ソフトウェア基礎論 20－2
（1987. 2. 13）

Ｐｒｏｌｏｇによる定理証明の一方法

松浦 聡　中村 克彦
（東京電機大学理工学部）

Prologを用いて述語論理の定理証明を行う場合，Prologが一般の節ではなくホーン節を基礎としていることが問題となる。この報告では，副目標として含意を含んだ論理式が書けるように拡張したホーン節を用いて定理証明を行う方法を提案する。この報告では，このように拡張した目標（拡張目標）を含む節を用いることによって，つぎのふたつが成立することが示される。

(1)一般の節集合と等価な論理式を拡張した節の集合に変換できる。

(2)健全(sound)で完全(complete)な述語論理の証明手続きを構成することができる。

この証明手続きは assert 機能を用いて Prolog 上にインプリメントできる。

A Theorem-Proving Method in Prolog

Satoshi Matsuura, Katsuhiko Nakamure

School of Science and Engineering, Tokyo Denki University
Hatoyama-machi, Saitama-ken 350-03, Japan

A problem for proving theorems of predicate logic using a Prolog system is that Prolog is based on Horn clauses and not on the general clauses. This report presents a theorem-proving method in that the Horn clauses are extended to have the expressions with implication operators as the subgoals. The following two propositions are shown.

(1) Any set of the general clauses can be transformed into that of the extended Horn clauses.

(2) The proof procedure base on the method is sound and complete.

The procedure can be implemented in the Prolog systems by using the assert function.

1．はじめに

Prologを用いて一般の述語論理の定理証明を行うには，つぎのような問題があることが知られている。

(1)Prologでは一般の節ではなくホーン節が基礎となっている。

(2)出現検査(occur check)[3]を行っていない。

(3)多くのシステムでは深さ優先探索を採用しており探索の完全性をもっていない。

この論文では(1)の問題を取り扱っている。実際の Prolog では not述語の導入によって，この問題の制限を緩めている。Lloyd[2] はホーン節の目標として一階の述語論理式を含むような節を not を用いて Prolog の節に書き換える方法を示しているが，not述語には変数を含む一般の原子式を引数にできないので実際の定理証明に用いるには十分ではない。われわれは Prolog に拡張目標(Extended Goal)と呼ばれる機能をつけて定理証明を行う方法を研究している。拡張目標は Prolog の副目標として含意を含んだ論理式が書けるようにしたものであり，公理系を表すProlog のデータベースに新しい節を追加する機能を用いることによって Prolog の節に変換することができる。

2．拡張確定節とＳＬＥＤ導出法

［定義１］　拡張目標(Extended Goal)とは

B <- $B_1,\cdots,B_m$ (m≧１)

の形式の論理式である。ここで，$B,B_1,\cdots,B_m$ は原子式である。Bを拡張目標の頭部，B_i を拡張目標の副目標という。拡張確定節(Extended Definite Clause)とは

A :- $D_1,\cdots,D_n$.（n≧0）

の形式の論理式である。ここで A は原子式，$D_1,\cdots,D_n$は原子式または拡張目標である。A を拡張確定節の頭部，$D_1,\cdots,D_n$ を拡張目標の副目標という。■

後にわれわれは偽(false)の意味をもつ特別な述語 inconsistent を用いる。

［拡張確定節の例］

```
p(X) :- (q(X) <- r(X)),s(X).
inconsistent :- p(X),notp(X).
```

つぎに拡張確定節のための導出法（ＳＬＥＤ導出法）を定義する。ＳＬＥＤ導出法はＳＬＤ導出法と同じように計算規則Ｒと拡張確定節Ｐ，目標節Ｇに対して定義される。

［定義２］　P_0を拡張確定節の集合，Ｒをある計算規則とする。ＳＬＥＤ導出法 (Selected Linear resolution for Extended Definite clauses) はつぎの(1)～(3)を満足する目標系列の列 $G_0,\cdots,G_N$ および拡張確定節集合の列 $P_0,\cdots,P_{N-1}$ を求める証明手続きである。

