ソフトウェア基礎論　25−11
(1988. 5. 27)

(n, k)-多重サイクルグラフに対する (3, k−1)-耐性かつ両方向性の最短路線割当

The (3,k-1)-tolerant, bidirectional and minimal-length routings on (n,k)-multi-cycle graphs

羅　予頻　　川口　喜三男　　和田　幸一

Yupin LUO, Kimio KAWAGUCHI-IZAWA and Koich WADA

名古屋工業大学　工学部

Faculty of Engineering, Nagoya Institute of Technology

あらまし　信頼性が高く効率のよい通信（計算機）網をいかに実現するかは重要な問題である．これを，本論文は，交換設備或は計算機を点，通信線を辺に対応させたグラフそのものとその上の路線割当（routing）をいかに構成するかと言う問題として扱う．路線割当が前もって計算されている通信網の信頼性と効率の尺度として，通信網を表すグラフの故障していない点及び二点間の路線（route）が故障を含まないときその間に有向辺をもつ有向グラフとして定義されるＳＲ-グラフの直径を用いる．通信網上に故障が存在するとき，これらの故障を回避して高々ＳＲ-グラフの直径に等しい数の無故障の路線を接続して通信を行うことができるからである．本論文は，与えられたｎとｋ（ｎ＞ｋ≧２）に対して，（ｋ－１）個以下の任意の故障に対するＳＲ-グラフの直径が３以下となる辺数最小のｎ点グラフ（（ｎ，ｋ）-多重サイクルグラフ）とその上の両方向且つ最短な路線割当が構成できることを示す．この路線割当は（ｎ，ｋ）-多重サイクルグラフ上の最も効率のよい両方向最短路線割当である．

ABSTRACT　A fixed routing ρ for a network G must be defined without knowing where faults might occur. Let F be a set of faulty elements of G. The diameter (denoted by DIAM(R(G, ρ)/F)) of the surviving route graph R(G, ρ)/F, of which nodes are corresponding to the nonfaulty nodes of G and edges to the nonfaulty routes of G, could be one of the fault-tolerance measures for the routing ρ. In this paper, given any n and k (n>k≧2), we show that a bidirectional and minimal length routing ρ can be constructed on a (n,k)-multi-cycle graph M(n,k) such that DIAM(R(M(n,k), ρ)/F) is at most 3 if |F| ≦k-1.

１．序

信頼性が高く，しかも効率の良い通信（計算機）網をいかに実現するかは重要な問題である．この問題を，本論文は，交換設備或は計算機を点，通信線を辺に対応させたグラフそのものとその上の路線割当（routing）をいかに構成するかと言う問題として扱う．

路線割当が前もって計算されている通信網においてその中の多くの要素が故障や工事などのため使用不能となり，その結果これらの要素を含む路線（route）が切断されていても，使用可能ないくつかの路線を接続すれば通信が可能となるならば，この通信網の信頼性（故障耐性）は高いと言うことができ，故障を回避する経路を形成する路線の数が少なければ効率がよいと言うことができる．このような通信経路を形成する接続路線の数は高々ＳＲ-グラフ（ surviving route graph）の直径ｄに等しい．このＳＲ-グラフは，通信網を表すグラフの故障していない点及び二点間の路線が故障を含まないときその間に有向辺をもつ有向グラフとして定義される[1]．また，個々の路線は短い程通信経費が低減されると考えられる．最短路線割当を用いるとするならば，路線の長さは高々通信網を表すグラフの直径Ｄに等しい．故障発生時の通信網での通信経路の長さの上界がｄＤであることから，ＳＲ-グラフの直径ｄのみならず，通信網を表すグラフの直径Ｄも小さいことが望ましい．更に，通信網を表すグラフの辺数は小である程，通信網の建設費用が小であると考えられる．

与えられたｎ個の点をもつ故障耐性の高い通信網の構成問題に対する従来の結果としては，（ｋ－１）（但し，ｎ＞ｋ≧２）個以下の任意の要素の故障に対してＳＲ-グラフの直径が４以下となるような辺数最小のグラフ（（ｎ，ｋ）-多重サイクルグラフ[2]）とその上の両方向性（２点間に定義される往復の路線はグ

ラフ上の同一の通路である）且つ準最短（最短よりも1だけ長い）な路線割当を構成できることが文献（3）で示された．これに対し，本論文では，（k－1）個以下の任意の故障に対しＳＲ-グラフの直径が3以下となるような両方向性の最短路線割当が同じグラフの上で構成できることを示す．これにより（n，k）-多重サイクルグラフの上では最も効率の良い両方向性且つ最短の路線割当を構成できることが明らかになる．何故ならば，文献（3）及び本論文で用いられているグラフでは，ＳＲ-グラフの直径が2以下となる最短路線割当が存在し得ない場合のあることが証明されている[3]からである．この意味で本論文の路線割当は最良のものである．しかし，最短と言う条件を取外すと，点数nが大きい場合には（k－1）個以下の任意の故障に対しＳＲ-グラフの直径が2以下となる両方向性の路線割当を定義できることが文献（4）に示されている．

2．諸定義とＳＲ-グラフ

2．1諸定義

集合Ａの要素数を｜Ａ｜と表す．実数xに対し，｜x｜はxの絶対値，$\lfloor x \rfloor$はxより大きくない最大の整数，$\lceil x \rceil$はxより小さくない最小の整数をそれぞれ表す．

単純な有向グラフすなわち，多重辺，自己ループのない有向グラフＧ＝（Ｖ，Ｅ）は，点の有限集合Ｖと相異なる点の順序対の有限集合Ｅから定義される．Ｅの元を有向辺と呼び，〈u，v〉（u，v∈Ｖ）と表す．

単純な無向グラフすなわち，多重辺，自己ループのない無向グラフ（本論文ではこれを単にグラフと呼ぶ）Ｇ＝（Ｖ，Ｅ）は点の有限集合Ｖと相異なる点の非順序対の有限集合Ｅから定義される．Ｅの元を辺と呼び（u，v）（u，v∈Ｖ，u≠v）と表す．e＝（u，v）∈Ｅのとき，uとvをそれぞれ辺eの端点と呼び，uとvまたeとu（或はv）はＧで隣接するという．

グラフＧ＝（Ｖ，Ｅ）における点列Ｐ＝（$v_0, v_1, \ldots, v_n$）はn＝0ならば1点（v_0）から成り，n≧1ならば（V_i，V_{i+1}）∈Ｅ（$0 \leqq i \leqq n-1$）かつV_0とV_nが等しくないとき，v_0とv_nを結ぶ長さnの通路といい，v_0，v_nをＰの端点と呼ぶ．なおＰは通路（$v_n, v_{n-1}, \ldots, v_0$）と同一とする．Ｇの二点x，yの距離$dis_G(x,y)$（$=dis_G(y,x)$）は，x，yを結ぶ通路が存在するならば，最短の通路の長さであり，そのような通路が存在しなければ，無限大または有限でないと定義する．Ｇの相異なる任意の二点間の距離の最大値をＧの直径と呼びDIAM(G)と表す．グラフＧにおいて任意の相異なる二点を結ぶ通路が存在するとき，Ｇは連結であるという．Ｇが連結でないとき，Ｇは非連結であるという．

n（≧1）個の相異なる通路$P_1, \ldots, P_n$が端点以外で点を共有しないとき，$P_1, \ldots, P_n$は点独立であるという．Ｇの相異なる任意の二点を結ぶ点独立な通路数nがk以上であるとき，Ｇはk－点連結であるという．

