社団法人 情報処理学会 研究報告
IPSJ SIG Technical Report

2008－AL－117 (10)
2008／3／7

平面グラフの刻み幅決定アルゴリズムの小交差数グラフへの拡張に向けて

玉木久夫　　吉武由実

明治大学理工学部情報科学科
〒214-8571 神奈川県川崎市多摩区東三田 1-1-1
tamaki@cs.meiji.ac.jp, yyoshi@cs.meiji.ac.jp

あらまし 平面グラフの刻み幅を決定する Seymour と Thomas の「ねずみ捕りアルゴリズム」の正当性証明のひとつの鍵となる補題の新しい証明を与える．この証明は，ねずみ捕りアルゴリズムを平面グラフよりも広いクラスに拡張するための基礎となると期待される．

Towards an extension of the planar graph carving-width algorithm to graphs with few-crossings.

Hisao Tamaki , Yumi Yoshitake

Department of Computer Science,Meiji University
1-1-1 Higashi-mita, Tama-ku, Kawasaki-shi, Kanagawa 214-8571

Abstract We give a new proof of a key lemma in the correctness proof of the "rat-catching algorithm" of Seymour and Thomas which decides the carving-width of planar graphs. This proof is expected to form a basis for extending the rat-catching algorithm to a broader class of graphs.

1 はじめに

本稿では，グラフは自己ループを持たない無向多重グラフを意味する．すなわち，グラフは頂点を自分自身と結ぶ辺は持たないが，同一頂点対の間に複数の辺を持つことはあり得るものとする．グラフ G の頂点集合を $V(G)$，辺集合を $E(G)$ で表す．各 $X \subseteq V(G)$ に対して $\delta_G(X)$ によって X の頂点と $V(G) \setminus X$ の頂点を結ぶ G の辺すべてからなる集合を現す．グラフ G が文脈から明らかであるときは，添え字 G を省略する．

グラフ G の刻み分割 [4] とは，各頂点の次数が１または３の木であり，次数が１の頂点（葉）の集合が $V(G)$ であるようなもののことを言う．T を G の刻み分割とするとき，T の各辺は $V(G)$ の２分割と自然に対応する．T の辺 a に対応する２分割が $(X, V(G) \setminus X)$ であるとき，a の幅を $|\delta_G(X)|$ と定義し，T の幅を T のすべての辺の幅の最大値と定義する．グラフ G の刻み幅を，G のすべての刻み分割の幅の最小値と定義する．

グラフの刻み幅は木幅や分枝幅 [4] と並んで，グラフ上の組み合わせ問題の解きやすさを反映する重要なグラフパラメータである．一般のグラフ G と正整数 k に対してその刻み幅が k 以上であるかどうかを決定する問題は，k が定数であれば線形時間で解くことができるが [2]，k が入力として与えられた場合はＮＰ完全である [6]．G が平面グラフ

の場合には，この問題はSeymourとThomas[6]のアルゴリズムによりnをGの頂点数として$O(n^2)$時間で解くことができる．平面グラフに対しては，その分枝幅の決定が刻み幅の決定に線形時間で帰着できるので，この結果の意義はさらに大きい．このアルゴリズムは技術的にも，刻み幅の決定をねずみ捕りゲームと呼ばれる２人ゲームの勝敗判定に帰着する非常に興味深いものである．彼らのアルゴリズムは，しばしばねずみ捕りアルゴリズムと呼ばれる．

刻み幅が多項式時間で決定できるような，平面グラフより広いグラフクラスを求めることは重要な研究課題であるが，現在までそのようなクラスは見つかっていない．

筆者らは，ねずみ捕りゲームによる刻み幅の特徴づけを平面グラフよりも広いクラスのグラフに拡張することを目指して研究を行って来た．そのような研究を遂行するためには，まず平面グラフの場合のねずみ捕りアルゴリズムの正当性の証明を理解する必要がある．原論文[6]の証明では，グラフマイナー理論[4, 5]の組み合わせ的な結果と位相的な結果を用いている．このうち組み合わせ的な結果はグラフクラスを拡張した場合でもそのまま用いることができるが，位相的な結果に関する部分は拡張の際に大幅な変更が必要となる．この位相的な結果自体はより一般的な枠組みのなかで定式化され証明されているが，我々の目的のためにはその枠組みのすべてを理解する必要は必ずしも無い．また原論文では，その結果（文献[6]の定理４．５）が文献[4]の定理８．７　および定理８．９から導かれると述べているが，その導出過程は記述していない．この状況を考えると，ねずみ捕りアルゴリズムの正当性証明のなかの位相的な部分のより自己完結的で理解が容易な証明を構築することには大きな意義があると考えられる．本稿では，そのような証明を与える．筆者らの理解では，この証明は単に原論文の証明を翻訳，単純化したものではなく，原論文にない新しい考え方を含んでいる．

筆者らは，現在この証明に基づいてねずみ捕りアルゴリズムを，交差数が定数個でさらに交差の仕方に一定の制限を付した描画を持つグラフクラスに拡張する作業を行っている．その結果については稿を改めて報告したい．