(1) G_0＝inconsistent

(2) G_N＝□（空系列）

(3) 目標の系列$G_i=(B_1,\cdots,B_n)$であり，計算規則Ｒによって B_k が選択されたと仮定する。

(3-1) B_k が原子式のとき

P_iのある節 B :- $C_1,\cdots,C_m$ の頭部 B と B_k が統合可能(unifiable)である。

$P_{i+1}=P_i$,

$G_{i+1}=(B_1,\cdots,B_{k-1},C_1,\cdots,C_m,B_{k+1},\cdots,B_n)\theta$

ここで，θは B と B_k の mgu(most general unifier)[1]である。

(3-2) B_k が拡張目標のとき

B_k = (B <- $C_1,\cdots,C_m$) と仮定する。P_{i+1}および，G_{i+1}はつぎの式で与えられる。

$P_{i+1}=P_i\cup$

$\{C_s$:- $B_1,\cdots,B_{k-1},B_{k+1},\cdots,B_n$. | (s=1,･･･,m)}

$$G_{i+1}=\begin{cases}\text{(a) inconsistent — B=inconsistentのとき}\\ \text{(b) } B_1,\cdots,B_{k-1},B,B_{k+1},\cdots,B_n. \text{ — その他}\end{cases}$$

■

拡張確定節

A :- $D_1,\cdots,D_{i-1}$,(B <- $C_1,\cdots,C_k$),$D_{i+1},\cdots,D_n$.

に対して拡張目標の “<-” を含意として展開するとつぎの節の集合と等価である。

$$\left\{\begin{array}{l}A \text{ :- } D_1,\cdots,D_{i-1},B,D_{i+1},\cdots,D_n.\\ A;C_1 \text{ :- } D_1,\cdots,D_{i-1},D_{i+1},\cdots,D_n.\\ \qquad\cdots\\ A;C_k \text{ :- } D_1,\cdots,D_{i-1},D_{i+1},\cdots,D_n.\end{array}\right\}$$

また，述語 inconsistent を偽(false)として仮定すると，つぎの(1),(2)のように展開することができる。

(1)　inconsistent :- $B_1,\cdots,B_n$.

＝　{:- $B_1,\cdots,B_n$.}

(2)　A :- $D_1,\cdots,D_{i-1}$,

(inconsistent<-$C_1,\cdots,C_k$),$D_{i+1},\cdots,D_n$.

$$=\left\{\begin{array}{l}A;C_1 \text{ :- } D_1,\cdots,D_{i-1},D_{i+1},\cdots,D_n.\\ \qquad\cdots\\ A;C_k \text{ :- } D_1,\cdots,D_{i-1},D_{i+1},\cdots,D_n.\end{array}\right\}$$

［定義３］　拡張確定節集合Ｐが充足不可能であるとは，Ｐから上記のように展開して得られた節集合Ｓが充足不可能なることである。■

3．準ホーン節と負導出法

［定義４］　準ホーン節とは，正リテラルの数が高々２個の節をいう。すなわち，

$:- B_1,\cdots,B_n.$ (n≧0)

$A :- B_1,\cdots,B_n.$ (n≧0)

$A_1;A_2 :- B_1,\cdots,B_n.$ (n≧0)

のいずれかの形式の節である。 ■

［手続き１］ 節から準ホーン節への変換

(1) ホーン節はそのまま。

(2) $A_1;\cdots;A_m :- B_1,\cdots,B_n.$ はm個の準ホーン節，

$A_1 :- B_1,\cdots,B_n,P_2,\cdots,P_m.$

$A_2;P_2.$

$\cdots$

$A_m;P_m.$

に変換する。ここで P_i は他には現れない新しい述語名と A_i に現れるすべての変数を引数にもつ。 ■

この変換によって充足不可能性は変化しない。

［定義５］ 負導出法(negative resolution)とは導出を行う節（親節）のうちのどちらかが必ず負節である導出法である。負導出法による演繹を負演繹(negative deduction)，負導出法による反駁を負反駁(negative refutation)という。 ■