ＭをＶ∪Ｅの部分集合とする．ＧからＭの点，Ｍの点に隣接するすべての辺，及びＭの辺を取り除いたグラフをＧ／Ｍと表す．

グラフＧ＝（Ｖ，Ｅ）に対して，正整数rが存在し，Ｖの点の次数がすべてrのとき，Ｇはr-正則であるという．｜Ｖ｜，rが共に奇数であるとき†，次数がr＋1であるようなＶの点uが唯一つＧに存在し，かつＶ-｛u｝の点の次数がすべてrであるならば，Ｇはr-準正則であるという．Ｇがr-正則あるいはr-準正則のとき，Ｇは広義r-正則であるという．

2．2　路線割当とＳＲ-グラフ

Ｇ＝（Ｖ，Ｅ）をグラフとし，x，yを相異なるＧの2点とする．xからyへの通路の集合を$P_G(x,y)$と表し，Ｇの通路全体の集合をP(Ｇ)と表す．Ｇの路線割当（routing）ρ_Gを$\rho_G(x,y) \in P_G(x,y)$となる（一価）部分関数$\rho_G: V \times V \rightarrow P(G)$と定義する．$\rho_G(x,y)$をＧにおけるxからyへの路線（route）と呼ぶ．また，$\rho_G(x, y)$の通路長を$|\rho_G(x,y)|$と表す．

対象とするグラフＧが明らかな場合ρ_Gを単にρと略記する．Ｇの路線割当ρにおいて，ρが定義されている任意のx，yに対して$\rho(x,y)=\rho(y,x)$が成り立つとき，ρは両方向路線割当（bidirectional routing）と呼ぶ．また，ρが定義されている任意のx，yに対して$|\rho(x, y)| = dis_G(x,y)$が成り立つとき，$\rho$は最短路線割当（minimal length routing）と呼ぶ．

Ｇ＝（Ｖ，Ｅ）とＧの路線割当ρに対して，路線グラフ（route graph）と呼ばれる有向グラフ$R(G,\rho)=(V,E(G,\rho))$を次のように定義する．

$\langle x,y \rangle \in E(G,\rho) \iff x,y \in V$ かつ$\rho(x,y)$が定義されている

路線割当ρにおいて，$\rho(x,y)$が未定義となる相異なるx，yが存在するとき，ρは部分路線割当（partial routing）と呼ぶ．そうでないときρは全路線割当（total routing）と呼ぶ．

Ｇ＝（Ｖ，Ｅ）における故障集合Ｆとは，Ｖ∪Ｅの部分集合である．$F \cap V (=F_V)$の要素を故障点，$F \cap E (=F_E)$の要素を故障辺と呼ぶことがある．

路線$\rho(x,y)$が故障集合Ｆの要素を含まないとき，$\rho(x,y)$は無故障（fault free）であるという．

グラフＧ＝（Ｖ，Ｅ），Ｇの路線割当ρ及び故障集合$F(=F_V \cup F_E)$に対して，ＳＲ-グラフ（surviving

† この場合Ｇはr-正則になりえない．

route graph）と呼ばれる有向グラフ$R(G,\rho)/F=(V-F_v, E(G,\rho, F))$を次のように定義する．

$\langle x,y\rangle \in E(G,\rho,F)$ $\iff$ $\rho(x,y)$が定義されていてしかも無故障

ρが両方向路線割当であるとき，路線グラフ，SR-グラフともに無向グラフとして扱ってよい．本論文では両方向路線割当のみを考察しているので，以下では，路線グラフ，SR-グラフとも無向グラフとする．

Gの点$x_0, x_1, \ldots, x_p$に対して，路線$\rho(x_i, x_{i+1})$ $(0 \leq i \leq p-1)$ がすべて定義されているとき，$\rho(x_i, x_{i+1})$に$\rho(x_{i+1}, x_{i+2})$$(0 \leq i \leq P-2)$を順次つないで得られる通路を$(\rho ; x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p)$と表し，これを$x_0$と$x_p$を結ぶ列長pの路線列（route sequence）と呼ぶ．特に，$x=y$のとき長さ0の路線列という．路線列に含まれるどの路線も無故障であるときその路線列は無故障であるという．なお，k個の路線列$RS_1, \ldots, RS_k$が点独立であるとき，これらの路線列は点独立であるという．

Gの路線割当をρとし，x，$y \in V$とする．ある正整数cが存在して，$|F| \leq f$かつx，$y \notin F$である任意の故障集合Fに対して，SR-グラフ$H=R(G,\rho)/F$におけるx，yの距離$dis_H(x, y)$がc以下であるならば，x，yは(c,f,G,ρ)-耐性（(c,f,G,ρ)-tolerant）であるという．対象となるGとρが明らかな場合(c,f,G,ρ)-耐性を単に(c,f)-耐性と略記する．

［命題1］[3]　Gの路線割当をρとする．Gの相異なる二点x，yに対して，長さc以下の点独立な路線列がk個存在するならば，x，yは$(c,k-1)$-耐性である．▮

Gの路線割当ρに対して，Gの任意の相異なる2点が(c,f)-耐性であるならば，ρは(c,f)-耐性であるという．また，このような路線割当ρが存在するとき，Gは(c,f)-耐性であるともいう．

次に，$k-1$個の故障に対してn点グラフGのSR-グラフが非連結とはならないための必要条件としてGにおける辺数の下界を与える．

［命題2］[3]　n，kを$n>k\geq 1$を満たす整数とし，dを任意の整数とする．n点グラフ$G=(V, E)$が$(d,k-1)$-耐性ならば，

$$|E| \geq \lceil (nk)/2 \rceil$$

が成り立つ．▮

3．（n，k）-多重サイクルグラフ上の路線割当

3．1　路線割当の定義と性質

n点広義k-正則グラフGの辺数は$\lceil (nk)/2 \rceil$であるので，命題2よりGは辺数最小グラフである．広義k-正則グラフとして，（n，k）-多重サイクルと呼ばれるグラフを定義する．[2]

正整数n，k $(n>k\geq 2)$ に対して，（n，k）-多重サイクル$M(n, k)=(V, E)$は，次の条件を満たすグラフである．[2]

$$V=\{0,1,\ldots,n-1\}$$
$$E_1=\{(i,j) \mid 0<(j-i) \bmod n \leq \lfloor k/2 \rfloor\}$$
$$E_2=\{(i,j) \mid 0 \leq i \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor,\ j=i+\lfloor n/2 \rfloor\}$$

(1)　kが偶数のとき，$E=E_1$．

(2)　kが奇数のとき，$E=E_1 \cup E_2$．

$M(n, k)$の任意の相異なる2点x，yは$(x, y) \in E$ならば，$(y, x) \in E$．また，kが奇数のとき，E_2の要素を対角線と呼び，点xからの対角線(x, y)の端点yをx'で表すことがある．なお，点$(z \bmod n)'$を$z' \bmod n$と表すことがある．さらに，点$\lfloor n/2 \rfloor$（但し，nが奇数のとき）からの対角線が2本存在することに注意を要する．

$M(n, k)$に対して，SR-グラフの直径が3以下となる路線割当を定義する．

・kが奇数（$k=2m+1$ $(m\geq 1)$）の場合

$k=3$ $(m=1)$ のとき，$n\geq 2m+2$に対する路線割当をρ_rで表す．$k\geq 5$ $(m\geq 2)$ のとき，$n=3m+1$に対する路線割当をρ_s，$2m+2\leq n\leq 4m+1$かつ$n\neq 3m+1$に対する路線割当をρ_t，$n\geq 4m+2$に対する路線割当をρ_oで表す．

：<u>路線割当ρ_r</u>

u，$v\in V$に対して，$(u, v)\in E$ならば，

$$\rho_r(u,v)=\rho_r(v,u)=(u, v)$$

$2\leq (v-u) \bmod n=\Lambda \leq \lceil \lfloor n/2 \rfloor /2 \rceil$ならば，

$$\rho_r(u,v)=\rho_r(v,u)=(u,(u+1)\bmod n,(u+2)\bmod n, \ldots,(u+\Lambda)\bmod n)$$

