

内向木による有向グラフの被覆

神山直之 加藤直樹

京都大学大学院工学研究科建築学専攻
615-8540 京都府京都市西京区京都大学桂
{is.kamiyama, naoki}@archi.kyoto-u.ac.jp

概要. 本論文では, d 個の特別な点の集合 $S = \{s_1, \dots, s_d\} \subseteq V$ を持つ有向グラフ $D = (V, A)$ と関数 $f: S \rightarrow \mathbb{Z}_+$ (\mathbb{Z}_+ は非負整数の集合) が与えられたとき, 各 $T_{i,j}$ が s_i を根とし, s_i に到達可能な点集合を張り, そして全ての $i = 1, \dots, d$ に対する $T_{i,1}, \dots, T_{i,f(s_i)}$ の辺集合の合併が A を被覆するような, $\sum_{i=1}^d f(s_i)$ 個の内向木の集合 $\{T_{i,j}: i = 1, \dots, d, j = 1, \dots, f(s_i)\}$ の存在を判定する問題を考える. 本論文では, この問題が重みつきマトロイド交差アルゴリズムを用いることにより, D のサイズと $\sum_{i=1}^d f(s_i)$ の多項式時間で解けることを示す. さらに, D が閉路を持たない場合は, 重みつきマトロイド交差アルゴリズムの代わりに, 二部グラフの最大マッチングアルゴリズムを用いることで, 高速に解くことができることを示す.

Rooted Tree Covering of Directed Graphs

Naoyuki Kamiyama Naoki Katoh

Department of Architecture and Architectural Engineering, Kyoto University,
Kyotodaigaku-Katsura, Nishikyo-ku, Kyoto, 615-8540, Japan
{is.kamiyama, naoki}@archi.kyoto-u.ac.jp

Abstract. In this paper, we consider the following covering problem arising from evacuation planning problems. Given a directed graph $D = (V, A)$ with a set of d specified vertices $S = \{s_1, \dots, s_d\} \subseteq V$ and a function $f: S \rightarrow \mathbb{Z}_+$ where \mathbb{Z}_+ denotes the set of non-negative integers, our problem asks whether there exist a set of $\sum_{i=1}^d f(s_i)$ in-trees $\{T_{i,j}: i = 1, \dots, d, j = 1, \dots, f(s_i)\}$ such that each $T_{i,j}$ is rooted at s_i and spans vertices from which s_i is reachable, and the union of all arc sets of $T_{i,j}$ for $i = 1, \dots, d$ and $j = 1, \dots, f(s_i)$ covers A . In this paper, we prove that such set of in-trees covering A can be found by using an algorithm for the weighted matroid intersection problem in time bounded by a polynomial in $\sum_{i=1}^d f(s_i)$ and the size of D . Moreover, we prove that if D is acyclic, we can solve this problem more efficiently than general case by finding maximum matchings in a series of bipartite graphs instead of using an algorithm for the weighted matroid intersection problem.

1 はじめに

与えられたグラフを特定の性質を持った部分グラフ (例えば, 木や道) で被覆する問題は, 実用的にも理論的にも重要な問題であり, 多く研究されてきた. 例えば, Nagamochi and Okada [9] は, 与えられた無向木の点集合を部分木で被覆する問題を, また Arkin et al. [1] は与えられた無向グラフの点集合や辺集合を部分木や道で被覆する問題を考えている. これらの論文は配送計画問題への応用が動機となっている. さらに, Even et al. [2] は, 看護師施設配置問題への

応用のための被覆問題を扱っている.

本論文では, 以下のような避難計画への応用のための, 有向グラフを根つき木で被覆する問題を考える. 入力として, 都市をモデル化した有向グラフが与えられる. 点は建物や交差点を, 辺はそれらを結ぶ道を表わしている. さらに, 人々は点だけではなく, 辺沿いにも存在していると看做する. このとき, 全ての人々を安全な場所へ逃がすため, それぞれの避難場所から避難指示を出すことを考えよう. ただし, 混乱を避けるため, 一回の避難指示は各避難者に対して一つの道を指示し, さらに各道は交差すること

は避けたい。よって、各避難指示はある避難所を根とする内向木となっていなければならない。さらに、各避難所に対する指示の回数は、避難所の規模に比例して決められているとする。

上記の避難計画問題は以下のような有向グラフ上の被覆問題へと定式化することができる。入力として、点集合 V 、辺集合 A 、 d 個の特別な点の集合 $S = \{s_1, \dots, s_d\} \subseteq V$ 、関数 $f: S \rightarrow \mathbb{Z}_+$ (\mathbb{Z}_+ は非負整数の集合) を持つ有向グラフ $D = (V, A, S, f)$ が与えられる。上記の避難計画問題においては、 S は安全な場所の集合に対応し、 $f(s_i)$ は避難施設 s_i に対する避難指示の回数である。また、各 $i = 1, \dots, d$ に対して、 $V_D^i \subseteq V$ を V の点のうち s_i に到達可能な点の集合であると定義し、 s_i を根とし V_D^i を張る内向木を (D, s_i) -内向木と定義する。さらに、 $\sum_{i=1}^d f(s_i)$ 個の D の部分グラフの集合 \mathcal{T} が、各 $i = 1, \dots, d$ に対してちょうど $f(s_i)$ 個の (D, s_i) -内向木を含むとき、 \mathcal{T} を D -正規内向木集合と呼ぶ。そして、 D -正規内向木集合 \mathcal{T} の任意の二つの内向木が辺素であるとき、 \mathcal{T} を辺素 D -正規内向木集合と呼ぶ。 D -正規内向木集合 \mathcal{T} に含まれる全ての内向木の辺集合の合併が A に等しいとき、 \mathcal{T} は A を被覆するという。