［定義６］ つぎの条件を満たす節の組$\{E_1,\cdots,E_m,N\}$を負衝突(negative clash)と呼ぶ。

(1) N は負節である。

(2) $E_1,\cdots,E_{m-1}$ は確定節である。

(3) $R_1=N$ とすると，すべての $i=1,\cdots,m$ に対して R_i と E_i の導出形 R_{i+1} が存在する。

R_{m+1} を（負導出法の）負導出形(negative resolvent)という。 ■

$R_1,\cdots,R_m$ は負節である。負導出法は負節と入力節または負導出形を使って導出を行う導出法である。

［定理１］ 負導出法は健全(sound)である。

［証明］

負導出法は導出原理[1]にもとづいているので明らか。

■

［補題２］ Sを充足不可能な基礎節(ground clause)の集合とするとSの負反駁が存在する。

［証明］

Sに現れる原子式の個数 i に関する帰納法で証明する。

(1) i＝1のとき

Sに現れる原子式をQとするとS＝{Q，～Q}であるから，このときは負反駁が存在する。

(2) i≦nのときこの補題が成立すると仮定する。

i＝n＋1のとき，つぎのふたつの場合を調べればよい。

case１ Sが正単位節を含むとき

Lをその正単位節とする。SからLを含む節をすべて消去し，残りの節から～Lを取り去ることによって得られる集合をS'とする。Davis と Putnum の1リテラル規則[1]よりS'は充足不可能であり，S'に含まれる原子式の数はn以下なので，帰納法の仮定よりS'の負反駁D'が存在する。このD'を用いてつぎのようにSの負反駁Dを構成することができる。まず，D'に含まれる各々の負衝突 $\{E_1',\cdots,E_m',N'\}$ について考える。もし N' がSの節 N から～Lを消去して得られた節ならば，$\{E_1',\cdots,E_m',N'\}$ を $\{L,E_1',\cdots,E_m',N\}$ で置き換える。$\{L,E_1',\cdots,E_m',N\}$ は負衝突になっている。つぎに，ある E_i' がSの節 E_i から～Lを消去して得られた節ならば $\{E_1',\cdots,E_i',\cdots,E_m',N'\}$ を $\{E_1',\cdots,E_{i-1}',E_i,L,E_{i+1}',\cdots,E_m',N'\}$ に置き換える。$\{E_1',\cdots,E_{i-1}',E_i,L,E_{i+1}',\cdots,E_m',N'\}$ は負衝突になっている。このふたつの操作によって，Sの負反駁を得ることができる（図１）。

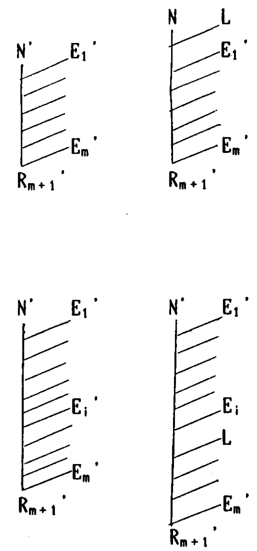


図１ 負導出法の完全性

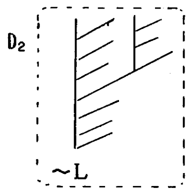
case２ Sが正単位節を含まないとき

Sに現れる原子式をLとする。Sから～Lを含む節をすべて消去し，残りの節からLを取り去ることによって得られる集合をS_1'とする。Davis と Putnum の1リテラル規則[1]よりS_1'は充足不可能であり，S_1'に含まれる原子式の数はn以下なので，帰納法の仮定よりS_1'の負反駁D_1'が存在する。

