Odvi_3)$ を定める直交分割 $Odiv_3$ が存在する：(i) $Odiv_1$ によって定まるある領域には k 個の赤点と h 個以下の青点がある，(ii) $Odiv_2$ によって定まるある領域には k 個の赤点と h 個以上の青点がある．

補題 4 の証明：与えられた直交分割 $Odiv_1$ を赤点の数は一定のままに青点の数は高々1 個しか変動しないように連続的に動かして，別の直交分割 $Odiv_2$ が得られることを示す．その際，(i) の領域は (ii) の領域へ移ることも示す．これが示されれば定理は証明されたことになる．

一般性を失うことなく $Odiv_1$ によって決まる領域 $Rect = Reg1(Odiv_1)$ は $x > 0$, $y > 0$ 方向に無限に広がる領域と仮定してよい (図 6)．まず，$Rect$ を一本の垂直線分 $Line$ によって定義されるような半平面 $Reg* = Reg1(Line)$ に連続的に動かせることを示す．はじめに注目している領域を $Rect$ とする．r_y を $x > 0$ 方向に連続的に平行移動して，$Reg1(Odiv_1)$ 内のある赤点 z の直左になったら，$Reg2(Odiv_1)$ が z を取り込むまで r_x をさらに $x > 0$ 方向に進める．このときの直交分割を $Odiv'_1$ とする．つぎに，r_x を $y < 0$ 方向に連続的に平行移動して，$Reg2(Odiv'_1)$ 内のある赤点 z' の直上になったら，$Reg1(Odiv'_1)$ が z' を取り込むまでさらに $y < 0$ 方向に進める．

これらの操作を繰り返して，一本の垂直線分 $Line$ で定まる半平面 $Reg*$ を得られる (図 6 上段右側)．同様にして，一本の水平線分で定まる半平面を得られる (図 6 下段)．また，$R \cup B$ は平面の一般の位置にあるので操作の各段階で各領域に存在する青点の数はひとつずつ増減する．

同様にして，一本の垂直または水平な線分 $Line$ で構成される 2 つの直交分割は各領域の赤点の数を変えることなく互いに移ることができる．補題 4 の仮定から，以下の 3 つのうち一つが成り立つ：

(1) $|B \cap Reg1(Odiv_1)| \leqq h$ かつ $|B \cap Reg1(Line_1)| \geqq h$,

(2) $|B \cap Reg1(Odiv_2)| \geqq h$ かつ $|B \cap Reg1(Line_1)| \leqq h$,

(3) $|B \cap Reg1(Odiv_1)| \leqq h$, $|B \cap Reg1(Line_1)| \leqq h$, $|B \cap Reg1(Odiv_2)| \geqq h$ かつ $|B \cap Reg1(Line_2)| \geqq h$.

操作の各段階で各領域に存在する青点の数はひとつずつ増減するので，上の (1) および (2) の場合には，$Reg1(Odiv_1)$(resp. $Odiv_2$) を $Reg*$ に移動する間に所望の分割を見つけられる．また，

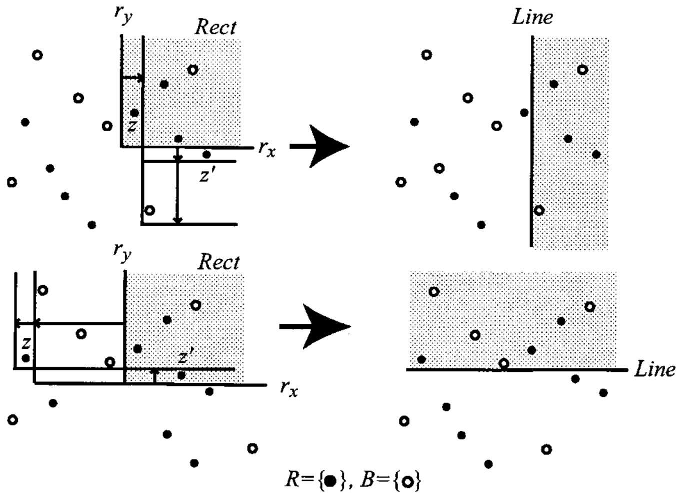

図 6　$Reg*$ はある一本の { 水平, 垂直 } な線分から構成されている. 灰色の部分は注目している領域.

(3) の場合は $Reg1(Line_1)$ を $Reg1(Line_2)$ に移動する間に所望の分割を見つけられる.

