2008－AL－116 (2)
2008／1／23

Triangle-free graph の独立集合問題に対する貪欲アルゴリズムの解析

小浦 一平　小野 孝男　平田 富夫

名古屋大学大学院 情報科学研究科

概要 独立集合問題の入力として頂点数 n と平均次数 $\bar{d}$ のグラフが与えられたとき，少なくとも $n/(\bar{d}+1)$ のサイズの近似解を得る貪欲アルゴリズムがある．この値は Turán bound として知られている．この貪欲アルゴリズムを線形計画法と組み合わせると $(\bar{d}+1)/2$ の近似率が得られる．本論文では，入力を triangle-free graph に限定した独立集合問題において，貪欲アルゴリズムによってサイズが少なくとも $2n/(\bar{d}+4)$ の近似解が得られることを示す．更に，貪欲アルゴリズムと線形計画法を組み合わせると $(\bar{d}+4)/4$ の近似率が得られることを示す．

An Analysis of the Greedy Algorithm for Finding an Independent Set in a Triangle-free Graph

Ippei Koura, Takao Ono, Tomio Hirata

Graduate School of Information Science, Nagoya University

Abstract This paper treats the independent set problem. The greedy algorithm is well-known method for finding independent sets. The algorithm obtains an independent set of size at least $n/(\bar{d}+1)$, where n is the number of vertices and $\bar{d}$ is average degree. This value is known as "Turán bound". Based on this result, Hochbaum showed that the greedy algoritm combined with LP attains performance ratio $(\bar{d}+1)/2$. In this paper, restricting the input to triangle-free graphs, we show that the greedy algorithm obtains an independent set of size at least $2n/(\bar{d}+4)$. We also prove that LP-based algorithm has the performance ratio $(\bar{d}+4)/4$.

1　はじめに

グラフ $G=(V,E)$ の独立集合とは頂点の集合 $V'(\subset V)$ で，V' の任意の 2 頂点が隣接しないようなもののことである．与えられたグラフにおいて頂点数が最大の独立集合を見つける問題を独立集合問題と呼ぶ．この問題は入力を triangle-free graph に限定しても NP 困難のままである [5]．さらに平面グラフに限定すると，3 色で頂点彩色できる [1] が，独立集合問題はやはり NP-困難である [7].

独立集合問題に対する近似アルゴリズムに貪欲アルゴリズムがある．この貪欲アルゴリズムは，頂点数 n，平均次数 $\bar{d}$ の一般的なグラフに対して，得られる近似解のサイズが少なくとも $n/(\bar{d}+1)$ であることを保証する．これは Turán bound として知られている．Hochbaum[3] は，貪欲アルゴリズムと線形計画法を組み合わせたアルゴリズムが $(\bar{d}+1)/2$ の近似率を達成することを示した．Halldórsson と Radhakrishnan[2] は貪欲アルゴリズムが近似率 $(\bar{d}+2)/2$ を達成することを示した．また，Turán bound を厳密に評価することで，貪欲アルゴリズムと線形計画法を組み合わせたアルゴリズムの近似率を $(2\bar{d}+3)/5$ まで改良できることを証明した．

本論文では，貪欲アルゴリズムの入力を triangle-free graph としたとき，少なくとも $2n/(\bar{d}+4)$ のサイズの近似解を保証することを示す．またこの解析を基に，線形計画法を組み合わせたアルゴリズムが $(\bar{d}+4)/4$ の近似率を達成することを示す．なお，triangle-free graph には少なくとも $n(\bar{d}\log\bar{d}-\bar{d}+1)/(\bar{d}-1)^2$ のサイズの独立集合が存在することが知られている [6].