2　諸定義

グラフGの頂点集合を$V(G)$，辺集合を$E(G)$と表すとする．$X \subseteq V(G)$によって誘導されるGの部分グラフを$G[X]$で表す．$G[X]$が連結であるとき，XはGにおいて連結であると言う．平面描画グラフGの平面双対グラフをG^*と表記する．Gの頂点vと対応するG^*の面はv^*で表す．同様に，Gの辺eに対応するG^*の辺はe^*，Gの面rに対応するG^*の頂点はr^*で表す．$E(G)$の部分集合Eと対応する$E(G^*)$の部分集合をE^*と表す．G^*の頂点をGの頂点と区別するために双対頂点と呼ぶことがある．

G上の歩道とは，$v_0, e_1, v_1, ...e_t, v_t$という頂点と辺の連なりで$t \geq 0$，$v_0, ..., v_t \in V(G)$，$e_1, ..., e_t \in E(G)$であり，$0 < i \leq t$において$e_i$は$v_{i-1}, v_i$と接しているとする．辺の個数$t$をこの歩道の長さと呼ぶ．また$v_0$をこの歩道の始点，$v_t$を終点と呼ぶ．歩道$w$の逆転した歩道を$w^{-1}$によって表す．はつまり，$w$が$v_0, e_1, v_1...e_t, v_t$であるとすると，$w^{-1} = v_t, e_t, ..., e_1, v_0$である．$v_i \neq v_j, i \neq j$を満たすとき，経路と呼ぶ．$v_0 = v_t$のとき，この歩道を閉歩道と呼ぶ．ふたつの閉歩道は，巡回列として等しいとき閉歩道として等しいと言う．一方，歩道として等しいというときには，さらに始点も一致していること（すなわち列として等しいこと）を意味する．G^*上の歩道を双対歩道と呼ぶことがある．

以下では平面描画グラフGを固定して考える．Gの刻み幅は，その２辺連結成分の刻み幅の最大値に等しいので，以下ではGは２辺連結であると仮定する．

Xを$V(G)$の任意の部分集合，wをG^*の閉歩道とするとき，wの辺集合が$\delta(X)^*$を包含するならばwはXを捕捉するという．また，このときwをXの捕捉歩道と呼ぶ．

$\mathcal{U}$をGの頂点集合の任意の族，kを任意の正整数，fをGの任意の辺または面とするとき，f^*を通る長さk未満の閉歩道によって捕捉されるような

$\mathcal{U}$ の要素からなる集合を $\mathbf{capt}_{f,k}\mathcal{U}$ によって表す.

3 ねずみ捕りゲームの概略と必要な定理の記述

ねずみ捕りアルゴリズムの基礎となるねずみ捕りゲームの正確な定義は，本稿の目的のためには必要ではない．興味のある読者は [6] あるいは [3, 1] を参照されたい．ここでは，ゲームの概略を述べ，刻み幅との等価性の証明がどのような構造を持つかについて説明する．

G を平面描画されたグラフ，k を正整数とするとき，ねずみ捕りゲーム $\mathbf{RC}(G,k)$ はねずみ捕りとねずみのふたりの競技者によって G 上で争われる．ねずみは G の頂点から頂点へ G の辺を通じて移動する．ねずみ捕りは面からから面へ辺を横切って移動し，自身の置かれた面または辺を通る長さ k 未満の閉じた双対歩道のすべてを通して騒音を送り，ねずみの移動を妨害する．ねずみは，騒音の通じた辺を通ることはできない．ねずみ捕りの目的はねずみをひとつの頂点に捕捉することであり，ねずみの目的は永遠に逃げ続けることである．ゲームの詳細な実行手順は省略する．

次の定理が成り立つ [6].

定理 1 Gの刻み幅がk以上であることと，$\mathbf{RC}(G,k)$ においてねずみ必勝であることは同値である．

$\mathbf{RC}(G,k)$ における勝敗の判定は容易に $O(n^2)$ で実行できるために，この定理が刻み幅についての $O(n^2)$ の判定アルゴリズムを与える．

定理 1 の証明のひとつの向き，すなわち「G が幅 k 未満の刻み分割を持てば，$\mathbf{RC}(G,k)$ はねずみ捕り必勝である」の理解は比較的容易である．ねずみ捕りは与えられた刻み分割を利用してねずみの行動範囲を体系的に狭めていくことにより最終的にねずみをひとつの頂点に釘づけにすることができる．これに対して，逆の向き「G の刻み幅が k 以上ならば $\mathbf{RC}(G,k)$ はねずみ必勝である」の理解はグラフマイナー理論の深い結果を二つ必要とする．ひとつは，一般のグラフに対して，刻み分割の障害物（obstructoin）であるティルト（下で定義する）の存在が刻み分割の不在の必要十分条件であることを示す組み合わせ的な結果であり，もうひとつは，平面グラフの場合にティルトの存在からねずみが逃げ切るための「安全地帯」を導き出すための位相的な結果である．前者は一般のグラフに対する結果であるために，平面グラフより広いクラスに理論を拡張する際にもブラックボックスとして使用することができる．これに対して，後者は拡張したクラスに対応するように証明を変更する必要があるので，その証明に対する深い理解を必要とする．