□

一本の垂直線または水平線からなり, n 個の赤点を注目領域 $Reg1(Odiv_1)$ にもつような直交分割 $Odiv_1$ が存在する. すると, $Reg2(Odiv_1)$ はもうひとつの直交分割 $Odiv_2$ を構成しており, その注目領域 $Reg1(Odiv_2) = Reg2(Odiv_1)$ は n 個の赤点を含む. このとき明らかに以下のどちらかが成り立つ : $|B \cap Reg1(Odiv_1)| \leqq m$ かつ $|B \cap Reg1(Odiv_2)| \geqq m$, $|B \cap Reg1(Odiv_1)| \geqq m$ かつ $|B \cap Reg1(Odiv_2)| \leqq m$. したがって補題 4 を適用できる. □

定理 2 の証明 : 各領域に $|R|/3$ 個の赤点が存在するような平面の分割 $P_1 \cup P_2 \cup P_3$ を, ある水平線分 l_1 と垂直線分 l_2 を用いて定義できる (図 7).

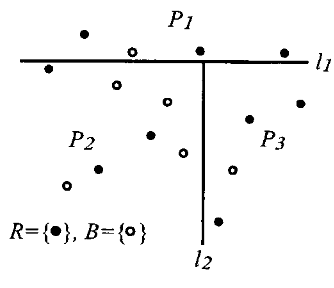

図 7　各 P_i に存在する赤点の数は同じ.

各領域には $|R|/3$ 個の赤点が存在し, 明らかに以下の 4 つうちの一つが成り立つから, 補題 4 を適用できる :

(1) $|P_1 \cap B| \geqq |B|/3$ かつ $|P_2 \cap B| \leqq |B|/3$,
(2) $|P_1 \cap B| \geqq |B|/3$ かつ $|P_3 \cap B| \leqq |B|/3$,
(3) $|P_1 \cap B| \leqq |B|/3$ かつ $|P_2 \cap B| \geqq |B|/3$,
(4) $|P_1 \cap B| \leqq |B|/3$ かつ $|P_3 \cap B| \geqq |B|/3$.

したがって，ある直交分割 $Odiv$ が存在して，$Odiv$ によって決まる長方形 $Rect = Reg1(Odiv)$ の内部にはちょうど $|R|/3$ 個の赤点と $|B|/3$ 個の青点が存在する．このとき，以下の条件を満たすような水平線 l_x または垂直線 l_y が存在する：(i) l_x と l_y は $Rect$ に交差せず，(ii) l_x または l_y によって決まる半平面のうち，$Rect$ を含まない領域にはちょうど $|R|/3$ 個の赤点が存在する (図 8).

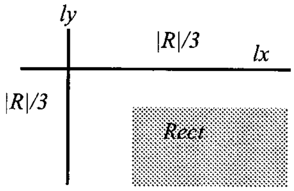

図 8

一般性を失うことなく，$Rect$ が $x > 0$, $y < 0$ 方向に無限に広がる領域と仮定してよい．ここで，上で述べたような l_x が存在すると仮定する．直交分割 $Odiv'$ を，以下のふたつを満足するように定義する：(i) r_x は l_x に重なる位置にあり，(ii) r_y は l_x よりも y 軸について小さい値を持つ点のうち，x 軸についてもっとも小さい値を持つ点の直左にある (図 9(1)) を参照.

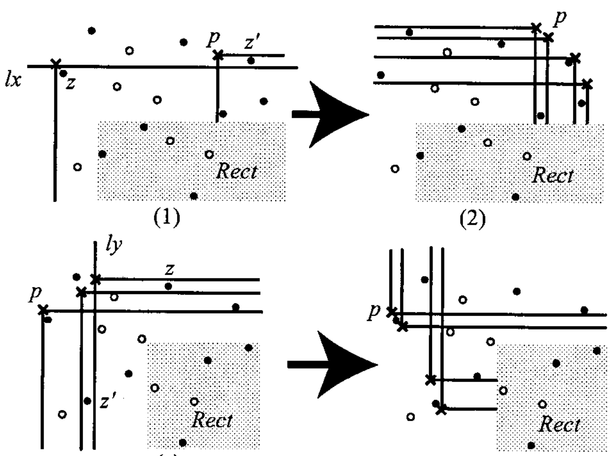

図 9

$Odiv'$ を連続的に動かしていく．r_y を $x > 0$ 方向に連続的に水平移動して，r_y がある赤点 z に出会ったら，$Reg2(Odiv')$ が z を取り込むまで r_y を移動する．さらに，r_x を $y > 0$ 方向に水平移