：<u>路線割当ρ_s</u>

u，$v\in V$に対して，$(u, v)\in E$ならば，

$$\rho_s(u,v)=\rho_s(v,u)=(u, v)$$

$m+1\leq (v-u) \bmod n \leq \lfloor n/2 \rfloor$ かつ $(u, v)\notin E_2$ならば，

$$\rho_s(u,v)=\rho_s(v,u)=(u,(u+m-1)\bmod n, v)$$

：<u>路線割当ρ_t</u>

u，$v\in V$に対して，$(u, v)\in E$ならば，

$$\rho_t(u,v)=\rho_t(v,u)=(u, v)$$

$m+1\leq (v-u) \bmod n \leq \lfloor n/2 \rfloor$ かつ $(u, v)\notin E_2$ならば，

$$\rho_t(u,v)=\rho_t(v,u)=(u,(u+m)\bmod n, v)$$

：<u>路線割当ρ_o</u>

不等式$4(q-1)m+2\leq n\leq 4qm+1$を満足する整数q $(q\geq 2)$ が一意に定まる．このqを用いて最短路線割当ρ_oを定義するために$Q=qm$を導入する．

u，$v\in V$に対して，$(u, v)\in E$ならば，

$$\rho_o(u,v)=\rho_o(v,u)=(u, v)$$

$m+1\leq (v-u) \bmod n \leq \lfloor n/2 \rfloor$ かつ $(u, v)\notin E_2$ならば，

$(v-u) \bmod n=am+b$ $(0\leq b<m)$ $\leq Q$のとき，

aが偶数の場合

$\rho_o(u,v)=\rho_o(v,u)=(u,(u+b)\bmod n,(u+b+m)\bmod n,\ldots,(u+b+am)\bmod n)$

aが奇数の場合

$\rho_o(u,v)=\rho_o(v,u)=(u,(u+m)\bmod n,\ldots,(u+am)\bmod n,(u+am+b)\bmod n)$

$Q+1\leqq(v-u)\bmod n$ のとき，$u=\lfloor n/2\rfloor+c_1m\ (c_1\geqq 1)$ と $v=n-1-c_2m\ (c_2\geqq 0)$ が同時に成り立つようなuとvの組を除き次のように定義する．

特に $u=\lfloor n/2\rfloor$ かつnが奇数の場合には，uからの対角線は2本即ち，$(u,0)$ と $(n,n-1)$ が存在するが，これに対しては $u'=n-1$ と定める．

$(u'-v)\bmod n=am+b\ (0\leqq b<m)$ とする．

$\rho_o(u,v)=\rho_o(v,u)=(u,u',(u'-m)\bmod n,\ldots,(u'-am)\bmod n,(u'-am-b)\bmod n)$

・kが偶数（$k=2m\ (m\geqq 1)$）の場合

路線割当 ρ_e

$u,v\in V$ に対して，$(u,v)\in E$ ならば，

$\rho_e(u,v)=\rho_e(v,u)=(u,v)$

$m+1\leqq(v-u)\bmod n\leqq\lceil n/2\rceil-1$ ならば，$(v-u)\bmod n=am+b\ (a\geqq 0,\ 0\leqq b<m)$ とすると，

aが偶数の場合； $\rho_e(u,v)=\rho_e(v,u)=(u,(u+b)\bmod n,(u+b+m)\bmod n,\ldots,(u+b+am)\bmod n)$

aが奇数の場合； $\rho_e(u,v)=\rho_e(v,u)=(u,(u+m)\bmod n,\ldots,(u+am)\bmod n,(u+am+b)\bmod n)$

［補題1］ 路線割当 ρ_r，ρ_s，ρ_t，ρ_o，ρ_e はいずれも両方向の最短路線割当である．▌（証明は省略する）

［補題2］ M（n，k）の任意の相異なる2点をx，yとする．路線割当 ρ_o，ρ_e は以下の性質をもつ．

$1\leqq(y-x)\bmod n=am+b$，Hを $1\leqq H\leqq m$ なる整数とする．なお，ρ_o と ρ_e はkの偶奇にかかわらず共通に取り扱いができるとき，まとめて ρ と表す．

（1） Lをkが奇数の場合 $L=Q$，kが偶数の場合 $L=\lceil n/2\rceil-1$ とするとき，$am+b\leqq L$ ならば，Wを $1\leqq W\leqq b+1$ なる整数とすると，

（1－1） $0\leqq i\leqq W-1$ において

aが奇数のとき， $\rho(x,(y-i)\bmod n)$

aが偶数のとき， $\rho((x+i)\bmod n,y)$

とそれぞれなるW個の路線は点独立である．

特に，$H\leqq(y-x)\bmod n\leqq 2m\leqq L$ ならば，

$\rho((x+i)\bmod n,y)\quad 0\leqq i\leqq H-1$

となるH個の路線は点独立である．また，

（1－2） $X=\{x_1,x_2,\ldots\ldots x_H\}$

$Y=\{y_1,y_2,\ldots\ldots y_H\}$

なる集合Xと集合Yは

(1-2-a) 下記の条件を満たすとき，XのH個の点からYのH個の点に至るH個の点独立な中継路線が存在する．

$x_1=x,\ x_i=(x+c_i)\bmod n$

$2\leqq i\leqq H,\ 1\leqq c_i\leqq L$

$y_1=y,\ y_i=(y-d_i)\bmod n$

$2\leqq i\leqq H,\ 1\leqq d_i\leqq L$

但し，r，s，tを $1\leqq r<s\leqq H$，$t\geqq 0$ なる整数とするとき，

$(c_s-c_r)\bmod n\neq tm\leqq L$

$(d_s-d_r)\bmod n\neq tm\leqq L$

(1-2-b) 下記の条件を満たすとき，XのH個の点からYのH個の点に至るH個の点独立な中継路線が存在する．

$x_1=x,\ x_i=(x-i-1)\bmod n$

$2\leqq i\leqq H$

$y_1=y,\ y_i=(y-d_i)\bmod n$

$2\leqq i\leqq H,\ 1\leqq d_i\leqq L$

但し，r，s，tを $1\leqq r<s\leqq H$，$t\geqq 0$ なる整数とするとき，$(d_s-d_r)\neq tm\leqq L$

(1-2-c) 特に，$b=0$ のとき，下記の条件を満たすとき，XのH個の点からYのH個の点に至るH個の点独立な中継路線が存在する．

$x_1=x,\ x_i=(x+c_i)\bmod n$

$y_1=y,\ y_i=(y+c_i)\bmod n$

$2\leqq i\leqq H,\ 1\leqq c_i\leqq L$

但し，r，s，tを $1\leqq r<s\leqq H$，$t\geqq 0$ なる整数とするとき，$(c_s-c_r)\bmod n\neq tm\leqq L$

XのH個の点からYのH個の点に至るH個の点独立な中継路線が存在するとき，このH個の点独立な路線を $[\rho;X,Y]$ で表す．また，M（n，k）の相異なる2点u，vに対して，H個の点独立な路線

$\rho(u,x_r)\quad 1\leqq r\leqq H$

及びH個の点独立な路線

$\rho(v,y_s)\quad 1\leqq s\leqq H$

がそれぞれ存在し，かつ $[\rho;X,Y]$ と互いに点独立となるとき，このようなH個の長さが3となる路線列を $[\rho;u,X,Y,v]$ で表し，場合により

$[\rho;u,x_r,y_s,v]\quad 1\leqq r\leqq H,\ 1\leqq s\leqq H$

更に，$1\leqq R\leqq H$ なるRに対して，

$[\rho;(u,x_r,y_s,v);(u,x_R,y_s,v)]$

$1\leqq r\leqq H,\ r\neq R,\ 1\leqq s\leqq H$

と表すことがある．

（2） kが奇数のとき，$Q+1\leqq am+b\leqq\lfloor n/2\rfloor$ ならば，$((y+H-1)\bmod n-x)\bmod n\leqq\lfloor n/2\rfloor$ のとき，