図 2 の四つの内向木の集合は、 $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ 、 $f(s_1) = 2$ 、 $f(s_2) = 1$ 、 $f(s_3) = 1$ を満たす図 1(a) の有向グラフ $D = (V, A, S, f)$ の辺集合 A を被覆する D -正規内向木集合 \mathcal{T} となっている。しかし、 \mathcal{T} は辺素 D -正規内向木集合とはなっていない。

本論文では、以下の内向木による有向グラフの被覆問題 CDGI を扱い、有向グラフ $D = (V, A, S, f)$ に対して CDGI(D) に実行可能な解が存在する特徴付けを示し、CDGI(D) に対する多項式時間アルゴリズムを提案する。

問題:	CDGI(D)
入力:	有向グラフ D ;
出力:	存在するならば、 D の辺集合を被覆する D -正規内向木集合

問題 CDGI(D) の特別な場合として S が一つの点 s で構成されているときは Vidyasankar [12] によって、不等式系を用いた実行可能な解が存在する必要十分条件が与えられている (少し弱いものが Frank [4] によっても提案されている) が、我々の知る限りでは CDGI(D) に対するアルゴリズムは提案されていない。

本論文の結果: まず、CDGI(D) がある連結度増大問題へ帰着することができることを示す。そして、その連結度増大問題が重みつきマトロイド交差アルゴリズムを用いると、 D のサイズと $\sum_{i=1}^d f(s_i)$ の多項式時間で解けることを示す (この結果は Frank [3] の結果の一般化となっている)。 D が閉路を持たない場合は、CDGI(D) が実行可能な解を持つ別の特徴付けを示し、その特徴付けにより、重みつきマトロイド交差アルゴリズムの代わりに、二部グラフの最大マッチングアルゴリズムを用いることにより一般的な場合より高速に解くことができることを示す。

2 定義

$D = (V, A, S, f)$ を連結有向グラフとし、 $S = \{s_1, \dots, s_d\}$ と定義する。ただし、常に $|A|$ 個の (D, s_i) -内向木によって、 V_D^i によって誘導される D の部分グラフに含まれる辺を被覆することができるので、一般性を失うことなく $f(s_i) \leq |A|$ と仮定する。各 $B \subseteq A$ に対して $\partial^-(B)$ と $\partial^+(B)$ をそれぞれ B の辺の始点と終点の集合であるとする。各 $e \in A$ に対して、 $\partial^-(\{e\})$ と $\partial^+(\{e\})$ の代わりにそれぞれ $\partial^-(e)$ と $\partial^+(e)$ と書く。各 $W \subseteq V$ に対して、 $\delta_D(W) = \{e \in A: \partial^-(e) \in W, \partial^+(e) \notin W\}$ と定義する。各 $v \in V$ に対しては $\delta_D(\{v\})$ の代わりに $\delta_D(v)$ と書く。二つの異なる点 $u, v \in V$ に対して、 D における u から v への局所連結度を $\lambda(u, v; D)$ と定義する。つまり $\lambda(u, v; D) = \min\{|\delta_D(W)|: u \in W, v \notin W, W \subseteq V\}$ となる。もし、 D の部分グラフ T が、辺の向きを無視したとき閉路を持たなければ森と呼ぶ。さらに、連結な森を木と定義する。辺集合 B の全ての辺が A のある辺に平行ならば、 B は A に平行であると定義する。辺集合 B を A に加えることによって得られる有向グラフを $D+B$ とする。つまり、 $D+B = (V, A \cup B, S, f)$ となる。各 $S' \subseteq S$ に対して、 $f(S') = \sum_{s_i \in S'} f(s_i)$ と定義する。各 $v \in V$ に対して、 S の点のうち v から到達可能なものの集合を $R_D(v)$ とする。各 $W \subseteq V$ に対して、 $R_D(W) = \bigcup_{v \in W} R_D(v)$ と定義する。 A に平行な辺集合 B が与えられたとき、各 $v \in V$ に対して明らかに

$$R_D(v) = R_{D+B}(v) \quad (1)$$

となる。

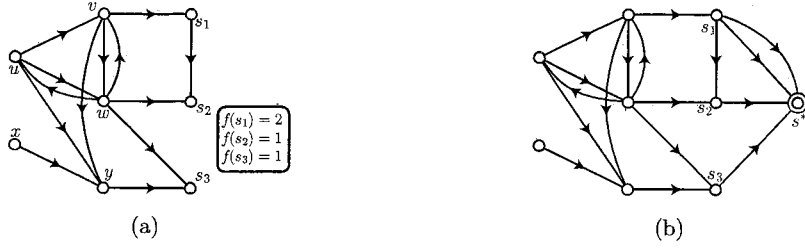


図 1: (a) 有向グラフ D . (b) 変形後のグラフ D^* .