動して，$Reg1(Odiv')$ が新たに赤点 z' を取り込むまで進めていく (図 9(1))．これらの操作を繰り返して，$Odiv'$ によって定まる長方形 $Rect'$ が r_y よりも x 軸について大きい値を持つ点のうちで y 軸について最も大きい値を持つ点を含むようになったら，r_x の向きを $x>0$ 方向から $x<0$ 方向に変える．ただしこのとき，新しい r_x が $Reg2(Odiv')$ に存在するすべての点よりも y 軸について大きい値を持つようにする (図 9(2) を参照)．つぎに，この r_x を $y<0$ 方向に移動する．r_x が赤点 z に出会ったら，$Reg2(Odiv')$ が z を取り込むまで r_x を進め，さらに r_y を $x>0$ 方向に移動して，$Reg1(Odiv')$ が $Reg2(Odiv')$ から新しい赤点を取り込むようにする．これらの操作の後には，$Reg1(Odiv')$ が点集合 $(R \cup B) \cap (\mathrm{R}^2 \setminus Rect)$ のうち x 軸について最大の値を持つ点を含む．上の操作の過程で r_x, r_y は $Rect$ に交差しない．

l_y については，直交分割 $Odiv'$ を (i) r_y は l_y に一致し，(ii) r_x は l_y よりも x 軸について大きい値を持つ点のうち y 軸について最も大きい値を持つ点の直上にあるように定める (図 9(a))．すると r_x と r_y の共通の端点 p は $x<0$, $y<0$ 方向に移動したのち (図 9(a))，$x>0$, $y<0$ 方向に移動するので (図 9(b))，移動の過程で r_x と r_y は $Rect$ に交差しない．以上と補題 4 から，残り 2/3 の点集合 $(R \cup B) \cap (\mathrm{R}^2 \setminus Rect)$ の赤点と青点をそれぞれ 2 等分し，共通の端点 p が $Rect$ に含まれないような直交分割が存在する．したがって所望の 3 つの凸領域が存在する．　□

3. 定理 3 の証明

この節では $R \cup B$ が平面格子上の一般の位置ないような点集合であると仮定する．初めに証明のための用語をいくつか導入する．準直交分割 $Sdiv$ (semi-orthogonal division) は，ある点 p を端点とする準垂直線分 r_y と準水平線分 r_x によって定義される．$Sdiv$ によって平面は準長方形ともう一つの領域に分割される．これらの領域を $Reg1(Sdiv)$ と $Reg2(Sdiv)$ で表わし，$R \cap Regi(Sdiv)$ と $B \cap Regi(Sdiv)$ はそれぞれ領域 $Regi(Sdiv)$ にある赤点集合と青点集合を表わすものとする．

[補題 5]　R を平面格子上にある赤点の集合とする．ある整数 $k (1 \leqq k \leqq |R|)$ について，平面をそれぞれが k 個の赤点を含む 2 つの領域に分割するような準垂直線と準水平線が存在する．

[補題 6]　平面格子上にある赤点の集合 R と青点の集合 B について，もし次の条件 (i),(ii) を満たす準直交分割 $Sdiv_1$ と $Sdiv_2$ が存在するなら，ちょうど k 個の赤点と h 個の青点を含む領域 $Reg(Sdvi_3)$ を定める準直交分割 $Sdiv_3$ が存在する：(i) $Sdiv_1$ で定まるある領域には k 個の赤点と h 個以下の青点がある，(ii) $Sdiv_2$ で定まるある領域には k 個の赤点と h 個以上の青点がある．

補題 5 の証明：l_1 と l_2 を，互いの距離が 1 または 0 であるような垂直線で，l_1 の左半平面には赤点が k 個以上、l_2 の左半平面には赤点が k 個以下だけあるものとする (図 11)．このような l_1 と l_2 が存在するのは明らかである．l_1 と l_2 の距離が 0 のとき所望の準垂直線分を得ている．よって距離が 1 であると仮定してよい．l_1 と l_2 の間に長さ 1 の水平線分 seg_h を挿入する．l_1 と l_2 の定義から，l_1 と l_2 の間の open-strip において seg_h より $y>0$ 方向に存在する赤点と，l_1 の左半平面にある赤点の総和がちょうど k になるような seg_h の配置が存在する．したがって所望の準垂直線を得られる．同様にして R を 2 等分割するような準水平線を得られる．　□