2　貪欲アルゴリズムの解析

以下では標準的なグラフ理論の表記を使用する．グラフは無向グラフ $G=(V,E)$ とする．n を頂点数，$\bar{d}$ を平均次数，$N(v)$ を頂点 v の隣接頂点の集合，$\alpha(G)$ をグラフ G の最大独立集合（最適解）のサイズとする．アルゴリズム A の近似率 ρ_A とは，入力グラフ G における最適解のサイズ（頂点数）$\alpha(G)$ をアルゴリズム A の近似解のサイズ $A(G)$ で割った値の，G を変えたときの最大値である．これは 1 に近いほど良い．

$$\rho_A=\sup_G\frac{\alpha(G)}{A(G)}$$

なお，非連結なグラフについては各連結成分ごとに考えればよいので，以下では入力グラフが連結であると仮定する．

2.1　貪欲アルゴリズム

独立集合問題に対する貪欲アルゴリズムとして，Erdős による次のアルゴリズム GreedyAlgorithm が知られている [3].

GreedyAlgorithm[Erdős][3]

Step 0: 集合 I を空とする．

Step 1: グラフ G が空なら終了する．そうでなければ，現在のグラフにおける最小次数の頂点を 1 つ選択し，それを v とする．

Step 2: 頂点 v を集合 I に加え, 頂点 v とその隣接頂点を G から取り除く．**Step 1** に戻る．

2.2　一般のグラフに対する近似性能

定理 2.1([3]) GreedyAlgorithm は次の不等式を満たすような独立集合 I を見つける．

$$|I|\geq\frac{n}{\bar{d}+1}$$

証明: Step 1 で次数 d_i の頂点 v_i が選択されるときはいつでも，グラフから d_i+1 個の頂点と，それに接続する辺が少なくとも $d_i(d_i+1)/2$ 本の辺が取り除かれる．Step 1 を繰り返す回数を t とすると，各繰り返しで取り除かれた頂点に重複はなく，その合計は全体の頂点数となるので,

$$n=\sum_{i=1}^{t}(d_i+1) \tag{1}$$

が成り立つ．次に，コーシー・シュワルツの不等式より次も成り立つ．

$$\left(\sum_{i=1}^{t}\{1\times(d_i+1)\}\right)^2\leq\sum_{i=1}^{t}1^2\sum_{i=1}^{t}(d_i+1)^2.$$

この式を整理し，左辺に (1) 式を代入すると

$$
\begin{aligned}
n^2 &\leq t\sum_{i=1}^{t}(d_i+1)^2 \\
\frac{n^2}{t} &\leq \sum_{i=1}^{t}(d_i+1)^2 \qquad (2)
\end{aligned}
$$

が得られる．最後に，グラフにおける平均次数と頂点数に関して次の式が成り立つ．

$$2|E| = \bar{d}n \geq \sum_{i=1}^{t} d_i(d_i+1).$$

この式に (1) 式を加えると

$$
\begin{aligned}
\bar{d}n + n &\geq \sum_{i=1}^{t} d_i(d_i+1) + \sum_{i=1}^{t}(d_i+1) \\
&= \sum_{i=1}^{t}(d_i+1)^2.
\end{aligned}
$$

となる．得られた式の右辺に (2) 式を適用すると

$$(\bar{d}+1)n \geq \frac{n^2}{t}$$

が得られる． □

このことから GreedyAlgorithm の近似性能 $\bar{d}+1$ が得られる．

2.3 triangle-free graph に対する近似性能

本論文では，GreedyAlgorithm の入力を triangle-free graph に限定する．得られる独立集合の大きさについて次の定理が成り立つ．

定理 2.2 入力のグラフを triangle-free に制限すると，GreedyAlgorithm は次の不等式を満たすような独立集合 I を見つける．

$$|I| \geq \frac{2n}{\bar{d}+4}$$

証明: 入力グラフは長さ 3 の閉路がないので，Step 1 で選択された頂点 v_i の隣接頂点 $N(v_i)$ は独立集合である．グラフから頂点 v_i とその隣接頂点 $N(v_i)$ が取り除かれるときは，それに付随して取り除かれる辺が少なくとも d_i^2 本ある．Step 1 を繰り返す回数を t とすると，グラフにおける次数に関して次の式が成り立つ．

$$\bar{d}n \geq \sum_{i=1}^{t} 2d_i^2.$$

次のように式を変形する．

$$
\begin{aligned}
\bar{d}n &\geq 2\sum_{i=1}^{t}\{(d_i+1)-1\}^2 \\
&= 2\sum_{i=1}^{t}\{(d_i+1)^2 - 2(d_i+1) + 1\} \\
&= 2\{\sum_{i=1}^{t}(d_i+1)^2 - 2\sum_{i=1}^{t}(d_i+1) + \sum_{i=1}^{t} 1\}.
\end{aligned}
$$