$X=\{(x-i)\bmod n\mid 0\leqq i\leqq H-1\}$

$Y=\{(y+j)\bmod n\mid 0\leqq j\leqq H-1\}$

なる集合Xと集合Yはnが奇数ならば，点tをtrouble dotと呼び，$t=n-1$ のとき $\{n-1,0\}\subseteq X$，$t=\lfloor n/2\rfloor+c_1m$ のとき $\lfloor n/2\rfloor+c_1m\in X$（$c_1$ が $1\leqq c_1\leqq q$ なる整数）かつ $n-1-c_2m\in Y$（c_2 が $c_2\geqq 0$ なる整数），$\lfloor n/2\rfloor>t=x-H+1$ のとき $H=m$ かつ $\lfloor n/2\rfloor\in\{(x-i)\bmod n\mid 1\leqq i\leqq H-1\}$．

（2－1） $t\notin X$ ならば，XのH個の点からYのH

個の点に至るH個の点独立な中継路線，即ち，

$[\rho_o;X,\ Y]$

が存在する．

(2−2)　$t\in X$ならば，$X-t$の$(H-1)$個の点から$Y-z$ $(z\in Y)$の$(H-1)$個の点に至る$(H-1)$個の点独立な中継路線，即ち，

$[\rho_o;X-t,\ Y-z]$

が存在する．▌(証明は省略する)

3．2　(3，k−1)-耐性の証明

本節では，(n，k)-多重サイクルグラフ$M(n,k)$ $(k\geqq k+1)$上の両方向且つ最短な路線割当ρ_r，ρ_s，ρ_t，ρ_o，更にρ_eがいずれも$(3,k-1)$-耐性となることを示す．

［補題3］　(n，3)-多重サイクルの上の路線割当ρ_rは(3，2)-耐性である．▌(証明は省略する)

［補題4］　$n=3m+1$（但し，mは2以上の任意の整数）ならば，$(3m+1,\ 2m+1)$-多重サイクルの上の路線割当ρ_sは$(3,\ 2m)$-耐性である．

（証明）　x，yを$M(n,k)$の任意の相異なる2点とする．いま，$1\leqq(y-x)\bmod n\leqq\lfloor n/2\rfloor$として一般性を失わない．xとyの間に長さが3以下となる$2m+1$個の点独立路線列が存在することを示す．但し，nが奇数の場合，辺$(0,\lfloor n/2\rfloor)$と$(n-1,\lfloor n/2\rfloor)$がいずれも$M(n,\ 2m+1)$の対角線になっているので，$x=0$として一般的に取り扱うことができないことに注意する．

(1)　$1\leqq\Gamma\leqq m-1$のとき，

$(\rho_s;x,y)$

$(\rho_s;x,(x-m+\Gamma+i)\bmod n,y)$

$0\leqq i\leqq 2m-\Gamma,\ i\neq m$

次に，$(\Gamma+1)$個の点独立な路線列を以下のような場合に分けて示す．

c_xを$m+c_x=x'$

c_yを$m+c_y=y'$とすると，

(1)-(a)　$1\leqq\Gamma\leqq c_x-1$のとき，

(a)1　$c_x+\Gamma-1\leqq c_y\leqq m$ならば，

$(\rho_s;x,x',y',y)$

$(\rho_s;x,(x+2m+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$1\leqq i\leqq\Gamma$

(a)2　$m+1\leqq c_y\leqq c_x+\Gamma+1$ならば，

$(\rho_s;x,y',y)$

$(\rho_s;x,x',(y'-m)\bmod n,y)$

$(\rho_s;x,(x+2m+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$1\leqq i\leqq\Gamma,\ i\neq c_y$

(a)3　$x'=y'$，即ち$x=n-1$，$y=0$ $(\Gamma=1)$かつnが奇数のとき，

$(\rho_s;n-1,\lfloor n/2\rfloor,0)$

$(\rho_s;n-1,n-m-1,m,0)$

(1)-(b)　$c_x\leqq\Gamma\leqq m-1$のとき，

(b)1　$c_x+\Gamma-1\leqq c_y\leqq m$ならば，

$(\rho_s;x,x',y)$

$(\rho_s;x,(x'+m)\bmod n,y',y)$

$(\rho_s;x,(x+2m+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$1\leqq i\leqq\Gamma,\ i\neq c_x$

(b)2　$c_y=m+1$ならば，

$(\rho_s;x,x',y)$

$(\rho_s;x,y',y)$

$(\rho_s;x,(x'+m)\bmod n,(y'-m)\bmod n,y)$

$(\rho_s;x,(x+2m+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$1\leqq i\leqq\Gamma,\ i\neq c_y,\ i\neq c_x$

(b)3　$m+2\leqq c_y\leqq c_x+m-1$ならば，

$(\rho_s;x,y',y)$

$(\rho_s;x,x',y)$

$(\rho_s;x,(x'+m)\bmod n,(x+m+1)\bmod n,y)$

$(\rho_s;x,(x+2m+1)\bmod n,(y'-m)\bmod n,y)$

$(\rho_s;x,(x+2m+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$2\leqq i\leqq\Gamma,\ i\neq c_x,\ i\neq c_y-m$

(b)4　$c_y=c_x+m$ならば，

$(\rho_s;x,y',y)$

$(\rho_s;x,x',y)$

$(\rho_s;x,(x+2m+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$1\leqq i\leqq\Gamma,\ i\neq c_x$

(2)　$m\leqq\Gamma\leqq\lfloor n/2\rfloor$のとき，

$x'=(x+m+c_x)\bmod n$,

$y'=(x+2m+c_y)\bmod n$,

$y=(x+m+d_y)\bmod n$とする．

$0\leqq d_y\leqq\lfloor(m+1)/2\rfloor$

$(\rho_s;x,(x+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$1\leqq i\leqq d_y-1$

$(\rho_s;x,(x+i)\bmod n,y)$

$d_y\leqq j\leqq m$

次に，$(m+1)$個の点独立な路線列を以下のような場合に分けて示す．

(2)-(a)　$0\leqq d_y\leqq c_x-1$の場合

(a)1　$c_y<c_x$ならば，

この場合，nが奇数かつ

$0\in\{(x+i)\bmod n \mid 1\leqq i\leqq\Gamma\}$，$d_y=0$

$(\rho_s;x,x',y)$

$(\rho_s;x,y',y)$

$(\rho_s;x,(x-1)\bmod n,(x'-1)\bmod n,y)$

$(\rho_s;x,(x'+m)\bmod n,(x+2m)\bmod n,y)$

$(\rho_s;x,(x+2m+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$1\leqq i\leqq m-1,\ i\neq c_x,\ i\neq c_y$

(a)2　$c_y=c_x$ならば，

$(\rho_s;x,x',y)$

$(\rho_s;x,y',y)$

$(\rho_s;x,(x+2m+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$d_y+1\leqq i\leqq m,\ i\neq c_x$

$(\rho_s;x,(x+m+i)\bmod n,y)$

$m+1\leqq i\leqq m+d_y$

(a)3　$c_y>c_x$ならば，

$(\rho_s;x,x',y)$

$(\rho_s;x,y',y)$

$(\rho_s;x,(x'+m)\bmod n,(y'-m)\bmod n,y)$

$(\rho_s;x,(x+2m+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$d_y+1\leq i\leq m,\ i\neq c_x,\ i\neq c_y$

$(\rho_s;x,(x+m+i)\bmod n,y)\quad m\leq i\leq m+d_y$

(2)-(b) $d_y=\lfloor(m+1)/2\rfloor=c_x$ の場合，

$(\rho_s;x,y)$

$(\rho_s;x,(x+2m+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$d_y+1\leq i\leq m$