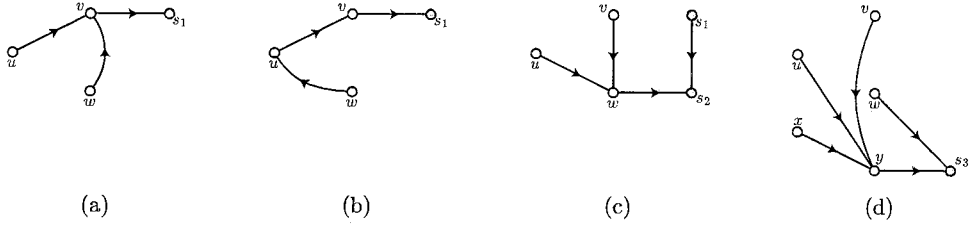


図 2: (a) (D, s_1) -内向木. (b) (D, s_1) -内向木. (c) (D, s_2) -内向木. (d) (D, s_3) -内向木.

D に新たな点 s^* と s_i から $s^* \leftarrow f(s_i)$ 本の平行辺を加えて得られるグラフを D^* と定義し (図 1 参照), D^* の辺集合を A^* とする. D^* の定義から,

$$|A^*| = \sum_{v \in V} |\delta_{D^*}(v)| = |A| + f(S) \quad (2)$$

が成り立つ. 全ての点 $v \in V$ に対して, $|\delta_{D^*}(v)| \leq f(R_D(v))$ が成り立つとき, D を (S, f) -適格であるという.

2.1 辺強化根つき連結度増大問題

有向グラフ $D = (V, A, S, f)$ が与えられたとき, $A \cap B = \emptyset$ を満たし A に平行な辺集合 B が, 全ての $v \in V$ に対して $\lambda(v, s^*; D^* + B) \geq f(R_D(v))$ を満たす時, B を D^* -根つきコネクタと呼ぶ. このとき, 辺強化根つき連結度増大問題は (RAA-RA) は以下のように定義される.

問題:	RAA-RA(D^*)
入力:	有向グラフ D に対する D^* ;
出力:	サイズが最小の D^* -根つきコネクタ.

ただし, 問題 RAA-RA(D^*) は最小数の並行辺を加えることによって, 各 $v \in V$ から $s_i \in R_D(v)$ への連結度を増大させる問題とは異なることに注意する. 例えば, 図 3(a) のグラフ D^* を考えよう. ただ

し, $D = (V, A, S, f)$ は $S = \{s_1, s_2\}$, $f(s_1) = 2$, $f(s_2) = 2$ を満たすとする. 図 3(b) の破線は最小数の D^* -根つきコネクタを表わしている. 最小数の並行辺を加えて, 各 $v \in V$ から $s_i \in R_D(v)$ への連結度を $f(s_i)$ に増大させる問題 (この問題は [7] において IARA と呼ばれている) に対する最適解は図 3(c) の破線となる. IARA(D^*) は \mathcal{NP} 困難であることは知られているが [7], S が一つの点で構成されている場合の RAA-RA(D^*) は, 重みつきマトロイド交差アルゴリズムを用いることで, $f(S)$ と D のサイズの多項式時間で解くことができることが知られている [3].

2.2 有向グラフの辺集合上のマトロイド

本節では, 後の議論で必要となる有向グラフ $D = (V, A, S, f)$ に対する A^* 上の二つのマトロイド $M(D^*)$ と $U(D^*)$ の定義を行う. $M = (E, \mathcal{I})$ で E 上の独立集合族が \mathcal{I} であるマトロイドを表わす. マトロイドに関しては [10] を参照.

各 $i = 1, \dots, d$ と $j = 1, \dots, f(s_i)$ に対して, $M_{i,j}(D^*) = (A^*, \mathcal{I}_{i,j}(D^*))$ を, $I \subseteq A^*$ が $\mathcal{I}_{i,j}(D^*)$ に含まれる必要十分条件が, I の全ての辺の始点と終点が $V_D^i \cup \{s^*\}$ に含まれ, 有向グラフ $(V_D^i \cup \{s^*\}, I)$ が森であるように定義する. $M_{i,j}(D^*)$ は明らかにマ

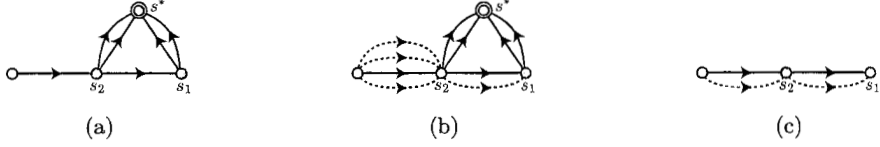


図 3: (a) 入力. (b) RAA-RA の最適解. (c) IARA の最適解.

トロイドである (つまりグラフィックマトロイド). さらに, 全ての $i = 1, \dots, d$ と $j = 1, \dots, f(s_i)$ に対する $M_{i,j}(D^*)$ の合併を $M(D^*) = (A^*, \mathcal{I}(D^*))$ と書き, 以下のように定義する. $I \subseteq A^*$ が $\mathcal{I}(D^*)$ に含まれる必要十分条件は I が各 $I_{i,j}$ が $\mathcal{I}_{i,j}(D^*)$ に含まれるように $\{I_{i,1}, \dots, I_{i,f(s_i)} : i = 1, \dots, d\}$ へ分割できることである. $M(D^*)$ もマトロイドとなる ([10] の 12.3 章参照. このマトロイドはマトロイドサムとも呼ばれる). もし $I \in \mathcal{I}(D^*)$ が, 各有向グラフ $(V_D^i \cup \{s^*\}, I_{i,j})$ が木になるように $\{I_{i,1}, \dots, I_{i,f(s_i)} : i = 1, \dots, d\}$ へと分割できるとき, I を $M(D^*)$ の基と定義する.