グラフ G に対する位数 k のティルトとは，$V(G)$ の部分集合からなる族 $\mathcal{T}$ で次の条件をすべて満たすものを言う．

1. $X \subseteq V(G)$ が $|\delta(X)| < k$ を満たすならば，X と $V(G) \setminus X$ のちょうど一方が $\mathcal{T}$ に属す．
2. どの $X, Y, Z \in \mathcal{T}$ に対しても $X \cup Y \cup Z \neq V(G)$ である．
3. どの $v \in V(G)$ に対しても $\{v\} \in \mathcal{T}$ である．

定理 2 ([4]) G を任意のグラフ，k の任意の正整数とするとき，G が位数 k のティルトを持つことは G の刻み幅が k 以上であることの必要十分条件である．

本稿では、上で必要性を述べた位相的な結果を次のふたつの定理として定式化する．

定理 3 $\mathcal{T}$ を G の位数 $k > 0$ のティルト，r を G の任意の面とするとき，$\bigcup \mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T} \neq V(G)$ である．

この定理は，ねずみ捕りが面 r にいるときにねずみが身をおくべき「安全地帯」$V(G) \setminus \bigcup \mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}$ を与える．ねずみ捕りが面 r_1 から隣接面 r_2 に移動するために r_1 と r_2 を隔てる辺 e 上にいる間に，ねずみが r_1 に対応する安全地帯 $V(G) \setminus \bigcup \mathbf{capt}_{r_1,k}\mathcal{T}$ から r_2 に対応する安全地帯 $V(G) \setminus \bigcup \mathbf{capt}_{r_2,k}\mathcal{T}$ に移動できることを保証するのが次の定理である．$\mathbf{capt}_{e,k}\mathcal{T} \subseteq \mathbf{capt}_{r_i,k}\mathcal{T}$，$i = 1, 2$，であるから，$V(G) \setminus \bigcup \mathbf{capt}_{e,k}\mathcal{T}$ は $V(G) \setminus \bigcup \mathbf{capt}_{r_1,k}\mathcal{T}$ と $V(G) \setminus \bigcup \mathbf{capt}_{r_2,k}\mathcal{T}$ の両方を包含することに注意する．

定理 4 $\mathcal{T}$ を G の位数 $k > 0$ のティルト，e を G の任意の辺とするとき，$V(G) \setminus \bigcup \mathbf{capt}_{e,k}\mathcal{T}$ は G において連結である．

4　定理の証明

まず，定理4の証明から始める．

$Z = V(G) \setminus \bigcup \mathbf{capt}_{e,k}\mathcal{T}$ が G において非連結であると仮定し，その任意のふたつの連結成分を Z_1，Z_2 とおく．e と接する G のふたつの面を r_1，r_2 とし，以下では，r_1^* を始点，r_2^* を終点とする長さ $k-1$ 未満の G^* の歩道で，それと e^* をあわせてできる閉歩道が Z_1 と Z_2 を分離するようなものが存在することを示す．このことから Z_1 または Z_2 を包含する $\mathbf{capt}_{e,k}\mathcal{T}$ の要素が存在することが結論されるので，矛盾が生じ，したがって Z は連結でなければならない．

$f \neq e$ を G の辺とするとき，r_1^* を始点，r_2^* を終点とする G^* の歩道で長さが $k-1$ 未満のものが存在するとき，f（およびその双対 f^*）は騒音下にあると言い，また，そのような歩道を f への送音歩道であると言う．Z_1 と Z_2 が $Z = V(G) \setminus \bigcup \mathbf{capt}_{e,k}\mathcal{T}$ の相異なる連結成分であるという仮定より，Z_1 と Z_2 を結ぶ G の経路はどれも騒音下にある辺を含まねばならない．従って，r_1^* を始点，r_2 を終点とする騒音下の辺のみからなる G^* の経路 p で，p に e^* を加えてできる閉路が Z_1 と Z_2 を分離するようなものが存在する．

s^* を p 上の任意の双対頂点とし，r_1^* から s^* にいたる p の部分路を p_1，s^* から r_2^* にいたる p の部分路を p_2 とおく．歩道 w が r_1^* または r_2^* を始点，s^* を終点とし，かつ Z_1 と Z_2 のいずれの内部も通らないようなものであるとき，次のいずれかが成り立つ．

1. w と p_2 を連結して必要ならば e^* を加えてできる閉歩道は Z_1 と Z_2 を分離する．
2. w と p_1^{-1} を連結して必要ならば e^* を加えてできる閉歩道は Z_1 と Z_2 を分離する．

条件1が成り立つとき，w はタイプ1の歩道，条件2が成り立つときタイプ2の歩道であると言うことにする．

f^* を p に属す任意の辺，u を f への任意の送音歩道とする．f^* の端点を s_1^*，s_2^* とし，s_1^*，s_2^* は u 上でこの順に現れるものとする．r_1^* を始点とし s_2^* を終点とする u の部分歩道を $\mathbf{first}_f(u)$，s_1^* を始点とし r_2^* を終点とする u の部分歩道を $\mathbf{second}_f(u)$ とおく．$\mathbf{first}_f(u)$ と $\mathbf{second}_f(u)$ のタイプが異なるならば，u は e^* とともに Z_1 と Z_2 を分離する，我々の求めていた歩道である．したがって，$\mathbf{first}_f(u)$ と $\mathbf{second}_f(u)$ ともにタイプ1であるかともにタイプ2である．前者の場合に u はタイプ1の送音歩道であると言い，後者の場合に u はタイプ2の送音歩道であると言う．