$(\rho_s;x,(x+m+i)\bmod n,y)\quad m\leq i\leq m+d_y$

▮

［補題５］ $2m+2\leq n\leq 4m+1$ かつ $n\neq 3m+1$（但し，m は２以上の任意の整数）ならば，$(n, 2m+1)$-多重サイクルにおける路線割当 ρ_t は $(3, 2m)$-耐性である．

（証明） $x, y\in V$, $1\leq (y-x)\bmod n=\Gamma\leq\lfloor n/2\rfloor$ として一般性を失わない．x と y の間に長さが３以下となる $2m+1$ 個の点独立路線列が存在することを示す．

（１） $1\leq\Gamma\leq m-1$ のとき，

$(\rho_t;x,y)$

$(\rho_t;x,(x-m+\Gamma+i)\bmod n,y)$

$0\leq i\leq 2m-\Gamma,\ i\neq m$

次に，$(\Gamma+1)$ 個の点独立な路線列を以下のような場合に分けて示す．

(1)-1 $n=2m+r$ $(2\leq r\leq m)$ の場合

$X=\{(x+m+r+i)\bmod n \mid 0\leq i\leq\Gamma-1\}$

$Y=\{(x+m+i)\bmod n \mid 1\leq i\leq\Gamma\}$

とする．

この場合，$\lfloor n/2\rfloor=m+\lfloor r/2\rfloor\geq m+1$

$\lceil n/2\rceil=m+\lceil r/2\rceil\leq m+r-1$

(1)-1(a) $1\leq\Gamma\leq r-1$ のとき，

(a)1 $x'\notin Y$, $y'\notin X$ ならば，

$(\rho_t;x,x',y',y)$

$(\rho_t;x,(x+m+r+i)\bmod n,(x+m+1+i)\bmod n,y)$

$0\leq i\leq\Gamma-1$

(a)2 $x'\notin Y$, $y'\in X$ ならば，

c_y を $(x+m+r+c_y)\bmod n=y'$ とすると，

$(\rho_t;x,y',y)$

$(\rho_t;x,x',(x+m+1)\bmod n,y)$

$(\rho_t;x,(x+m+r+i)\bmod n,(x+m+2+i)\bmod n,y)$

$0\leq i\leq c_y-1$

$(\rho_t;x,(x+m+r+i)\bmod n,(x+m+1+i)\bmod n,y)$

$c_y+1\leq i\leq\Gamma-1$

(a)3 $x'\in Y$, $y'\notin X$ ならば，

c_x を $(x+m+c_x)\bmod n=x'$ とすると，

$(\rho_t;x,x',y)$

$(\rho_t;x,(x+m+r+\Gamma-1)\bmod n,y',y)$

$(\rho_t;x,(x+m+r-1+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$1\leq i\leq c_x-1$

$(\rho_t;x,(x+m+r-2+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$c_x+1\leq i\leq\Gamma$

(a)4 $x'\in Y$, $y'\in X$ ならば，

c_x を $(x+m+1+c_x)\bmod n=x'$

c_y を $(x+m+r+c_y)\bmod n=y'$ とすると，

$(\rho_t;x,x',y)$

$(\rho_t;x,y',y)$

$(\rho_t;x,(x+m+r+i)\bmod n,(x+m+1+i)\bmod n,y)$

$0\leq i\leq\min\{c_x-1,\ c_y-1\}$

$(\rho_t;x,(x+m+r+S+i)\bmod n,(x+m+T+j)\bmod n,y)$

$\min\{c_x+1,\ c_y+1\}\leq i\leq\max\{c_x,\ c_y\}$

但し，$c_x>c_y$ ならば，$S=0$, $T=0$

$c_y>c_x$ ならば，$S=-1$, $T=1$

$(\rho_t;x,(x+m+r+i)\bmod n,(x+m+1+j)\bmod n,y)$

$\max\{c_x+1,\ c_y+1\}\leq i\leq\Gamma-1$

(a)5 $x'=y'$，即ち $x=n-1$, $y=0$

$(\Gamma=1)$ かつ n が奇数ならば，

$(\rho_t;n-1,\lfloor n/2\rfloor,0)$

$(\rho_t;n-1,n-m-1,m,0)$

(1)-1(b) $r\leq\Gamma\leq m-1$ のとき，

この場合， $x'\in Y$, $y'\in X$

c_x を $(x+m+c_x)\bmod n=x'$

c_y を $(x+m+\Gamma+c_y)\bmod n=y'$ とすると，

$(\rho_t;x,x',y)$

$(\rho_t;x,y',y)$

$(\rho_t;x,(x+m+\Gamma+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$1\leq i\leq\min\{c_x-1,\ c_y-1\}$

$(\rho_t;x,(x+m+\Gamma+S+i)\bmod n,(x+m+T+i)\bmod n,y)$

$\min\{c_x+1,\ c_y+1\}\leq i\leq\max\{c_x,\ c_y\}$

但し，$c_x>c_y$ ならば，$S=0$, $T=-1$

$c_y>c_x$ ならば，$S=-1$, $T=0$

$(\rho_t;x,(x+m+\Gamma+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$\max\{c_x+1,\ c_y+1\}\leq i\leq r-1$

$(\rho_t;x,(x+m+i)\bmod n,y)\quad r\leq i\leq\Gamma$

(1)-2 $n=3m+r$ $(2\leq r\leq m)$ の場合

この場合，

$\lfloor n/2\rfloor=m+\lfloor(m+r)/2\rfloor\geq m+r$

及び $\lceil n/2\rceil=m+\lceil(m+r)/2\rceil\leq 2m$ より，

$x'=(x+m+c_x)\bmod n$,

$y'=(x+m+c_y)\bmod n$ をとすると，

$r\leq c_x\leq m$

$r+\Gamma\leq c_y\leq m+\Gamma$

なお，$(x'-x)\bmod n=m+c_x$

$\leq\lceil n/2\rceil$ より，

$((x'+m)\bmod n-(x+m+r-1)\bmod n)\bmod n$

$=m+c_x-r+1$

$\leq\lceil n/2\rceil-r+1$

$\leq\lfloor n/2\rfloor$

(1)-2(a) $1\leq\Gamma\leq r-1$ のとき，

a(1) $r+\Gamma\leq c_y\leq m$ ならば，

$(\rho_t;x,x',y',y)$

$(\rho_t;x,(x+2m+r-1+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$1\leqq i\leqq \Gamma$

a(2) $m+1\leqq c_y\leqq m+\Gamma$ ならば,

$(\rho_t;x,x',(y'-m))\bmod n,y)$

$(\rho_t;x,(x+m+r-1+c_y)\bmod n,y',y)$

$(\rho_t;x,(x+2m+r-1+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$1\leqq i\leqq\Gamma,\ i\neq c_y-m$

a(3) $x'=y'$,即ち $x=n-1$, $y=0$ $(\Gamma=1)$ かつ n が奇数ならば,

$(\rho_t;n-1,\lfloor n/2\rfloor,0)$

$(\rho_t;n-1,n-m,m,0)$

(1)-2(b) $r-1<c_x-r$ かつ $r\leqq\Gamma\leqq c_x-r$ のとき,

b(1) $r+\Gamma\leqq c_y\leqq m$ ならば,

$(\rho_t;x,x',y',y)$

$(\rho_t;x,(x+2m+\Gamma+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$1\leqq i\leqq r-1$

$(\rho_t;x,(x+2m+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$r\leqq i\leqq\Gamma$

b(2) $m+1\leqq c_y\leqq m+r-1$ ならば,

$(\rho_t;x,x',(y'-m)\bmod n,y)$

$(\rho_t;x,(x+m+\Gamma+c_y)\bmod n,y',y)$

$(\rho_t;x,(x+2m+\Gamma+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$1\leqq i\leqq r-1,\ i\neq c_y-m$