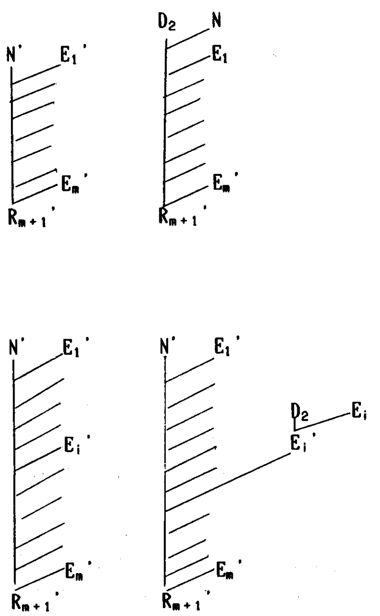
同様に，SからLを含む節をすべて消去し，残りの節から ～L を取り去ることによって得られる集合をS_2'とする。S_2'は充足不可能であり，S_2'の負反駁D_2'が存在する。リテラル ～L をもとの節に戻すことによってD_2'から得られる演繹をD_2とする。D_2は□か ～L を導出する負演繹となっている。□を導出すればSの負反駁をD_2とすればよいので ～L を導出すると仮定する。

D_1'の負衝突 $\{E_1',\cdots,E_m',N'\}$ について考える。N'がSの節 N からLを消去して得られた節ならばD_2と N から N' を導出する負演繹を構成する（図2）。

つぎに，E_i' がSの節 E_i からLを消去して得られた節ならばD_2と E_i から E_i' を導出する負演繹を構成する（図3）。このふたつの操作によってSの負反駁を得ることができる。 ■



D_2は～Lを導く負演繹



<u>図2　負導出法の完全性</u>

［定理3］　Sを充足不可能な節集合とするとSの負反駁が存在する。

［証明］

持ち上げ補題(Lifting Lemma)[1]と補題2より明らか。 ■

準ホーン節はつぎの手続き2によって拡張確定節に変換される。

［手続き2］　<u>準ホーン節から拡張確定節への変換</u>

(1) 確定節はそのまま。

(2) 負節 :- $B_1,\cdots,B_n$.はつぎのふたつの節に変換する。

inconsistent :- $B_1,\cdots,B_n$.

:- inconsistent.

(3) A;B :- $C_1,\cdots,C_n$.（$n\geqq 0$） はつぎのふたつの拡張確定節に変換する。

A :- (inconsistent <- B),$C_1,\cdots,C_n$.

B :- (inconsistent <- A),$C_1,\cdots,C_n$. ■

変換された拡張確定節の集合は :- inconsistent. 以外の負節を含まない。

［補題4］　Sを充足不可能な準ホーン節集合，PをSから手続き2によって変換された拡張確定節集合とするとき，ある計算規則RによるPのSLED反駁が存在する。

［証明］

Sは充足不可能なのでSの負反駁D'が存在する。D'からPのSLED反駁Dをつぎのように構成することができる。まず，D'中の負衝突 $\{E_1',\cdots,E_m',N'\}$ について考える。E_m' が確定節のときは $\{E_1',\cdots,E_m',N'\}$ はD中の負衝突になる。E_m' が確定節でないとき，すなわち，図3に示す負演繹木が存在するとき，

:- $G_1,\cdots,G_{i-1}$,A,$G_{i+1},\cdots,G_n$.

A;B :- $C_1,\cdots,C_n$.

B :- $G_1,\cdots,G_{i-1},C_1,\cdots,C_n,G_{i+1},\cdots,G_n$.

<u>図3　負導出法の演繹木</u>

各E_i'をE_iと置き($i = 1,\cdots,m-1$),

Em = (inconsistent <- B),$C_1,\cdots,C_n$.,

N = N'

とすると $\{E_1,\cdots,E_m,N\}$ はD中の負衝突となっている。このとき，

R_{m+1} = $G_1,\cdots,G_{i-1}$,(inconsistent <- B),$C_1,\cdots,C_n,G_1,\cdots,G_k$.

となっているので計算規則Rが (inconsistent <- B)

を選択すればつぎのＳＬＥＤ演繹木が存在する。

$:- G_1,\cdots,G_{i-1},A,G_{i+1},\cdots,G_n.$

$A :- (\mathrm{inconsistent} <- B),C_1,\cdots,C_n.$

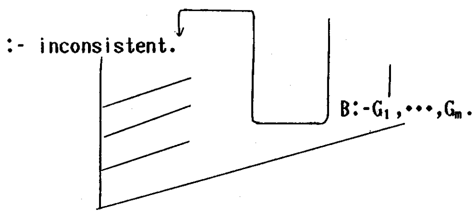
$:- G_1,\cdots,G_{i-1},(\mathrm{inconsistent} <- B),C_1,\cdots,C_n,$
$G_{i+1},\cdots,G_n.$

$B :- G_1,\cdots,G_{i-1},C_1,\cdots,C_n,G_{i+1},\cdots,G_n.$を公理系に加える。

:- inconsistent.