さて，p の最初の辺 f_0^* が，それを通るタイプ2の送音歩道 u を持つならば，$\mathbf{second}_{f_0}(u)$ がそのまま，e とともに Z_1 と Z_2 を分離する長さ $k-1$ 未満の歩道であり矛盾を生じる．p の最後の辺がそれを通るタイプ1の送音歩道を持つ場合も同様である．したがって，p 上でこの順に隣接する二つの辺 f_1^* と f_2^* で f_1^* はタイプ1の送音歩道 w_1 を持ち，f_2^* はタイプ2の送音歩道 w_2 を持つようなものが存在する．f_1^* と f_2^* の共有する双対頂点を s^* とし，w_1 の部分歩道で，r_1^* を始点 s^* を終点とするものを u_1，s^* を始点 $r_2^*{*}$ を終点とするものを t_1 とよび，w_2 の部分歩道 u_2，t_2 を同様に定義する．u_1 と t_2 をこの順につなげてできる歩道を w_1'，u_2 と t_1 をこの順につなげてできる閉歩道を w_2' とおくと，w_1' と w_2' はどちらも e^* とともに Z_1 と Z_2 を分離し，その少なくとも一方の長さは $k-1$ 未満である．従って望む通りの矛盾が生じた．以上で定理4の証明を終える．

定理3は一連の補題を用いて証明される．以下では正整数 k，位数 k のティルト $\mathcal{T}$，G の面 r を固定して考える．

定義 1 G の正の長さを持った双対閉歩道 c の描画とは，G の頂点を避ける平面上の有向閉曲線 C で c によって指定された順に G の辺と面を横切るものを言う．自己交差のない描画をもつような双対閉歩道を無交差であると言う．無交差双対閉歩道 c が r^* を $m>0$ 回通るとき，c を r^* への訪問によって分割してできる m 個の部分双対閉歩道のそれぞれを c の断片と呼ぶ．

c を G の無交差双対閉歩道, C を自己交差のない c の描画とする．Jordan の閉曲線定理により，C は平面をふたつの領域に分割する．そのうち，C の進行方向の右側の領域内にある G の頂点の集合を $\mathbf{inside}(C)$ で、もうひとつの領域内にある G の

頂点の集合を $\mathbf{outside}(C)$ で表す．$\mathbf{inside}(C)$ と $\mathbf{outside}(C)$ は c によって決まりその描画 C には依存しないのでそれぞれ $\mathbf{inside}(c)$, $\mathbf{outside}(c)$ と表す．

定義 2 双対歩道 w の折り返しとは、ある双対辺 $e^* = \{p^*, q^*\}$ に対して p^*, e^*, q^*, e^*, p^* の形をした w の部分歩道のことを言う．双対閉歩道 c から,「折り返しを持つ限りそれを取り除く」という作業を繰り返して得られる閉歩道を c の核よび, $\mathbf{core}(c)$ で表す．

補題 1 c を G の無交差双対閉歩道とするとき、$\mathbf{core}(c)$ が正の長さを持つならば $\mathbf{inside}(c)$ と $\mathbf{outside}(c)$ はともに空でない．

証明: $\mathbf{inside}(c) = \mathbf{inside}(\mathbf{core}(c))$ であるから、c が折り返しを持たない、正の長さを持った無交差双対閉歩道であると仮定して、$\mathbf{inside}(c)$ と $\mathbf{outside}(c)$ のどちらも空でないことを示せばよい．$\mathbf{inside}(c)$ が空であるとして矛盾を導く．$\mathbf{outside}(c)$ が空である場合も同様である．C を自己交差を持たないような c の描画のひとつとすると、$\mathbf{inside}(c) = \emptyset$ であるならば, C をどの G の頂点も横切らずに連続的に変形して一点に縮約することができる．そのような任意の縮約過程を選び、c の通る双対頂点で，最初に C の変形が横切らなくなるものを p^* とおくと．しかし，c は折り返しを持たないので面 p は C が分ける二つの領域のどちらにも接している頂点があることからこれは不可能である．[]

定義 3 次の条件をすべて満たす G の無交差双対閉歩道 c を $\mathcal{T}$ に対する全捕捉歩道と呼ぶ．

1. c は $m > 0$ 個の断片 $w_1, \ldots, w_m$ を持つ．
2. どの断片 w_i の長さも k 未満である．
3. c は r^* 以外で折り返しを持たない．
4. 各 $1 \leq i \leq m$ に対して，$\mathbf{inside}(w_i) \in \mathcal{T}$
5. $\mathbf{inside}(c) = \bigcup \mathbf{capt}_{r,k} \mathcal{T}$ が成り立つ．

補題 2 $\mathcal{T}$ が全捕捉歩道を持つならば, $\bigcup \mathbf{capt}_{r,k} \mathcal{T} \neq V(G)$ である．