もう一つのマトロイドを定義しよう. $U(D^*) = (A^*, \mathcal{J}(D^*))$ を, $I \subseteq A^*$ が $\mathcal{J}(D^*)$ に含まれる必要十分条件が, I が

$$|\delta_{D^*}(v) \cap I| \leq \begin{cases} f(R_D(v)), & \text{if } v \in V, \\ 0, & \text{if } v = s^* \end{cases} \quad (3)$$

を満たすことであるように定義する. $U(D^*)$ は一様マトロイドの直和であるので, $U(D^*)$ もマトロイドである ([10] の pp.16 の練習 7 と例 1.2.7 を参照). $I \in \mathcal{J}(D^*)$ が (3) を等号で満たす時, $U(D)$ の基と定義する.

二つのマトロイド $M(D^*)$ と $U(D^*)$ に対して, $I \subseteq A^*$ が $I \in \mathcal{I}(D^*) \cap \mathcal{J}(D^*)$ を満たす時, I を D^* -交差と呼ぶ. もし D^* -交差 I が $M(D^*)$ と $U(D^*)$ の両方の基であるとき, I を完全であると定義する.

A^* 上の重み関数 $w: A^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ (\mathbb{R}_+ は非負実数の集合) が与えられたとき, $I \subseteq A^*$ の重みを I の要素の重みの合計であると定義し, $w(I)$ と表す. このとき, 重みつきマトロイド交差問題 (WMI) は以下のように定義される [5].

問題:	WMI(D^*)
入力:	有向グラフ D に対する D^* と重み関数 $w: A^* \rightarrow \mathbb{R}_+$;
出力:	もし存在するならば, 重み最小の完全 D^* -交差.

補題 2.1 WMI(D^*) を $O(M|A^*|^6)$ 時間で解くことができる. ただし, $M = \sum_{v \in V} f(R_D(v))$ とする.

2.3 [8] からの結果

本節では, 本論文で重要な役割を果たす Kamiyama et al. [8] によって示された, 内向木のバックギングに関する結果を導入する.

定理 2.2 ([8]) 有向グラフ $D = (V, A, S, f)$ が与えられたとき, 以下の三つの命題は等価である: (i) 全ての $v \in V$ に対して $\lambda(v, s^*; D^*) \geq f(R_D(v))$. (ii) 辺素 D -正規内向木集合が存在する. (iii) 完全 D^* -交差が存在する.

以下の定理は [8] において陽に示されていないが, 定理 2.2 の証明より容易に示すことができる.

定理 2.3 ([8]) 定理 2.2 の命題を満たす有向グラフ $D = (V, A, S, f)$ が与えられたとき, 辺素 D -正規内向木集合を $O(M^2|A|^2)$ 時間で求めることができる. ただし, $M = \sum_{v \in V} f(R_D(v))$ とする.

定理 2.2 より以下の系を得る.

系 2.4 有向グラフ $D = (V, A, S, f)$ と A に平行で $A \cap B = \emptyset$ を満たす辺集合 B が与えられたとき, 以下の三つの命題は等価である: (i) B が D^* -根つきコネクタ. (ii) 辺素 $(D+B)$ -正規内向木集合が存在する. (iii) 完全 $(D+B)^*$ -交差が存在する.

3 アルゴリズム

有向グラフ $D = (V, A, S, f)$ が与えられたとき, 本節では CDGI(D) に対するアルゴリズムを提案する. 提案するアルゴリズムの計算時間は D のサイズと $f(S)$ の多項式で抑えられる. まず, CDGI(D) が RAA-RA(D^*) へ帰着できることを示し, その後, RAA-RA(D^*) が重みつきマトロイド交差アルゴリズムを用いて解くことができることを示す.

3.1 CDGI から RAA-RA への帰着

もし $D = (V, A, S, f)$ が (S, f) -適格でなかったら, ある $v \in V$ に対して $|\delta_{D^*}(v)| > f(R_D(v))$ が成り立ち, D -正規内向木集合の定義より $\delta_{D^*}(v)$ を被覆する D -正規内向木集合は存在しないので, $\text{CDGI}(D)$ には実行可能な解は存在しない. よって, ここからの議論においては D は (S, f) -適格であると仮定する.

命題 3.1 (S, f) -適格な有向グラフ $D = (V, A, S, f)$ に対して, D^* -根つきコネクタのサイズは $\sum_{v \in V} f(R_D(v)) - (|A| + f(S))$ 以上である.

(S, f) -適格な有向グラフ $D = (V, A, S, f)$ に対して,

$$\text{opt}_D = \sum_{v \in V} f(R_D(v)) - (|A| + f(S)). \quad (4)$$

と定義する. 命題 3.1 より D^* -根つきコネクタのサイズは opt_D 以上となる.

補題 3.2 (S, f) -適格な有向グラフ $D = (V, A, S, f)$ が与えられたとき, $\text{CDGI}(D)$ に実行可能な解が存在する必要十分条件は, サイズが opt_D である D^* -根つきコネクタが存在することである.