図４　ＳＬＥＤ導出法の演繹木

つぎに，:- inconsistent. を新しい目標とする意味について考える。S'は :- inconsistent. 以外の負節を含まないので。したがって，すべてのD'中の負衝突 $\{E_1',\cdots,E_m',N'\}$ において N' = :- inconsistent. である。 :- inconsistent を新しい目標にすれば新しい負演繹が行われる。このとき公理系に加えた節を側節とするような負演繹を行えばよい（図５）。



$B :- G_1,\cdots,G_m.$を公理系に加えた後に新しい目標を :- inconsistent.にする。

図５　inconsistentの意味

以上の操作を繰り返すことによってせばＰのＳＬＥＤ反駁を構成することができる。　■

［定義７］　無制約ＳＬＥＤ導出法とはＳＬＥＤ導出法において統合(unification)に使われる代入として，mgu 以外の任意のunifierをも許したものである。無制約ＳＬＥＤ導出法による演繹を無制約ＳＬＥＤ演繹，反駁を無制約ＳＬＥＤ反駁という。　■

［定理５］　拡張確定節集合Ｐが充足不可能であることと，ある計算規則ＲによるＰの無制約ＳＬＥＤ反駁が存在することは同値である。

［証明］

（＝＞）　ＳＬＥＤ反駁は無制約ＳＬＥＤ反駁なので明らか。

（＜＝）　持ち上げ補題[1]より，ある計算規則Ｒによる無制約ＳＬＥＤ反駁が存在するならばＳＬＥＤ反駁が存在する。よってＰは充足不可能。　■

［補題６］　ある節集合に対して計算規則の異なるふたつのＳＬＥＤ反駁を図６と図７に示す。図６，図７の節 C_1，C_2 は確定節である。互いに図６，図７において R_1 と R_2 は変形(variant)[3]の関係にある。

［証明］

つぎの関係が成立する。

$$A_i\theta_1 = A_i'\theta_1$$

$$A_i\theta_1\theta_2 = A_i'\theta_1\theta_2 \qquad (1)$$

θ_1 は A_i' の変数に代入を行わないから

$$A_i\theta_1\theta_2 = A_i'\theta_2 = A_i'\theta_1\theta_2$$

A_i と A_i' の mgu は θ_1' であるから

$$\exists\gamma_1 \ \ \mathrm{s.t}\ \ \theta_1\theta_2 = \theta_1'\gamma_1 \qquad (2)$$

さらに（１）と（２）より，

$$A_i\theta_1'\gamma_1 = A_i'\theta_1'\gamma_1$$

$A_i\theta_1'$ と $A_i'\theta_1'$ $(=A_i')$ の mgu は θ_2' であるから

$$\exists\gamma \ \ \mathrm{s.t}\ \ \gamma_1 = \theta_2'\gamma$$

したがって $\theta_1\theta_2 = \theta_1'\theta_2'\gamma$

同様に，

$$\exists\gamma' \ \ \mathrm{s.t}\ \ \theta_1'\theta_2' = \theta_1\theta_2\gamma'$$

よって R_1 と R_2 は互いに変形(variant)の関係にある。　■

ある節集合に対して計算規則の異なるふたつのＳＬＥＤ反駁を図８と図９に示す。

［補題７］　図８の C_1 は確定節，図９の節 C_2 は inconsistentを含む拡張確定節である。

図８，図９において R_1 と R_2 は変形(variant)[3]の関係にある。

［証明］　省略　■

ある節集合に対して計算規則の異なるふたつのＳＬＥＤ反駁を図１０と図１１に示す。

［補題８］　図１０，図１１の C_1，C_2 はinconsistentを含む拡張確定節である。

図１０，図１１において R_1 と R_2 は変形(variant)[3]の関係にある。

［証明］　省略　■

$:-\ A_1,\cdots,A_n.$ $\quad C_1 = A_i'\ :-\ B_1,\cdots,B_m.$

$:-\ (A_1,\cdots,A_{i-1},B_1,\cdots,B_m,A_{i+1},\cdots,A_n)\theta_1.$ $\quad C_2 = A_l'\ :-\ D_1,\cdots,D_k.$