証明: c を $\mathcal{T}$ の全捕捉歩道のなかで断片数が最小のもののひとつとする．全捕捉歩道の定義より、$\mathbf{inside}(c) = \bigcup \mathbf{capt}_{r,k} \mathcal{T}$ であるので、$\mathbf{outside}(c) \neq \emptyset$ を示せばよい．c の断片数を m とし，その断片を c に現れる順に w_1, …, w_m とする．各 $1 \leq i \leq m$ に対して $\mathbf{inside}(w_i)$ は $\mathcal{T}$ に属すので $m \leq 3$ であるならばティルトの定義より $\mathbf{outside}(c) \neq \emptyset$ である．そこで、$m \geq 4$ と仮定する．

補題 1 より，$\mathbf{core}(c)$ が正の長さを持つことを示せばよい．次の定義では，w_m を w_0 とも，w_1 を w_{m+1} とも表記することにする．各 $1 \leq i \leq m$ に対して x_i を w_i の接頭辞でその逆転が w_{i-1} の接尾辞になっているようなもので極大なものする．同様に、y_i を w_i の接尾辞でその逆転が w_{i+1} の接頭辞になっているようなもので極大なもとする．z_i を x_i の終点を始点とし，y_i の始点を終点とするような w_i の部分歩道とする．もし，z_1, …, z_m がすべて正の長さを持つならば，$\mathbf{core}(c)$ はこれらの歩道をこの順につないで得られ，したがって正の長さを持つ．そこで，z_i のなかに長さが 0 であるものが存在すると仮定する．一般性を失うことなく，z_2 の長さが 0 であると仮定しよう．さらに一般性を失うことなく，y_2 の長さは x_2 の長さ以下であると仮定する．c から x_2^{-1} と x_2 を取り除いてできる閉歩道を c' とすると，c' の断片数は $m-1$ である．あたらしくできた断片 w は w_1 の x_2^{-1} の部分を y_2 で置き換えたものなので，その長さは k 未満である．したがって，$\mathbf{inside}(w)$ か $\mathbf{outside}(w)$ のどちらかは $\mathcal{T}$ に属す．後者の場合は、$\mathcal{T}$ の三つの要素 $\mathbf{inside}(w_1)$, $\mathbf{inside}(w_2)$, $\mathbf{outside}(w)$ の和集合が $V(G)$ であるのでティルトの定義に矛盾する．したがって $\mathbf{inside}(w) \in \mathcal{T}$ であり，c' は $\mathcal{T}$ の全捕捉歩道である．これは c の選び方に矛盾するので，すべての z_i の長さは正であることが結論される．[]

以下では $\mathcal{T}$ が実際に全捕捉歩道を持つことを示す．これを上の補題と組み合わせることにより，定理 3 の証明は完了する．

連結な頂点集合 $X \subseteq V(G)$ で G の無交差双対閉歩道 c を用いて $X = \mathbf{inside}(c)$ とあらわせるようなものを単連結であるという．単連結な X に対して $X = \mathbf{inside}(c)$ であるような無交差双対閉歩道 c を $\pi(X)$ で表す．$\pi(X)$ の表す歩道には始点の

選び方に依存するあいまい性があるが，そのどれもが閉歩道としては等しい．

$\mathcal{T}$ の要素で G において連結なものを集めてできる $\mathcal{T}$ の部分族を $\mathcal{T}^{\mathbf{conn}}$ とおき，単連結なもの集めてできる $\mathcal{T}$ の部分族を $\mathcal{T}^{\mathbf{sconn}}$ とおく．

補題 3 $\bigcup \mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}^{\mathbf{sconn}} = \bigcup \mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}$

証明: $\bigcup \mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}^{\mathbf{conn}} = \bigcup \mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}$ は自明であるから，$\bigcup \mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}^{\mathbf{sconn}} = \bigcup \mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}^{\mathbf{conn}}$ を示せばよい．X を $\mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}^{\mathbf{conn}}$ の任意の要素とし、$X \subseteq \bigcup \mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}^{\mathbf{sconn}}$ であることを示す．$\delta(X)^*$ が $m>0$ 個の無交差双対閉歩道 c_1，…，c_m からなるとする．各 c_i の向きは、$X \subseteq \mathbf{inside}(c_i)$ となるように取る．$m=1$ ならば X は単連結であるから何もすることはない．$m>1$ と仮定し，帰納法の仮定として $\delta(Y)^*$ が $m-1$ 個の無交差双対閉歩道からなる任意の $Y \in \mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}^{\mathbf{conn}}$ に対して $Y \subseteq \bigcup \mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}^{\mathbf{sconn}}$ であるとする．X は r^* を通る長さ k 未満の双対閉歩道によって捕捉されるので、各 i に対して $\mathbf{inside}(c_i)$ または $\mathbf{outside}(c_i)$ は $\mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}^{\mathbf{sconn}}$ に属す．もし，ある i に対して $\mathbf{inside}(c_i) \in \mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}^{\mathbf{sconn}}$ であるならば，$X \subseteq \mathbf{inside}(c_i)$ より，$X \subseteq \bigcup \mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}^{\mathbf{sconn}}$ が成り立つ．そこで，すべての i に対して $\mathbf{outside}(c_i) \in \mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}^{\mathbf{sconn}}$ であると仮定しよう．c_1，…，c_m のなかの $m-1$ 個の閉歩道でそのすべてと r^* を通る長さ k 未満の閉歩道が存在するようなものがあるが、一般性を失うことなく、それが c_1，…，c_{m-1} であると仮定する．ティルトの定義より、$\bigcup_{1\leq i\leq m-1}\mathbf{outside}(c_i)$ または $\bigcap_{1\leq i\leq m-1}\mathbf{inside}(c_i) = X \cup \mathbf{outside}(c_m)$ のどちらかが $\mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}$ に属す．前者の場合は、$\mathcal{T}$ の3要素 X，$\mathbf{outside}(c_m)$，および $\bigcup_{1\leq i\leq m-1}\mathbf{outside}(c_i)$ の和集合が $V(G)$ に等しいのでティルトの定義に矛盾する．しがって，$X \cup \mathbf{outside}(c_m) \in \mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}^{conn}$ と仮定してよい．帰納法の仮定より，$X \cup \mathbf{outside}(c_m) \subseteq \bigcup \mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}^{\mathbf{sconn}}$ であり，$X \subseteq \bigcup \mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}^{\mathbf{sconn}}$ が成り立つ．[]