証明. 必要性: $\text{CDGI}(D)$ に実行可能な解が存在する, つまり A を被覆する D -正規内向木集合 \mathcal{T} が存在すると仮定する. 各 $i = 1, \dots, d$ に対して, \mathcal{T} に含まれる $f(s_i)$ 個の (D, s_i) -内向木を $T_{i,1}, \dots, T_{i,f(s_i)}$ と表す. 各 $e \in A$ に対して, $P_e = \{(i, j) : e \text{ は } T_{i,j} \text{ に含まれる}\}$ と定義する. \mathcal{T} は A を被覆しているので, 各 $e \in A$ は少なくとも一つの \mathcal{T} の内向木に含まれる. つまり, 全ての $e \in A$ に対して $|P_e| \geq 1$ が成り立つ. 辺集合 B を $B = \bigcup_{e \in A} \{ |P_e| - 1 \text{ 本の } e \text{ のコピー} \}$ と定義しよう. ここからは, B がサイズ opt_D の D^* -根つきコネクタであることを示す.

$|B| = \text{opt}_D$ が成り立つことは, 各 $v \in V$ に対して (5) が成り立つことより導かれる ((5) の証明は略).

$$\sum_{e \in \delta_D(v)} (|P_e| - 1) = f(R_D(v)) - |\delta_{D^*}(v)|. \quad (5)$$

B は各 $e \in A$ の $|P_e| - 1$ 本のコピーを含んでいるので, 以下の式が成り立つ.

$$\begin{aligned} |B| &= \sum_{v \in V} \sum_{e \in \delta_D(v)} (|P_e| - 1) \\ &= \sum_{v \in V} (f(R_D(v)) - |\delta_{D^*}(v)|) \quad ((5) \text{ より}) \\ &= \text{opt}_D \quad ((2) \text{ と } (4) \text{ より}). \end{aligned}$$

後は, B が D^* -根つきコネクタであることを証明すればよい. このためには, 系 2.4 より辺素 $(D+B)$ -正規内向木集合が存在することを示せばよい. まず, \mathcal{T} から, 各 $i = 1, \dots, d$ に対して内向木 $T'_{i,1}, \dots, T'_{i,f(s_i)}$ を含む辺素な内向木の集合 \mathcal{T}' を以下に示すように構成する. 各 $T'_{i,j}$ は $T_{i,j}$ から以下のようにして構成される. 辺 $e \in A$ が \mathcal{T} の二つ以上の内向木に含まれている場合は, 一つの内向木を除いて $(i, j) \in P_e$ を満たす内向木 $T_{i,j}$ に含まれる辺 e を, e に平行な B の辺に置き換える必要がある. そこで, P_e の要素のうち辞書式最小のもの $(i_{\min}, j_{\min}) \in P_e$ に対しては $T'_{i_{\min}, j_{\min}}$ が e を使用することを認め, 他の $(i, j) \in P_e \setminus (i_{\min}, j_{\min})$ に対しては, $T_{i,j}$ に含まれる辺 e を, e に平行な B の辺と置き換える. ただしこのとき, 異なった $(i, j), (i', j') \in P_e \setminus (i_{\min}, j_{\min})$ に対して置き換えた後の $T'_{i,j}$ と $T'_{i',j'}$ が異なった e に平行な B の辺を含むようにする. この作業を全ての $e \in A$ に施した内向木の集合を \mathcal{T}' とする. 詳しい証明は省略するが, この \mathcal{T}' が辺素な $(D+B)$ -正規内向木集合となっている.

十分性: B をサイズが opt_D の D^* -根つきコネクタとする. 系 2.4 より辺素 $(D+B)$ -正規内向木集合 \mathcal{T}' が存在する. 各 $i = 1, \dots, d$ に対して, \mathcal{T}' の $f(s_i)$ 個の $(D+B, s_i)$ -内向木を $T'_{i,1}, \dots, T'_{i,f(s_i)}$ と表す. ここからは, \mathcal{T}' から A を被覆する D -正規内向木集合が構成できることを示す. まず, \mathcal{T}' から以下の **Replace** を用いて, 各 $i = 1, \dots, d$ と $j = 1, \dots, f(s_i)$ に対して $T_{i,j}$ と表される内向木を含む集合 \mathcal{T} を構成する.

Replace: 各 $i = 1, \dots, d$ と $j = 1, \dots, f(s_i)$ に対して, $T_{i,j}$ を $T'_{i,j}$ に含まれる B の全ての辺を, その辺と平行な A の辺で置き換えたものとする.

まず, 詳細は省略するが \mathcal{T} が D -正規内向木集合であることは容易に示せる. よって, あとは \mathcal{T} が A を被覆することを示せばよい. そのために, まず \mathcal{T}' が $A \cup B$ を被覆することを示す. $A \cap B = \emptyset$, $|B| = \text{opt}_D$, (4) より

$$|A \cup B| = |A| + \text{opt}_D = \sum_{v \in V} f(R_D(v)) - f(S) \quad (6)$$

が成り立つ. 辺素 $(D+B)$ -正規内向木集合の定義より, 各 $v \in V$ は \mathcal{T}' の $f(R_{D+B}(v))$ 個の内向木に含まれるため, 各 $v \in V$ に対して $\delta_{D+B}(v)$ の辺で \mathcal{T}' の内向木に含まれる数は, (i) もし $v \in V \setminus S$ なら $f(R_{D+B}(v))$,