$R_1 =\ :-\ (A_1,\cdots,A_{i-1},B_1,\cdots,B_m,A_{i+1},\cdots,A_{l-1},D_1,\cdots,D_k,A_{l+1},\cdots,A_n)\theta_1\theta_2.$

図6　ＳＬＥＤ演繹木(1)

$:-\ A_1,\cdots,A_n.$ $\quad C_2 = A_l'\ :-\ D_1,\cdots,D_k.$

$:-\ (A_1,\cdots,A_{l-1},D_1,\cdots,D_m,A_{l+1},\cdots,A_n)\theta_1'.$ $\quad C_1 = A_i'\ :-\ B_1,\cdots,B_m.$

$R_2 =\ :-\ (A_1,\cdots,A_{i-1},B_1,\cdots,B_m,A_{i+1},\cdots,A_{l-1},D_1,\cdots,D_k,A_{l+1},\cdots,A_n)\theta_1'\theta_2'.$

図7　ＳＬＥＤ演繹木(2)

$:-\ A_1,\cdots,A_n.$ $\quad C_1 = A_i'\ :-\ B_1,\cdots,B_m.$

$(:-\ A_1,\cdots,A_{i-1},B_1,\cdots,B_m,A_{i+1},\cdots,A_n)\theta_1.$ $\quad C_2 = A_l'\ :-\ (\text{inconsistent} <- D').$

$:-\ G_1,\cdots,G_r.$ $\quad (D'\ :-\ A_1,\cdots,A_{i-1},B_1,\cdots,B_m,A_{l+1},\cdots,A_n)\theta_1\theta_2.$

$R_1 =\ :-\ (G_1,\cdots,G_{k-1},A_1,\cdots,A_{i-1},B_1,\cdots,B_m,A_{i+1},\cdots,A_{l-1},A_{l+1},\cdots,A_n,G_{k+1},\cdots,G_r)\theta_1\theta_2\theta_3.$

図8　ＳＬＥＤ演繹木(1)

$:-\ A_1,\cdots,A_n.$ $\quad C_2 = A_l'\ :-\ (\text{inconsistent} <- D').$

$:-\ G_1,\cdots,G_r.$ $\quad D_1'\ :-\ A_1,\cdots,A_{l-1},A_{l+1},\cdots,A_n)\theta_1'.$

$:-\ (G_1,\cdots,G_{k-1},A_1,\cdots,A_{l-1},A_{l+1},\cdots,A_n,G_{k+1},\cdots,G_r)\theta_1'\theta_2'.$ $\quad C_1 = A_i'\ :-\ B_1,\cdots,B_m.$

$R_2 =\ :-\ (G_1,\cdots,G_{k-1},A_1,\cdots,A_{i-1},B_1,\cdots,B_m,A_{i+1},\cdots,A_{l-1},A_{l+1},\cdots,A_n,G_{k+1},\cdots,G_r)\theta_1'\theta_2'\theta_3'.$

図9　ＳＬＥＤ演繹木(2)

$:\!-\ A_1,\cdots,A_n.\quad C_1 = A_i'\ :\!-\ (\mathrm{inconsistent} \leftarrow B').$

$:\!-\ B_1,\cdots,B_m.\qquad (B\ :\!-\ A_1,\cdots,A_{i-1},A_{i+1},\cdots,A_n)\theta_1.$

$:\!-\ (B_1,\cdots,B_{k-1},A_1,\cdots,A_{i-1},A_{i+1},\cdots,A_n,B_{k+1},\cdots B_m)\theta_1\theta_2.\quad C_2 = A_l'\ :\!-\ (\mathrm{inconsistent} \leftarrow D').$