定義 4 X を G において単連結な頂点集合とする．$\pi(X)$ 上の双対頂点 s^* を任意に選び，r^* から s^* に至る経路のひとつを t とするとき，t，$\pi(X)$，t^{-1} をこの順につないで得られる歩道を X の r-正則な捕捉歩道と呼ぶ．また，t をこの r-正則捕捉歩道の脚，s^* を入り口と呼ぶ．

補題 4 単連結な X が r を通り長さ k 未満の捕捉歩道を持つならば X は長さ k 未満の r-正則捕捉歩道を持つ．

補題 5 X_1 と X_2 をそれぞれ G において単連結な頂点集合，Y を $X_1 \cap X_2$ の G における連結成分のひとつ，W を $X_1 \setminus Y$ の G における連結成分のひとつとするとき，W は単連結で $\pi(W)$ は $\pi(X_1)$ の部分歩道ひとつと $\pi(X_2)^{-1}$ の部分歩道ひとつに分解される．

定義 5 $\mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}$ の部分集合 $\tilde{\mathcal{T}}$ で次の条件を満たすものを，$\mathcal{T}$ の非重複 (r,k)-捕捉族と呼ぶ．

1. $\bigcup \tilde{\mathcal{T}} = \bigcup \mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}$,
2. どの $X \in \tilde{\mathcal{T}}$ も G において単連結である，
3. $\tilde{\mathcal{T}}$ のどの相異なる2要素も共通部分を持たない．

補題 6 $\mathcal{T}$ の非重複 (r,k)-捕捉族が存在する．

証明: 頂点集合族 $\mathcal{U}$ の重み $\mathbf{weight}(\mathcal{U})$ を，

$$\mathbf{weight}(\mathcal{U}) = \sum_{X\in\mathcal{U}} |X|$$

によって定義する．$\mathcal{U} \subseteq \mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}^{\mathbf{sconn}}$ を $\bigcup\mathcal{U} = \bigcup \mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}$ であり，かつそのような $\mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}^{\mathbf{conn}}$ の部分集合のなかで重みが最小であるように選ぶ．以下では，もし $\mathcal{U}$ の相異なる2要素 X_1 と X_2 が共通部分を持てば $\mathcal{U}' \subseteq \mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}^{\mathbf{sconn}}$ で $\bigcup\mathcal{U}' = \bigcup \mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}$ かつ $\mathbf{weight}(\mathcal{U}') < \mathbf{weight}(\mathcal{U})$ であるようなものが存在することを示す．この結論は $\mathcal{U}$ の選び方に矛盾するので，したがってそのような X_1, X_2 は存在しない．したがって，$\mathcal{U}$ は $\mathcal{T}$ の非重複 (r,k)-捕捉族である．$\mathcal{U}$ の全ての要素は，自身以外の U の任意の要素を包含していないと考えてよい．$X_1, X_2 \in \mathcal{U}$ が $X_1 \neq X_2$ かつ $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ を満たすと仮定して矛盾を導こう．$X_1 \cap X_2$ の G における連結成分を任意にひとつ選び Y とおく．$i=1,2$ に対して，$\mathcal{U}_i$ によって $X_i \setminus Y$ の G における連結成分すべてからなる族を表す．

頂点集合 $W \subseteq V(G)$ は，それが互いに共通部分を持たない $\mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}^{\mathbf{sconn}}$ の要素の和集合として表されるとき，捕捉可能であるということにする．