または (ii) もし $v \in S$ なら $f(R_{D+B}(v)) - f(v)$ となる。よって、 $A \cup B$ の辺のうち T' の内向木に含まれる辺の数は

$$\begin{aligned} & \sum_{v \in V \setminus S} f(R_{D+B}(v)) + \sum_{v \in S} (f(R_{D+B}(v)) - f(v)) \\ &= \sum_{v \in V} f(R_{D+B}(v)) - f(S) \\ &= \sum_{v \in V} f(R_D(v)) - f(S) \quad ((1) \text{より}) \end{aligned} \quad (7)$$

となる。 T' の全ての辺は $A \cup B$ に含まれ、 $A \cup B$ の辺の数は (6) と (7) より T' の辺の数に等しいため、 T' は A の全ての辺を含んでいる。よって、Replace の定義より T は A を被覆している。 \square

補題 3.2 の十分性の証明より、もしサイズが opt_D であるような D^* -根つきコネクタを見つけることができたなら、 A を被覆する D -正規内向木集合を Replace によって辺素 $(D+B)$ -正規内向木集合から求めることができる。さらに、 $(D+B)$ -正規内向木集合は定理 2.3 のアルゴリズムを用いれば求めることができる。命題 3.1 より $\text{RAA-RA}(D^*)$ の最適値は opt_D 以上であるので、サイズが opt_D の D^* -根つきコネクタが存在するかどうかは、 $\text{RAA-RA}(D^*)$ を解けば判定することができる。もし、 $\text{RAA-RA}(D^*)$ を解くことができるかと仮定したならば、 A を被覆する D -正規内向木集合を求めるアルゴリズム CR はアルゴリズム 1 のように記述することができる。

アルゴリズム 1 アルゴリズム CR

入力 有向グラフ $D = (V, A, S, f)$

出力 もし存在するならば、 A を被覆する D -正規内向木集合

- 1: **if** D が (S, f) -適格ではない **then**
 - 2: 停止 (A を被覆する D -正規内向木集合はない)
 - 3: **end if**
 - 4: $\text{RAA-RA}(D^*)$ の最適解 B を求める
 - 5: **if** $|B| > \text{opt}_D$ **then**
 - 6: 停止 (A を被覆する D -正規内向木集合はない)
 - 7: **else**
 - 8: 辺素 $(D+B)$ -正規内向木集合を構成する
 - 9: T' から Replace によって T を構成する
 - 10: **return** T
 - 11: **end if**
-

補題 3.3 有向グラフ $D = (V, A, f, S)$ が与えられたとき、アルゴリズム CR はもし存在するならば A を被

覆する D -正規内向木集合を $O(\gamma_1 + |V||A| + M^4)$ 時間で求める。ただし、 γ_1 は $\text{RAA-RA}(D^*)$ を解くのに必要な時間、 $M = \sum_{v \in V} f(R(v))$ であるとする。

3.2 RAA-RA から WMI への帰着

3.1 節のアルゴリズム CR より、 $\text{CDGI}(D)$ のアルゴリズムを完成させるためには、 $\text{RAA-RA}(D^*)$ を解くアルゴリズムを開発する必要がある。本節では、サイズが opt_D である D^* -根つきコネクタが存在するかの判定、つまりアルゴリズム CR のステップ 4 と 5 を WMI に帰着できることを示す。我々の証明は、 S が一つの要素から成る場合の $\text{RAA-RA}(D^*)$ に対する、Frank [3] によって提案されたアルゴリズムを元とし、このアルゴリズムを定理 2.2 を用いて $|S| > 1$ の場合へと拡張する。まず、 D の各辺に opt_D 本の平行辺を加えたものを D_+ と定義する。そして、サイズが opt_D である D^* -根つきコネクタを、 $\text{WMI}(D_+^*)$ に対するアルゴリズムを用いて求める。サイズが opt_D である D^* -根つきコネクタに含まれる、ある辺 $e \in A$ の平行辺は高々 opt_D であるので、サイズが opt_D である D^* -根つきコネクタを求めるためには、 A の各辺に opt_D 本の平行辺を加えれば十分である。

D_+ と D_+^* の辺集合をそれぞれ A_+ と A_+^* としよう。このとき、もし $I \subseteq A_+^*$ が完全 D_+^* -交差であるならば、 I は $U(D_+^*)$ の基であることと (3) と (1) より、

$$|I| = \sum_{v \in V} f(R_{D_+}(v)) = \sum_{v \in V} f(R_D(v)). \quad (8)$$

が成り立つ。さらに、重み関数 $w: A_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ を

$$w(e) = \begin{cases} 0, & \text{if } e \in A^*, \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (9)$$

と定義する。このとき、以下の補題は $\text{RAA-RA}(D^*)$ と $\text{WMI}(D_+^*)$ の関係を示している。

補題 3.4 (S, f) -適格な有向グラフ $D = (V, A, S, f)$ が与えられたとき、サイズが opt_D である D^* -根つきコネクタが存在する必要十分条件は、重みが opt_D である完全 D_+^* -交差が存在することである。

補題 3.4 を示すため以下の補題が必要となる。

補題 3.5 有向グラフ $D = (V, A, S, f)$ と A に平行な B が与えられたとき、(i) もし完全 D^* -交差 I が存在するならば、 I は完全 $(D+B)^*$ -交差である。(ii) もし