$:\!-\ D_1,\cdots,D_r.\qquad (D'\ :\!-\ B_1,\cdots,B_{k-1},A_1,\cdots,A_{i-1},A_{i+1},\cdots,A_{l-1},A_{l+1},\cdots,A_n,B_{k+1},\cdots,B_m)\theta_1\theta_2\theta_3.$

$R_1 =\ :\!-\ (D_1,\cdots,D_{s-1},B_1,\cdots,B_{k-1},A_1,\cdots,A_{i-1},A_{i+1},\cdots,A_{l-1},A_{l+1},\cdots,A_n,B_{k+1},\cdots,B_m,$
$D_{s+1},\cdots,D_r)\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4.$

図10　ＳＬＥＤ演繹木(1)

$:\!-\ A_1,\cdots,A_n.\quad C_2 = A_l'\ :\!-\ (\mathrm{inconsistent} \leftarrow D').$

$:\!-\ D_1,\cdots,D_r.\qquad (D\ :\!-\ A_1,\cdots,A_{l-1},A_{l+1},\cdots,A_n)\theta_1'.$

$:\!-\ (D_1,\cdots,D_{s-1},A_1,\cdots,A_{l-1},A_{l+1},\cdots,A_n,D_{s+1},\cdots D_r)\theta_1'\theta_2'.$
$C_1 = A_i'\ :\!-\ (\mathrm{inconsistent} \leftarrow B').$

$(B'\ :\!-\ D_1,\cdots,D_{s-1},A_1,\cdots,A_{i-1},A_{i+1},\cdots,A_{l-1},A_{l+1},\cdots,A_n,D_{s+1},\cdots,D_r)\theta_1'\theta_2'\theta_3'.$
$:\!-\ B_1,\cdots,B_r.$

$R_2 =\ :\!-\ (B_1,\cdots,B_{k-1},D_1,\cdots,D_{s-1},A_1,\cdots,A_{i-1},A_{i+1},\cdots,A_{l-1},A_{l+1},\cdots,A_n,D_{s+1},\cdots,D_r,$
$B_{k+1},\cdots,B_m)\theta_1'\theta_2'\theta_3'\theta_4'.$

図11　ＳＬＥＤ演繹木(2)

［定理９］　Ｓを充足不可能な準ホーン節集合とし，ＰをＳから手続き２によって変換された拡張確定節とする。任意の計算規則ＲによるＰのＳＬＥＤ反駁が存在する。

［証明］

補題４よりある計算規則ＲによるＳＬＥＤ反駁が存在する。補題６，７，８より任意の計算規則によるＳＬＥＤ反駁が存在する。 ■

残念ながら，定理９において「手続き２よって変換された拡張確定節」という条件は必要である。充足不可能な準ホーン節集合でも任意の計算規則によるＳＬＥＤ反駁が存在するとは限らない。

一方，定理９より左導出によるＳＬＥＤ反駁が存在することがわかる。しかし，左導出が最適の計算規則であるわけではない。

［定理１０］　ＳＬＥＤ導出法の定義（定義２(3-2 b)）においてC_sが基礎原子式(ground atomic formula)ならば公理系に加える節を

$C_s\ :\!-\ B_1,\cdots,B_{k-1},B_{k+1},\cdots,B_n.$

のかわりに節 C_s. としてもこの導出法は健全(sound)である。

[証明]

SLED導出法では

C_s :- $B_1, \cdots, B_{k-1}, B_{k+1}, \cdots, B_n$. (1)

を公理系に加えて

:- $B_1, \cdots, B_{k-1}, B, B_{k+1}, \cdots, B_n$. (2)

を新しい目標とする。

この後，導出において節（1）を用いるときは節（2）は

:- $(B_1, \cdots, B_{k-1}, A_1, C, A_2, B_{k+1}, \cdots, B_n)\theta$

となっている。ここで$C\theta$とC_sの mgu をγとすると

:- $(B_1\theta, \cdots, B_{k-1}\theta, A_1\theta, B_1, \cdots, B_{k-1}, B_{k+1}, \cdots, B_n, A_2\theta, B_{k+1}\theta, \cdots, B_n\theta)\gamma$. (3)