$(\rho_t;x,(x+2m+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$r\leqq i\leqq\Gamma$

b(3) $m+r\leqq c_y\leqq m+\Gamma$ ならば,

$(\rho_t;x,x',(y'-m)\bmod n,y)$

$(\rho_t;x,y',y)$

$(\rho_t;x,(x+2m+\Gamma+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$1\leqq i\leqq r-1$

$(\rho_t;x,(x+2m+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$r\leqq i\leqq\Gamma,\ i\neq c_y-m$

(1)-2(c)

$\max\{c_x-r+1,\ r\}\leqq\Gamma\leqq m-1$ のとき,

c(1) $r+\Gamma\leqq c_y\leqq m+r-1$ ならば,

$(\rho_t;x,(x'+m)\bmod n,y',y)$

$(\rho_t;x,(x+m+\Gamma+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$1\leqq i\leqq r-1$

$(\rho_t;x,(x+2m+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$r\leqq i\leqq c_x-1$

$(\rho_t;x,(x+m+i)\bmod n,y)$

$c_x\leqq i\leqq\Gamma$

c(2) $m+r\leqq c_y\leqq m+c_x-1$ ならば,

$(\rho_t;x,y',x)$

$(\rho_t;x,(x'+m)\bmod n,(x+m+r-1)\bmod n,y)$

$(\rho_t;x,(x+m+\Gamma+r-1)\bmod n,(y'-m)\bmod n,y)$

$(\rho_t;x,(x+m+\Gamma+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$1\leqq i\leqq r-2$

$(\rho_t;x,(x+2m+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$r\leqq i\leqq c_x-1,\ i\neq c_y-m$

$(\rho_t;x,(x+m+i)\bmod n,y)$

$c_x\leqq i\leqq\Gamma$

c(3) $c_y=m+c_x$ ならば,

$(\rho_t;x,y',y)$

$(\rho_t;x,(x+m+\Gamma+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$1\leqq i\leqq r-1$

$(\rho_t;x,(x+2m+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$r\leqq i\leqq c_x-1$

$(\rho_t;x,(x+m+i)\bmod n,y)$

$c_x\leqq i\leqq\Gamma$

(1)-3 $n=4m+1$ の場合

(1)-3(a) $x'=(x+2m)\bmod n$,
$y'=(x+2m+\Gamma)\bmod n$ のとき,

$(\rho_t;x,y',y)$

$(\rho_t;x,(x+2m-1+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$1\leqq i\leqq\Gamma$

(1)-3(b) $x'=(x+2m)\bmod n$,
$y'=(x+2m+1+\Gamma)\bmod n$ のとき,

$(\rho_t;x,x',y',y)$

$(\rho_t;x,(x+2m+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$1\leqq i\leqq\Gamma$

(1)-3(c) $x'=(x+2m+1)\bmod n$,
$y'=(x+2m+\Gamma)\bmod n$ のとき,

即ち, n が奇数, 点 $0\in\{(x+i)\bmod n\mid 1\leqq i\leqq\Gamma\}$
$1\leqq i\leqq\Gamma$ に対して, $(x+m+i)'\bmod n=(x+3m+i)\bmod n$

$(\rho_t;x,x',y',y)$

$(\rho_t;x,(x+3m+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$1\leqq i\leqq\Gamma$

(1)-3(d) $x'=(x+2m+1)\bmod n$,
$y'=(x+2m+1+\Gamma)\bmod n$ のとき,

$(\rho_t;x,(x+3m+1)\bmod n,y',y)$

$(\rho_t;x,(x+2m+i)\bmod n,(x+m+i)\bmod n,y)$

$1\leqq i\leqq\Gamma$

(2) $m\leqq\Gamma\leqq\lfloor n/2\rfloor$ のとき,

$(\rho_t;x,(x+i)\bmod n,y)$ $\quad 1\leqq i\leqq m$

次に, $(m+1)$ 個の点独立な路線列を以下のような場合に分けて示す.

(2)-1 $n=2m+r$ $(2\leqq r\leqq m)$ の場合

$x'=(x+m+c_x)\bmod n$,
$y'=(x+2m+c_y)\bmod n$,
$y=(x+m+d_y)\bmod n$ とすると,
$c_x\in\{\lfloor r/2\rfloor,\ \lceil r/2\rceil\}$
$0\leqq d_y\leqq\lfloor r/2\rfloor$