$I \subseteq A^*$ を満たす完全 $(D+B)^*$ -交差 I が存在するならば、 I は完全 D^* -交差である。

補題 3.6 (S, f) -適格な有向グラフ $D = (V, A, S, f)$ に対する D_+^* と (9) で定義される重み関数 $w: A_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ が与えられたとき、もし完全 D_+^* -交差 I が存在するならば、 $w(I) \geq \text{opt}_D$ が成り立つ。さらに $w(I) = \text{opt}_D$ となる必要十分条件は $A^* \subseteq I$ が成り立つことである。

補題 3.4 の証明. 必要性： サイズが opt_D である D^* -根つきコネクタが存在すると仮定する。 D_+ は各 $e \in A$ に対して opt_D 本の平行辺を持っているので、 $B \subseteq A_+ \setminus A$ と $|B| = \text{opt}_D$ を満たす D^* -根つきコネクタが存在する。このような D^* -根つきコネクタを固定しよう。補題 3.5 の (i) より、必要性を証明するためには、 $w(I) = \text{opt}_D$ を満たす完全 $(D+B)^*$ -交差 I が存在することを示せばよい。系 2.4 より完全 $(D+B)^*$ -交差 I が存在するので、 $w(I) = \text{opt}_D$ が成り立つことを示そう。 $(D+B)^*$ の辺集合は $A^* \cup B$ であり、 I は完全 $(D+B)^*$ -交差であるので、 $I \subseteq A^* \cup B$ が成り立つ。よって、(9) より $w(A^* \cup B) = |B| = \text{opt}_D$ が得られるため、 $w(I) \leq w(A^* \cup B) = \text{opt}_D$ が成り立つ。従って、補題 3.6 より $w(I) = \text{opt}_D$ が成り立ち必要性が示された。

十分性： $w(I) = \text{opt}_D$ を満たす完全 D_+^* -交差 I が存在すると仮定する。 B を $I \setminus A^*$ と定義し、ここからは B がサイズが opt_D である D^* -根つきコネクタであることを示す。まず、 B が D^* -根つきコネクタであることを補題 3.5 の (ii) と系 2.4 を用いて示す。補題 3.5 の中の B と D を、それぞれ $A_+ \setminus (A \cup B)$ と $D+B$ とする。 $B \subseteq A_+$ より $(D+B) + (A_+ \setminus (A \cup B)) = D_+$ が成り立つことと、 $A_+ \setminus (A \cup B)$ が $A \cup B$ に平行であることに注意する。 $B = I \setminus A^*$ より、 $I \subseteq A^* \cup B$ が成り立つ。よって、 I は完全 D_+^* -交差であることと補題 3.5 の (ii) より I は完全 $(D+B)^*$ -交差である。以上より、系 2.4 によって、 B が D^* -根つきコネクタであることが示される。

最後に $|B| = \text{opt}_D$ を示そう。補題 3.6 と $w(I) = \text{opt}_D$ より、 $A^* \subseteq I$ が成り立つ。よって、 $B = I \setminus A^*$ と (8) より、 $|B| = |I \setminus A^*| = |I| - |A^*| = \sum_{v \in V} f(R_D(v)) - (|A| + f(S))$ が成り立ち、この等式と (4) より十分性が示された。 □

補題 3.4 の十分性の証明より、もし $w(I) = \text{opt}_D$ を満たす完全 D_+^* -交差 I を求めることができたなら、

$|B| = \text{opt}_D$ を満たす D^* -根つきコネクタ B を $B = I \setminus A^*$ とすることで得ることができる。さらに、補題 3.6 より $\text{WMI}(D_+^*)$ の最適値は opt_D 以上であるので、重さが opt_D である完全 D_+^* -交差はもし存在するならば $\text{WMI}(D_+^*)$ に対するアルゴリズムによって求めることができる。以上の議論より、サイズが opt_D である D^* -根つきコネクタを求めるアルゴリズム RW はアルゴリズム 2 のようになる。

アルゴリズム 2 アルゴリズム RW

入力 (S, f) -適格な有向グラフ $D = (V, A, S, f)$ の D^*

出力 もし存在するならば、サイズが opt_D の D^* -根つきコネクタ

- 1: (9) で定義される重み関数 w に対する $\text{WMI}(D_+^*)$ の最適解 I を求める
 - 2: if $\text{WMI}(D_+^*)$ の実行可能解がない、または $w(I) > \text{opt}_D$ then
 - 3: 停止 (サイズが opt_D の D^* -根つきコネクタはない)
 - 4: end if
 - 5: return $I \setminus A^*$
-

補題 3.7 (S, f) -適格な有向グラフ $D = (V, A, f, S)$ の D^* が与えられたとき、アルゴリズム RW はもし存在するならばサイズが opt_D の D^* -根つきコネクタを $O(\gamma_2 + M|A|)$ 時間で求める。ただし、 γ_2 は $\text{WMI}(D_+^*)$ を解くのに必要な時間、 $M = \sum_{v \in V} f(R_D(v))$ とする。

3.3 CDGI に対するアルゴリズム

ここで、 $\text{CDGI}(D)$ に対するアルゴリズム **Covering** の説明をする。アルゴリズム **Covering** はアルゴリズム CR のステップ 4, 5, 6 をアルゴリズム RW に置き換えたものである。

定理 3.8 有向グラフ $D = (V, A, S, f)$ が与えられたとき、アルゴリズム **Covering** はもし存在するならば A を被覆する D -正規内向木集合を $O(M^7|A|^6)$ 時間で求める。ただし、 $M = \sum_{v \in V} f(R_D(v))$ とする。