が新しい目標になる。C_sは基礎原子式なのでγは$B_1, \cdots, B_{k-1}, B_{k+1}, \cdots, B_n$の変数に代入を行わない。よって節（3）はつぎの節に等しい。

:- $B_1\theta\gamma, B_{k-1}\theta\gamma, A_1\theta\gamma, B_1, \cdots, B_{k-1}$,
$B_{k+1}, \cdots, B_n, A_2\theta\gamma, B_{k+1}\theta\gamma, \cdots, B_n\theta\gamma$. (4)

簡約(factoring)によって，つぎの節に変換される。

:- $(B_1, \cdots, B_{k-1}, A_1, A_2, B_{k+1}, \cdots, B_n)\theta\gamma$.

よって $B_1, \cdots, B_{k-1}, B_{k+1}, \cdots, B_n$. は消えてしまうので公理系に加える必要はない。図12に演繹木を示す。 ■

:- $B_1, \cdots, B_{k-1}, B, B_{k+1}, \cdots, B_n$.

:- $(B_1, \cdots, B_{k-1}, A_1, C, A_2, B_{k+1}, \cdots, B_n)\theta$.

C_s:-$B_1, \cdots, B_{k-1}, B_{k+1}, \cdots, B_n, B_{k+1}, \cdots, B_n$.

:- $(B_1\theta, \cdots, B_{k-1}\theta, A_1\theta, B_1, \cdots, B_{k-1}, B_{k+1}, \cdots, B_n, A_2\theta, B_{k+1}\theta, \cdots, B_n\theta)\gamma$.

||

:- $B_1\theta\gamma, \cdots, B_{k-1}\theta\gamma, A_1\theta\gamma, B_1, \cdots, B_{k-1}$,
$B_{k+1}, \cdots, B_n, A_2\theta\gamma, B_{k+1}\theta\gamma, \cdots, B_n\theta\gamma$.

||

:- $B_1\theta\gamma, \cdots, B_{k-1}\theta\gamma, A_1\theta\gamma, A_2\theta\gamma$,
$B_{k+1}\theta\gamma, \cdots, B_n\theta\gamma$.

図12 C_sが基礎原子式のときの演繹木

4. 実行例

$S=\{p(a) \vee p(b), \sim p(X)\}$が充足不可能であることを証明する。Sに対応する拡張確定節集合Pは

P={:- inconsistent.
inconsistent :- p(X).
p(a) :- (inconsistent<-p(b)).
p(b) :- (inconsistent<-p(a)).}

である。PのSLED反駁木を図13に示す。

:- inconsistent.　　inconsistent :- p(X).

:- p(X).　p(a) :- (inconsistent <- p(b)).

:- (inconsistent <- p(b)).

p(b)を公理系に加える。

:- inconsistent.　　inconsistent :- p(X).

:- p(X).　　　　p(b).

□

図13 SLED導出法による反駁

5. むすび

inconsistentを用いない拡張目標を使うことによって述語論理の広い範囲の定理証明をかなり効率よく行える。また，述語inconsistentを使うことによって，証明の効率はよくないが完全性が得られる。しかし，Prologでは深さ優先探索のためにSLED導出法は直接的には実行できない。今後の課題としてはSLED導出法のためのPrologの効率がよい完全性をもつ探索方式を研究することがあげられる。

参考文献

[1]C.L.Chang and R.C.T.Lee (1973)
"Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving" Academic Press
邦訳 長尾 真，辻井 潤一 (1983)
"コンピュータによる定理の証明"
日本コンピュータ協会

[2]J.W.Lloyd and R.W.Topor (1984)
"Making Prolog More Expressive"
Journal of Logic Programming vol 1,No.3

[3]野口 正一，滝沢 誠 (1986)
"知識工学基礎論" オーム社

[4]松浦 聡，中村 克彦 (1986)
"Prologによる数学上の定理証明"
第33回情報処理学会全国大会