(2)-1(a) $0\leqq d_y\leqq c_x-1$ のとき,

(a)1 $c_y<c_x$ ならば,

即ち, n が奇数, $0\in\{(x+i)\bmod n\mid 1\leqq i\leqq\Gamma\}$ かつ $d_y=0$,

$(\rho_t;x,x',y)$

$(\rho_t;x,y',y)$

$(\rho_t;x,(x-1)\bmod n,(x'-1)\bmod n,y)$

$(\rho_t; x, (x+2m+c_x) \bmod n, (x+m+r-1) \bmod n, y)$

$(\rho_t; x, (x+2m+i) \bmod n, (x+m+i) \bmod n, y)$

$1 \leqq i \leqq r-2, \ i \neq c_x, \ i \neq c_y$

$(\rho_t; x, (x+m+i) \bmod n, y) \qquad r \leqq i \leqq m$

(a)2　$c_y = c_x$ならば，

$(\rho_t; x, x', y)$

$(\rho_t; x, y', y)$

$(\rho_t; x, (x+2m+i) \bmod n, (x+m+i) \bmod n, y)$

$d_y+1 \leqq i \leqq r-1, \ i \neq c_x$

$(\rho_t; x, (x+m+i) \bmod n, y) \qquad r \leqq i \leqq m+d_y$

(a)3　$c_y > c_x$ならば，

$(\rho_t; x, x', y)$

$(\rho_t; x, y', y)$

$(\rho_t; x, (x'+m) \bmod n, (y'-m) \bmod n, y)$

$(\rho_t; x, (x+2m+i) \bmod n, (x+m+i) \bmod n, y)$

$d_y+1 \leqq i \leqq r-1, \ i \neq c_x, \ i \neq c_y$

$(\rho_t; x, (x+m+i) \bmod n, y) \qquad r \leqq i \leqq m+d_y$

(2)-1(b)　$d_y = \lfloor r/2 \rfloor = c_x$のとき，

$(\rho_t; x, y)$

$(\rho_t; x, (x+2m+i) \bmod n, (x+m+i) \bmod n, y)$

$d_y+1 \leqq i \leqq r-1$

$(\rho_t; x, (x+m+i) \bmod n, y) \qquad r \leqq i \leqq m+d_y$

(2)-2　$n = 3m+r$ $(2 \leqq r \leqq m)$ の場合

$x' = (x+m+c_x) \bmod n$,

$y' = (x+2m+c_y) \bmod n$,

$y = (x+m+d_y) \bmod n$とすると，

$r \leqq c_x \leqq m$

$0 \leqq d_y \leqq \lfloor (m+r)/2 \rfloor$

(2)-2(a)　$0 \leqq d_y \leqq \lfloor (m+r)/2 \rfloor$かつ$d_y < c_x$のとき，

(a)1　$c_y < c_x$ならば，

即ち，nが奇数，$0 \in \{(x+i) \bmod n \mid 1 \leqq i \leqq \Gamma\}$かつ$d_y = 0$，

$(\rho_t; x, y', y)$

$(\rho_t; x, (x-1) \bmod n, (x'-1) \bmod n, y)$

$(\rho_t; x, (y'+1) \bmod n, (y+1) \bmod n, y)$

$(\rho_t; x, (y+m+1) \bmod n, (y+r+1) \bmod n, y)$

$(\rho_t; x, (x+2m+i) \bmod n, (x+m+i) \bmod n, y)$

$2 \leqq i \leqq r-2$

$(\rho_t; x, (x+2m+i) \bmod n, (x+m+i) \bmod n, y)$

$r \leqq i \leqq c_y-1$

$(\rho_t; x, (x+m+i) \bmod n, y) \qquad c_x \leqq i \leqq m$

(a)2　$c_y = c_x$ならば，

$(\rho_t; x, y', y)$

$(\rho_t; x, (x+2m+i) \bmod n, (x+m+i) \bmod n, y)$

$d_y+1 \leqq i \leqq c_x-1$

$(\rho_t; x, (x+m+i) \bmod n, y) \qquad c_x \leqq i \leqq m+d_y$

(a)3　$c_y > c_x$ならば，

$(\rho_t; x, y', y)$

$(\rho_t; x, (x'+m) \bmod n, (y'-m) \bmod n, y)$

$(\rho_t; x, (x+2m+i) \bmod n, (x+m+i) \bmod n, y)$

$d_y+1 \leqq i \leqq c_x-1$

$(\rho_t; x, (x+m+i) \bmod n, y)$

$c_x \leqq i \leqq m+d_y, \ i \neq c_y$

(2)-2(b)　$d_y = c_x = \lfloor (m+r)/2 \rfloor$のとき，

$(\rho_t; x, y)$

$(\rho_t; x, (y+i) \bmod n, y) \qquad 1 \leqq i \leqq m$

(2)-3　$n = 4m+1$の場合

$y = (x+m+d_y) \bmod n$とすると，

$0 \leqq d_y \leqq m$

(2)-3(a)　$x' = (x+2m) \bmod n$

$y' = (x+2m+\Gamma) \bmod n$のとき，

(a)1　$d_y = 0$ならば，

$(\rho_t; x, x', y)$

$(\rho_t; x, y', y)$

$(\rho_t; x, (x+3m+i) \bmod n, (x+m+i) \bmod n, y)$

$1 \leqq i \leqq m-1$

(a)2　$1 \leqq d_y \leqq m-1$ならば，

$(\rho_t; x, y', y)$

$(\rho_t; x, (x+3m) \bmod n, (y+m) \bmod n, y)$

$(\rho_t; x, (x+2m+i) \bmod n, y) \qquad 0 \leqq i \leqq d_y-1$

$(\rho_t; x, (x+2m+i) \bmod n, (x+m+i) \bmod n, y)$

$d_y+1 \leqq i \leqq m-1$

(a)3　$d_y = m$ $(y = x')$ ならば，

$(\rho_t; x, x', y)$

$(\rho_t; x, (y+i) \bmod n, y) \qquad 1 \leqq i \leqq m$

(2)-3(b)　$x' = (x+2m) \bmod n$

$y' = (x+2m+1+\Gamma) \bmod n$のとき，

$(\rho_t; x, y', y)$

$(\rho_t; x, (x+3m) \bmod n, (y+1) \bmod n, y)$

$(\rho_t; x, (x+2m+i) \bmod n, y) \qquad 0 \leqq i \leqq d_y$

$(\rho_t; x, (x+2m+i) \bmod n, (x+m+i) \bmod n, y)$

$d_y+2 \leqq i \leqq m-1$

(2)-3(c)　$x' = (x+2m+1) \bmod n$

$y' = (x+2m+\Gamma) \bmod n$のとき，

点$0 \in \{(x+i) \bmod n \mid 1 \leqq i \leqq \Gamma\}$

(c)1　$d_y = 0$ならば，

$(\rho_t; x, y', y)$

$(\rho_t; x, x', (y+m) \bmod n, y)$

$(\rho_t; x, (x+3m+i) \bmod n, (x+m+i) \bmod n, y)$

$1 \leqq i \leqq m-1$

(c)2　$d_y = 1$ならば，

$(\rho_t; x, y', y)$

$(\rho_t; x, x', y)$

$(\rho_t; x, (x+3m+i) \bmod n, (x+m+i) \bmod n, y)$

$1 \leqq i \leqq m$

(c)3　$2 \leqq d_y \leqq m-1$ならば，

$(\rho_t; x, x', y)$

$(\rho_t; x, (x+3m+1) \bmod n, y)$

$(\rho_t; x, (x+2m+i) \bmod n, y) \qquad 1 \leqq i \leqq d_y-1$

$(\rho_t; x, (x+2m+i) \bmod n, (x+m+i) \bmod n, y)$

$d_y+1 \leqq i \leqq m$

(c)4　$d_y = m$ならば，

$(\rho_t; x, y', y)$

$(\rho_t; x, (x+3m+1) \bmod n, (y+m) \bmod n, y)$

$(\rho_t; x, (y+i) \bmod n, y)$　　　$1 \leqq i \leqq m-1$

(2)-3(d)　$x' = (x+2m+1) \bmod n$

$y' = (x+2m+1+\Gamma) \bmod n$ のとき,

(d)1　$d_y = 0$ ならば,

$(\rho_t; x, y', y)$

$(\rho_t; x, (y+2m) \bmod n, y)$

$(\rho_t; x, (x+3m+i) \bmod n, (x+m+i) \bmod n, y)$

$1 \leqq i \leqq m-1$

(d)2　$1 \leqq d_y \leqq m-1$ ならば,

$(\rho_t; x, y', y)$

$(\rho_t; x, (x+3m+1) \bmod n, (y+1) \bmod n, y)$

$(\rho_t; x, (x+2m+i) \bmod n, (x+m+i) \bmod n, y)$

$d_y + 2 \leqq i \leqq d_y + m$

(d)3　$d_y = m$ $(x = \lfloor n/2 \rfloor,\ y = n-1)$ ならば,

$(\rho_t; x, y)$

$(\rho_t; x, (y+i) \bmod n, y)$　　　$1 \leqq i \leqq m$

▌

[補題6]　$4m+2 \leqq n \leqq 12m+1$（但し, mは2以上の任意の整数）ならば, $(n,\ 2m+1)$-多重サイクルにおける路線割当ρ_oは$(3,\ 2m)$-耐性である. ▌(証明は省略する)

[補題7]　$n \geqq 12m+2$（但し, mは2以上の任意の整数）ならば, $(n,\ 2m+1)$-多重サイクルにおける路線割当ρ_oは$(3,\ 2m)$-耐性である.

(証明)　$x,\ y \in V$, $1 \leqq (y-x) \bmod n = \Gamma \leqq \lfloor n/2 \rfloor$として一般性を失わない. xとyの間に長さが3以下となる$2m+1$個の点独立路線列が存在することを示す. Qの定義より, $\lfloor n/2 \rfloor - (Q+1) \geqq Q - 2m$, $\lfloor n/2 \rfloor \leqq 2Q$, なお, $n \geqq 1m+2$のとき, $Q \geqq 4m$

(1)　$1 \leqq \Gamma \leqq m-1$の場合

$(\rho_o; x, y)$

$(\rho_o; x, (x-m+i) \bmod n, y)$

$\Gamma \leqq i \leqq 2m,\ i \neq m+\Gamma$

次に, $(\Gamma+1)$個の長さ3以下の路線列を以下のような場合に分けて示す.

(1)-1　trouble dot $t \notin \{(x-2m+i) \bmod n \mid 0 \leqq i \leqq \Gamma-1\}$ のとき,

$(\rho_o; x, x', y', y)$

$[\rho_o; x, x-2m+i, (x+Sm+j) \bmod n, y]$

$0 \leqq i \leqq \Gamma-1,\ S = \mathrm{ODD}(q),\ 1 \leqq j \leqq \Gamma$

(1)-2　trouble dot $t \in \{(x-2m+i) \bmod n \mid 0 \leqq i \leqq \Gamma-1\}$ のとき,

I_tを$(x-2m+I_t) \bmod n = t$とする.