定理 2.1 と同様に，この式に (1) 式を代入し，(2) 式を適用する．

$$\bar{d}n \geq 2\left(\frac{n^2}{t} - 2n + t\right).$$

$t \geq 0$ より，

$$\begin{aligned} \bar{d}n &\geq 2\left(\frac{n^2}{t} - 2n\right) \\ \bar{d}n + 4n &\geq \frac{2n^2}{t}. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} t &\geq \frac{2n^2}{\bar{d}n + 4n} \\ &= \frac{2n}{\bar{d} + 4} \end{aligned}$$

となることがわかる． □

独立集合問題の最適解は n を超えないことと定理 2.2 より，GreedyAlgorithm の近似性能 $(\bar{d}+4)/2$ が得られる．次節ではこの貪欲アルゴリズムと線形計画法を組み合わせたアルゴリズムを考える．

3　線形計画法を組み合わせた貪欲アルゴリズムの解析

3.1　独立集合問題の線形計画緩和

グラフ G の頂点集合を $V = \{1, 2, \cdots, n\}$ とする．独立集合問題は 0-1 整数計画問題 (IP) として次のように定式化できる．

$$\begin{array}{lll} \text{maximize} & \sum_{i \in V} x_i & \\ \text{subject to} & x_i + x_j \leq 1 & \text{for all } (i,j) \in E \\ & x_i \in \{0,1\} & \text{for all } i \in V \end{array}$$

この問題で整数制約を緩和すると次の線形緩和問題 (LP) が得られる．

$$\begin{array}{lll} \text{maximize} & \sum_{i \in V} x_i & \\ \text{subject to} & x_i + x_j \leq 1 & \text{for all } (i,j) \in E \\ & x_i \geq 0 & \text{for all } i \in V \end{array}$$

この LP 問題は半整数の最適解をもつ．つまり，各 x_i の値が 0, 1/2, 1 のいずれかになるものが必ず存在する [4]．グラフ G の頂点集合 V を LP の最適解における x_i の値によって次のように 3 つの集合に分割する．

$$\begin{array}{llcl} i \in O & \text{if } x_i & = & 1, \\ i \in H & \text{if } x_i & = & \frac{1}{2}, \\ i \in Z & \text{if } x_i & = & 0. \end{array}$$

集合 O はグラフ G における少なくとも 1 つの最大独立集合 I に包含されており，反対に集合 Z はその I に包含されないという性質がある [4]．また得られた解は $|O| \geq |Z|$ である [3]．なぜなら $|O| < |Z|$ を仮定し，LP の最適解の値を X とすると，頂点 V の全体を H としたとき，つまり，すべての頂点 $i \in V$ に対して $x_i = 1/2$ とおくとき，目的関数値が X を超えてしまう．これは X の最適性に矛盾する．

3.2 線形計画法と組み合わせた貪欲アルゴリズム

まず与えられたグラフについて線形緩和したLPを解き，V を3個の頂点集合 O, H, Z に分割する．次に集合 H による G の誘導部分グラフに貪欲アルゴリズムを適用し，独立集合 I_H を得る．最後に独立集合 $O \cup I_H$ を出力する．このアルゴリズムの近似率に対し，次の定理が示されている [3].

定理 3.1[3] GreedyAlgorithm は線形計画法と組み合わせることで $(\bar{d}+1)/2$ の近似率を達成する.

3.3 triangle-free graph に対する近似性能

定理 3.2 入力を triangle-free とするとき，GreedyAlgorithm は線形計画法と組み合わせることで $(\bar{d}+4)/4$ の近似率を達成する.