主張 $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ の要素は高々ひとつを除いて捕捉可能である．

まず，この主張が成り立つと仮定して，$\mathbf{weight}(\mathcal{U}') < \mathbf{weight}(\mathcal{U})$ かつ $\bigcup \mathcal{U}' = \bigcup \mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}$ なる $\mathcal{U}'$ を構成しよう．一般性を失うことなく，$\mathcal{U}_1$ の要素がすべて捕捉可能であると仮定する．$\mathcal{U}_1$ の各要素 W を $\mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}^{\mathbf{sconn}}$ の要素によって分割し，その分割に族す頂点集合のすべてからなる族を $\mathcal{V}_W$ とおく．特に $W \in \mathbf{capt}_{r,k}\mathcal{T}^{\mathbf{sconn}}$ であるならば $\mathcal{V}_W = \{W\}$ である．$\mathcal{U}' = \mathcal{U} \setminus \{X_1\} \cup \bigcup_{W \in U_1} \mathcal{V}_W$ とおけば，$\bigcup \mathcal{U}' = \bigcup \mathcal{U}$ であり，$\mathbf{weight}(\mathcal{U}') = \mathbf{weight}(\mathcal{U}) - |Y|$ であるから，こうして構成された U' は目指した条件を満たし，$\mathcal{U}$ の選び方に矛盾する．

最後に上の主張を証明しよう．$i = 1, 2$ に対して X_i の r-正則捕捉歩道 w_i を任意に選び，その脚を t_i，入り口を s_i^* とおく．

$\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ の要素がすべて捕捉可能であるときは何も論じる必要はないので，ある $W \in \mathcal{U}_1 \cup U_2$ が捕捉可能ではないと仮定する．補題5より，W の切断閉歩道 $\pi(W)$ は $\pi(X_1)$ の部分歩道 w_1 と $\pi(X_2)$ の部分歩道 w_2 を，どちらかを逆向きにして繋げたものである．

$\pi(W)$ に属す双対頂点のうち，w_1 の（したがって w_2 の）始点と終点以外のものからなる集合を $\Delta(W)$ で表すことにする．

（場合 1）$\Delta(W)$ は s_1^* と s_2^* のうちちょうどひとつを含む．一般性を失うことなく，$\Delta(W)$ は s_1^* を含むと仮定しよう．$i = 1, 2$ に対して $\pi(X_i)$ から w_i を除いてできる歩道を $\overline{w_i}$ とし，$\overline{w_1}$ と $\overline{w_2}$ をつないでできる閉歩道を w とよぶ．この場合の仮定より，w は s_2^* を含んでいる．そこで，w の始終点が s_2^* であるとみなそう．最後に歩道 t_2，w，t_2^{-1} をこの順につなげてできる閉歩道を w' とおくと，w' は $U_1 \cup U_2 \setminus \{W\}$ のすべての要素を捕捉する．w'，$\pi(W)$，t_1，t_1^{-1} の辺を集めてできる多重集合は $\pi(X_1)$，$\pi(X_2)$，t_1，t_1^{-1}，t_2，t_2^{-1} の辺を集めてできる多重集合に等しく，したがってその大きさは $2k$ 未満である．一方 W が捕捉可能ではないという仮定より，t_1，$\pi(W)$，t_1^{-1} をつないでできる歩道の長さは k 以上である．したがって，w' の長さは k 未満であり，$U_1 \cup U_2 \setminus \{W\}$ のすべての要素は捕捉可能である．

（場合２）$\Delta(W)$ は s_1^* と s_2^* の両方を含む．t を t_1^{-1} と t_2 をこの順につないでできる歩道とすると，t の始点は w_1 上の双対頂点 s_1^* であり，終点は w_2 上の双対頂点 s_2^* である．まず，t はその内部の双対頂点において $\pi(X_1)$ と $\pi(X_2)$ の両方に交わることはないことに注意する．(もしそうでなければ，$i = 1, 2$ に対して t_i が r^* から $\pi(X_i)$ への G^* 上の最短路であることに矛盾する.)

（場合２－１） t はその内部において $\pi(X_1)$ とも $\pi(X_2)$ とも交わらない．このとき，r は W の内部になければならない．t_1^{-1} が最初に t_2 と頂点を共有する点を p^* とする．t^{-1} の p^* までの部分経路と t_2 の p^* からの部分経路を繋げてできる経路 t' に属す辺集合は $G[W]$ において，W をともに連結な二つの頂点集合 W_1 と W_2 のカットとなる．W が捕捉可能でないことから，W_1 と W_2 少なくともひとつは捕捉可能でない．一般性を失うことなく W_1 が捕捉可能でないと仮定する．$\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ において W を W_1 と W_2 で置き換えた集合を考えると，場合１と同様の議論によりその要素で W_1 以外のものはすべて捕捉可能であることを示すことができる．(ここでは，場合１における $\pi(X_i)$，$i = 1, 2$，の役割を，$\pi(X_i)$ に t_i と t_i^{-1} を付け加えた歩道が果たす.)