補題 6 の証明：与えられた準直交分割 $Sdiv_1$ を赤点の数は一定のままに青点の数は高々 1 個しか変動しないように連続的に動かして，別の直交分割 $Sdiv_2$ が得られることを示す．その際，(i) の領域は (ii) の領域へ移ることも示す．(紙面の関係により省略します)

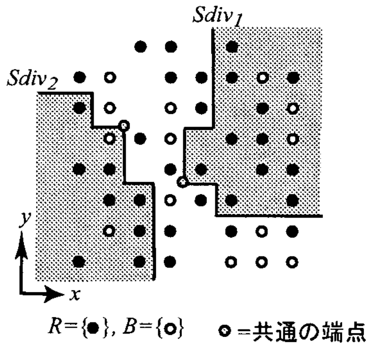

図 10　準直交分割 $Sdiv_1$ と $Sdiv_2$.

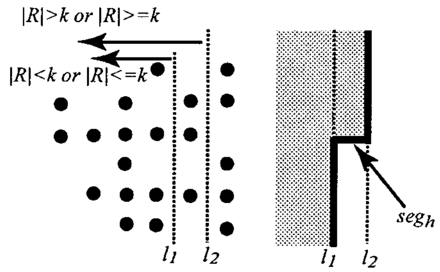

図 11　互いの距離が 1 である垂直線 l_1 と l_2. 灰色の領域にはちょうど k 個の赤点が存在する.

定理 3 の証明：補題 5 から，一本の準水平線または準垂直線から構成される準直交分割 $Sdiv_1$ が存在して，その注目領域 $Reg1(Sdiv_1)$ にはちょうど n 個の赤点があるようにできる．このとき $Reg2(Sdiv_1)$ はもう一つの準直交分割 $Sdiv_2$ を構成しており，$Reg1(Sdiv_2) = Reg2(Sdiv_1)$ にはちょうど n 個の赤点が存在する．以下の 2 つのうち一つが成り立つのは明らかである：

(1) $|B \cap Reg1(Sdiv_1)| \leqq m$ かつ $|B \cap Reg1(Sdiv_2)| \geqq m$,

(2) $|B \cap Reg1(Sdiv_1)| \geqq m$ かつ $|B \cap Reg1(Sdiv_2)| \leqq m$.

したがって補題 6 を適用できる． □

文　献

[1] Kano, M., Uno, Miyuki: General balanced subdivision of two sets of points in the plane. Discrete Comput. Geom. LNCS **4381** (2007) 79-87.
[2] Bárány, I., Matoušek, J.: Simultaneous partitions of measures by k-fans. Discrete Comput. Geom. **25** (2001)317–334.
[3] Bespamyatnikh, S., Kirkpatrick, D., Snoeyink, J.: Generalizing ham sandwich cuts to equitable subdivisions. Discrete Comput. Geom. **24** (2000) 605–622.
[4] Ito, H., Uehara, H., Yokoyama, M.: 2-dimensional ham-sandwich theorem for partitioning into three convex pieces. Discrete Comput. Geom. LNCS **1763** (2000) 129-157.
[5] *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, edited by J. Goodman and J. O'Rourke, CRC Press, (2004) Chapter 14 Topological Methods written by Rade T. Živaljević , 305–329.
[6] Kaneko, A., Kano, M.: Balanced partitions of two sets of points in the plane. Computational Geometry: Theory and Applications, **13** (1999), 253–261.
[7] Kaneko, A., Kano, M.: Semi-balanced partitions of two sets of points in the plane and embeddings of rooted forests. Internat. J. Comput. Geom. Appl. in print.
[8] Kaneko, A., Kano, M.: Discrete Geometry on Red and Blue Points in the Plane – A Survey –. Discrete and Computational Geometry, Algorithms Combin., **25**, Springer (2003) 551-570.
[9] Kaneko, A., Kano, M., Suzuki, H.: Path Coverings of Two Sets of Points in the Plane. Towards a theory of geometric graphs, ed by J. Pach Contemporary Mathematics series of AMS, **342** (2004) 99-111.
[10] Sakai, T.: Balanced Convex Partitions of Measures in R^2. Graphs and Combinatorics, **18** (2002), 169–192.