証明. アルゴリズムの正当性は補題 3.3 と 3.7 より示されるので計算時間を考えよう。補題 3.3 と 3.7 より、 $\text{WMI}(D_+^*)$ を解くのに必要な時間を解析すれ

ばよい。 D がもし (S, f) -適格であるなら、 $|A^*| = \sum_{v \in V} |\delta_{D^*}(v)| \leq \sum_{v \in V} f(R_D(v)) = M$ が成り立つ。 よって、 D_+^* は各 $e \in A$ に対して opt_D 本の平行辺を持っているので、 $|A_+^*| = |A^*| + \sum_{e \in A} \text{opt}_D \leq M + M|A|$ が成り立つ。 つまり、 $|A_+^*| = O(M|A|)$ となり、 補題 2.1 より、 $\text{WMI}(D^*)$ を $O(M^7|A|^6)$ 時間で解くことができる。 以上の議論と補題 3.3 と 3.7 より定理が得られる。 \square

4 閉路を持たない場合

本節では、 有向グラフ $D = (V, A, S, f)$ が閉路を持たない場合、 A を被覆する D -正規内向木集合が一般的な場合よりも効率的に求めることができることを示す。 そのために、 以下の定理が必要となる。

定理 4.1 非閉路有向グラフ $D = (V, A, S, f)$ が与えられたとき、 A を被覆する D -正規内向木集合が存在する必要十分条件は、 全ての $v \in V$ と $B \subseteq \delta_D(v)$ に対して以下の式が成り立つことである。

$$|B| \leq f(R_D(\partial^+(B))). \quad (10)$$

証明の概要。 まず、 各 $v \in V$ に対して、 証明に必要な無向二部グラフ $G_v = (X_v \cup Y_v, E_v)$ を定義する。 $X_v = \{x_e : e \in \delta_D(v)\}$ と $Y_v = \{y_{i,j} : s_i \in R_D(v), j = 1, \dots, f(s_i)\}$ とする。 さらに、 $x_e \in X_v$ と $y_{i,j} \in Y_v$ は s_i が $\partial^+(e)$ から到達可能なとき、 そのときのみ E_v に含まれる辺で結ばれるとする。 (10) は全ての $v \in V$ に対して、 X_v を飽和する G_v のマッチングが存在する必要十分条件であることが知られている ([11] の定理 16.7 参照)。 つまり、 A を被覆する D -正規内向木集合が存在する必要十分条件が、 全ての $v \in V$ に対して X_v を飽和する G_v のマッチングが存在することであることを証明すればよい。 \square

定理 4.1 より D が閉路を持たないときは、 3 節で提案したアルゴリズムを用いることなく、 $O(|V|)$ 個の一連の二部グラフのマッチングを求めれば、 A を被覆する D -正規内向木集合を求めることができることがわかる。 二部グラフの最大マッチングアルゴリズムに関しては、 [6] などを参照。

系 4.2 非閉路融合グラフ $D = (V, A, S, f)$ が与えられたとき、 もし存在するならば、 A を被覆する D -正

規内向木集合を $O(\text{match}(M + |A|, M|A|))$ 時間で求めることができる。 ただし、 $\text{match}(n, m)$ は、 点数 n 、 辺数 m である二部グラフの最大マッチングを求めるのに必要な時間、 $M = \sum_{v \in V} f(R_D(v))$ とする。

謝辞： [3] の存在を教えてくださいました Prof. Tibor Jordán, 有益なコメントを下された谷川眞一氏に感謝致します。 本論文の一部は、 文部科学省科学研究費補助金 (特定領域: 新世代の計算限界), 日本学術振興会科学研究費補助金特別研究員奨励費の研究助成によるものである。

参考文献

- [1] E. M. Arkin, R. Hassin, and A. Levin. Approximations for minimum and min-max vehicle routing problems. *J. Algorithms*, 59(1):1–18, 2006.
- [2] G. Even, N. Garg, J. Könemann, R. Ravi, and A. Sinha. Min-max tree covers of graphs. *Oper. Res. Lett.*, 32(4):309–315, 2004.
- [3] A. Frank. Rooted k -connections in digraphs. *Discrete Applied Mathematics*. (to appear).
- [4] A. Frank. Covering branchings. *Acta Scientiarum Mathematicarum [Szeged]*, 41:77–81, 1979.
- [5] A. Frank. A weighted matroid intersection algorithm. *J. Algorithms*, 2(4):328–336, 1981.
- [6] J. E. Hopcroft and R. M. Karp. An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs. *SIAM J. Comput.*, 2(4):225–231, 1973.
- [7] T. Jordan. Two \mathcal{NP} -complete augmentation problems. Technical Report 8, Department of Mathematics and Computer Science, Odense University, 1997.
- [8] N. Kamiyama, N. Katoh, and A. Takizawa. Arc-disjoint in-trees in directed graphs. In *Proc. the nineteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA2008)*, pages 518–526, 2008.
- [9] H. Nagamochi and K. Okada. Approximating the minmax rooted-tree cover in a tree. *Inf. Process. Lett.*, 104(5):173–178, 2007.
- [10] J. G. Oxley. *Matroid theory*. Oxford University Press, 1992.
- [11] A. Schrijver. *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency (Algorithms and Combinatorics)*. Springer-Verlag, 2003.
- [12] K. Vidyasankar. Covering the edge set of a directed graph with trees. *Discrete Mathematics*, 24:79–85, 1978.