（場合２－２） t はその内部において $\pi(X_1)$ または $\pi(X_2)$ のちょうどひとつと交わる．一般性を失うことなく $\pi(X_2)$ と交わると仮定する．この交わりは t_1 と $\pi(X_2)$ の交わりでなければならない．t_1^{-1} の部分歩道で始点から最初に $\pi(X_2)$ と交わる双対頂点までのものを t_1' とおくと，t_1' は W をふたつの集合 W_1 と W_2 に分割する．以下の議論は場合２－１と同様である．

（場合３）$\pi(W)$ は s_1^* と s_2^* のどちらも含まない．W' を $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \setminus \{W\}$ の任意の要素とする．$\pi(W')$ が s_1^* と s_2^* のひとつでも含めば W' が捕捉可能である．(そうでないと仮定すると W' に対する場合１および２の議論から矛盾を生ずる.) そこで，$\pi(W')$ も s_1^* と s_2^* のどちらも含まないと仮定する．$\pi(W')$

を構成する $\pi(X_i)$, $i=1,2$, の部分歩道をそれぞれ w'_i で表し, $\pi(X_i)$ から, w_i と w'_i を除いてできるふたつの部分歩道を u_i^1, u_i^2 とおく. ここで, $\pi(X_i)$ は w_i, u_i^1, w'_i, u_i^2 をこの順につなげて得られるものとする.

(場合3－1) s_1^* が u_1^1 上に, s_2^* が u_2^1 上にある. $i=1,2$ に対して, u_i^1 を s_i^* で分割してできるふたつの部分歩道のうち, w_i の側にあるものを $u_i(W)$, w'_i の側にあるものを $u_i(W')$ と呼ぶ. W に対する捕捉歩道を t_1, $u_1(W)$, $\pi(W)$, $u_2(W)$, t_2^{-1} をこの順に (逆転の必要な部分歩道は逆転し, $\pi(W)$ の始終点は適宜選択して) つなげることにより構成し, 同様に W' に対する捕捉歩道を t_2, $u_2(W')$, $\pi(W')$, $u_1(W')$, t_1^{-1} をこの順につなげることによって構成する. この二つの歩道は, X_1 と X_2 に対する長さ k 未満の捕捉歩道の部分歩道を重複なく使用しているので, その長さの合計は $2k$ 未満である. 一方, W が捕捉可能でないという仮定より W' は捕捉可能でなければならない.

(場合3－2) s_1^* が u_1^1 上に, s_2^* が u_2^2 上にある. u_1^1 と u_2^1 および $\pi(W)$ をつなげてできる閉歩道に t_1 と t_1^{-1} をつなげることにより, W を捕捉する歩道を構成する. 同様に u_2^1 と u_2^2 および $\pi(W')$ をつなげてできる閉歩道に t_2 と t_2^{-1} をつなげることにより, W' を捕捉する歩道を構成する. 場合3－1と同様の議論により, W' が捕捉可能であることが結論される.

s_1^* と s_2^* がその他の位置に在る場合も, 場合3－1または場合3－2と本質的には同等である.

以上より, すべての場合において, $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ のなかの W 以外の要素は捕捉可能である. []

定義 6 $\tilde{T}$ を T の非重複 (r,k)-捕捉部分族とする. $\tilde{T}$ の各要素 X にその r-正則捕捉歩道 $\gamma(X)$ を割り当てる割り当て γ が次の条件をすべて満たすとき, γ を清廉な歩道割り当てと呼ぶ.

1. $X \in \tilde{T}$ がその誘導部分グラフ $G[X]$ の面として r を持たないとき, どの $Y \in \tilde{T}$ に対しても $\gamma(Y)$ の脚は $G[X]$ のどの辺の双対も含まない.
2. $X \in \tilde{T}$ がその誘導部分グラフ $G[x]$ の面として r を持つとき, どの $Y \in \tilde{T}$ に対しても $\gamma(Y)$ の脚の通る $G[X]$ の双対の辺は $\gamma(X)$ の脚に属す辺に限られる.
3. すべての X に対して $\gamma(X)$ の脚を集めてできる G^* の部分グラフは木である.

補題 7 T の (r,k)-捕捉部分族で, 清廉な歩道割り当てを持つものが存在する.

補題 8 T の (r,k)-捕捉部分族 $\tilde{T}$ が清廉な歩道割り当て γ を持つとき, すべての $X \in \tilde{T}$ に対して $\gamma(X)$ を適当な順番でつなげることにより, T の全捕捉歩道が得られる.

以上により, 定理3の証明は完了した.

参考文献

[1] Z. Bian, Q.Gu ,M.Marzban, H.Tamaki, Y.Yoshitake, Empirical Study on Branch-width and Branch Decomposition of Planar Graphs, ALENEX, 2008.

[2] H.L Bodlaender, A Linear-Time Algorithm for Finding Tree-Decomposition of Small Treewidth, SIAM Journal on Computing, 25:1305-1317,1996.

[3] I.V. Hicks, A.M.C.A. Koster, and E.Kolotoğlu, Branch and tree decomposition techniques for discrete optimization, TutORials in Operations Research: INFORMS – New Orleans, 1-33, 2005.

[4] N. Robertson and P.D. Seymour, Graph minors X. Obstructions to tree-decomposition, Journal of Combonatorial Theory, Series B, 153-190, 1991.

[5] N. Robertson and P.D. Seymour, Graph minors XI. Circuits on a surface, Journal of Combonatorial Theory, Series B, 72-106, 1994.

[6] P.D.Seymour and R.Thomas, Call Routing and the Ratcatcher. Combinatorica, 14(3), 217-241,1994.