証明: H による G の誘導部分グラフとグラフ G の平均次数をそれぞれ $\bar{d}_H, \bar{d}_G$ とする．近似解のサイズは定理2.2より，少なくとも $|O|+2|H|/(\bar{d}_H+4)$ となる．最適解のサイズはLP緩和した問題の最適解を超えないので，高々$|O|+\frac{1}{2}|H|$ である．よって任意の近似解 APR に対して次が成り立つ.

$$\frac{\alpha(G)}{|\mathrm{APR}|} \le \frac{|O|+\frac{1}{2}|H|}{|O|+2|H|/(\bar{d}_H+4)}. \tag{3}$$

また，与えられたグラフが連結なので

$$\frac{|O|+|Z|+\bar{d}_H|H|}{|O|+|Z|+|H|} \le \bar{d}_G$$

である [3]．したがって

$$\frac{1}{4}\left(\frac{|O|+|Z|+\bar{d}_H|H|}{|O|+|Z|+|H|}+4\right) \le \frac{\bar{d}_G+4}{4} \tag{4}$$

である．最後に

$$\frac{|O|+\frac{1}{2}|H|}{|O|+2|H|/(\bar{d}_H+4)} \le \frac{1}{4}\left(\frac{|O|+|Z|+\bar{d}_H|H|}{|O|+|Z|+|H|}+4\right) \tag{5}$$

を示す．この不等式を整理すると，次の不等式が得られる.

$$0 \le \frac{2\bar{d}_H|H|(|O|-|Z|)+\bar{d}_H^2|O||H|+(\bar{d}_H|O|+4|O|+2|H|)(|O|+|Z|)}{4\left(|O|+|H|+|Z|\right)\left(\bar{d}_H|O|+4|O|+2|H|\right)}$$

ここで $|O| \ge |Z|$ であるので，不等式 (5) は成立する．(3)(4)(5) より，

$$\frac{\alpha(G)}{|\mathrm{APR}|} \le \frac{\bar{d}_G+4}{4}$$

である．つまり，入力を triangle-free graph に限定したときの GreedyAlgorithm の近似率は $\dfrac{\bar{d}+4}{4}$ である.
□

4 おわりに

本論文では，入力を triangle-free graph に限定した独立集合問題に対する貪欲アルゴリズムの近似性能を評価した．まず，入力を triangle-free graph とすると，GreedyAlgorithm が少なくとも $2n/(\bar{d}+4)$ のサイズの近似解を出力することを示した．また，この結果を基に，線形計画法と組み合わせることで $(\bar{d}+4)/4$ の近似率が得られることを示した.

謝辞

本研究の遂行にあたり，有用な示唆をいただきました名古屋大学情報科学研究科計算機科学専攻の柳浦睦憲准教授に深くお礼申し上げます．

参考文献

[1] H. Grötzsch. Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel. *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math.-Nat. Reihe*, 8:109–120, 1959.

[2] M.M. Halldórsson and J. Radhakrishnan. Greed is good: Approximating independent sets in sparse and bounded-degree graphs. *Algorithmica*, 18:145–163, 1997.

[3] D.S. Hochbaum. Approximating covering and packing problems: set cover, vertex cover, independent set, and related problems. D.S. Hochbaum, editor. Approximation algorithms for NP–hard problems. 94–143, PWS Publishing Company, 1997.

[4] G.L. Nemhauser and L. Trotter. Vertex packings: Structural properties and algorithms. Math.Programming, 8:232–248, 1975.

[5] S. Poljak. A note on stable sets and colorings of graphs, Commun. Math. Univ. Carolinae 15, 307–309, 1974.

[6] J.B. Shearer. A note on the independence number of triangle-free graphs, Discrete Math, 46:83–87, 1983.

[7] R. Uehara. NP-complete problems on a 3-connected cubic planar graph and their applications. *Technical Report TWCU-M-0004*, Tokyo Woman's Christian University, 1996. `http://www.jaist.ac.jp/~uehara/ps/triangle.ps.gz`

[8] V.V. Vazirani. Approximation algorithms. Springer-Varlag, 2001.