$(\rho_o; x, x', y', y)$

$[\rho_o; x, x-2m+i, (x+Sm+j) \bmod n, y]$

$0 \leqq i \leqq \Gamma-1,\ i \neq I_t$

$S = \mathrm{ODD}(q),\ 1 \leqq j \leqq \Gamma-1$

$(\rho_o; x, (x-4m+I_t) \bmod n, (x+Tm+\Gamma)' \bmod n, y)$

$T = (q-2)m$

(1)-3　$x' = y'$（nが奇数かつ$x = n-1,\ y = 0$）のとき,

$(\rho_o; n-1, \lfloor n/2 \rfloor, 0)$

$(\rho_o; n-1, n-1-m, \mathrm{ODD}(q)m+1, 0)$

(2)　$m \leqq \Gamma \leqq \lfloor n/2 \rfloor$の場合

この場合,

$\Gamma - (\mathrm{ODD}(q)m - m + 1) - (\mathrm{EVE}(q)m - m + 1)$

$\leqq \lfloor n/2 \rfloor - (2qm - 3m + 2)$

$= \lfloor n/2 \rfloor - (2Q) + 2) + 3m$

$\leqq 3m - 2$

$< Q - m$

$[\rho_o; x, (x+I-i) \bmod n, (y-J+j)) \bmod n, y]$

$I = \min\{\mathrm{ODD}(\lfloor \Gamma/m \rfloor)m,\ \mathrm{ODD}(q)m\}$

$J = \max\{\min\{\mathrm{EVE}((\Gamma-I+m-1)/m\rfloor)m,$

$\mathrm{EVE}(q)m\},\ m\}$

$0 \leqq i \leqq m-1,\ 0 \leqq j \leqq m-1$

次に, $(m+1)$個の長さ3以下の路線列を以下のような場合に分けて示す.

c_xを$(y+c_x) \bmod n = x'$とする.

c_yを$(x-c_y) \bmod n = y'$とする.

(2)-1　$c_y \geqq 2m+1$のとき,

$S = \min\{\lfloor (x'-y') \bmod n / m \rfloor m,\ (q-2)m\}$

とし,

$z = (x-m-1)' \bmod n$

$J = \min\{\mathrm{ODD}(\lfloor (z-y) \bmod n / m \rfloor)m,\ \mathrm{ODD}(q)\}$

とする.

(2)-1(a)　trouble dot $t \notin \{(x-2m+i) \bmod n \mid 0 \leqq i \leqq m-1\}$ ならば,

$(\rho_o; x, x', (y'-S) \bmod n, y)$

$[\rho_o; x, (x-2m+i) \bmod n, (y+J-j) \bmod n, y]$

$0 \leqq i \leqq m-1,\ 0 \leqq j \leqq m-1$

(2)-1(b)　trouble dot $t \in \{(x-2m+i) \bmod n \mid 0 \leqq i \leqq m-1\}$ ならば,

I_tを$(x-2m+I_t) \bmod m = t$とする.

(b)1　$m \leqq \Gamma \leqq 2m$の場合

$(\rho_o; x, x', y', y)$

$(\rho_o; x, (x-4m+I_t) \bmod n, (y+J-2m)' \bmod n, y)$

$[\rho_o; x, (x-2m+i) \bmod n, (y+J-j) \bmod n, y]$

$0 \leqq i \leqq m-1,\ i \neq I_t,\ 1 \leqq j \leqq m-1$

(b)2　$\Gamma \geqq 2m+1$の場合

$z_t = (t+m-1)' \bmod n$

$J_t = \min\{\mathrm{ODD}(\lfloor (z_t-y) \bmod n / m \rfloor)m,$

$\mathrm{ODD}(q)m\}$

とする.

(b)2-1　$J_t \geqq 3m$ならば,

$T_t = \min\{J_t - m,\ \mathrm{ODD}(q-2)m\}$

$(\rho_o; x, x', (y'-S) \bmod n, y)$

$(\rho_o; x, t, (y+T_t)' \bmod n, y)$

$[\rho_o; x, (t+i) \bmod n, (y+J_t-j) \bmod n, y]$

$1 \leqq i \leqq m-1,\ 1 \leqq j \leqq m-1$

(b)2-2　$J_t=m$ならば，

$(\rho_o;x,x',(y'-S)\bmod n,y)$

$(\rho_o;x,t,(y+1)'\bmod n,y)$

$[\rho_o;x,(t+i)\bmod n,(y+m-j)\bmod n,y]$

$1\leqq i\leqq m-1,\ 0\leqq j\leqq m-2$

(2)-2　$m+1\leqq c_y\leqq 2m$のとき，

(2)-2(a)　$x=0$かつ$c_y=m+1$ならば，

$(\rho_o;x,y',y)$

$(\rho_o;x,y)$

$(\rho_o;x,(x-i)\bmod n,y)$　　$2\leqq i\leqq m$

他の場合には

(2)-2(b)　trouble dot $t\notin\{(c_y+i)\bmod n\mid 1\leqq i\leqq m\}$ならば，

$(\rho_o;x,x',(y'-Q+2m)\bmod n,y)$

$(\rho_o;x,(c_y+i)\bmod n,y)$

$1\leqq i\leqq m$

(2)-2(c)　trouble dot $t\in\{(c_y+i)\bmod n\mid 1\leqq i\leqq m\}$ならば，

$(\rho_o;x,t,y',y)$

$(\rho_o;x,x',(y+2m)\bmod n,y)$

$(\rho_o;x,(c_y+i)\bmod n,y)$

$1\leqq i\leqq m,\ (c_y+i)\bmod n\neq t$

(2)-3　$1\leqq c_y\leqq m$のとき，

$I_y=m-c_y\bmod n$

$I_x=m-c_x\bmod n$

$S_1=\mathrm{EVE}(q)\ m$

$S_2=\mathrm{ODD}(q)\ m$

とする．

$(\rho_o;x,x',y)$

$(\rho_o;x,y',y)$

$[\rho_o;x,(x-S_1+i)\bmod n,(y+S_2-j)\bmod n,y]$

$0\leqq i\leqq m-1,\ i\neq I_y,$

$0\leqq j\leqq m-1,\ j\neq I_x$

特に，$y=x'$ならば，

$(\rho_o;x,y)$

$[\rho_o;x,(x-S_1+i)\bmod n,(y+S_2-j)\bmod,y]$

$0\leqq i\leqq m-1,\ 0\leqq j\leqq m-1$

▌

［命題３］(5)　$k=2m$，$n\geqq 2m+1$（但し，mは任意の正整数）ならば，（n，２m）-多重サイクルにおける路線割当ρ_eは（３，２m－１）-耐性である．

▌

以上に述べた補題３～７と命題３を総合すると，次の定理１及び系１が成り立つ．

［定理１］　（n，k）-多重サイクルグラフM（n，k）（$n\geqq k+1$）において（３，k－１）-耐性となる両方向且つ最短な路線割当が存在する．▌

［系１］　任意の（k－１）個の故障に対して，両方向且つ最短な路線割当をもつＳＲ－グラフの直径が３以下となる辺数最小のn個（$n\geqq k+1$）の点のグラフを構成できる．▌

４．　結語

文献（３）では，（n，k）- 多重サイクルグラフ（$n>k\geqq 2$）上の（４，k－１）-耐性をもつ両方向性準最短路線割当が構成できることが示されたが，本論文では，より効率的な（３，k－１）-耐性を持つ両方向性最短路線割当が存在することを示した．また文献（３）では，（２dm，２m）-多重サイクルグラフ（m，$d\geqq 1$）上の（２，k－１）-耐性を持つ両方向性最短路線割当は存在しないことが示されているので，特殊な場合（例えば，$k=n-1$，即ち完全グラフの場合等）を除き定理１をこれ以上改善することはできない．なお，構成問題としては，（n，k）-多重サイクルグラフの直径がnに比例するので，通信費用を低減するためには，直径のもっと小さいグラフを取上げて考察することも必要となる．

文　献

(1) D.Dolev, J.Halpern, B.Simons and R.Strong: "A new look at fault tolerant network routing", Proc. of ACM 15th STOC, pp.526-535 (1984).

(2) C.Berge: Graph and Hypergraph,North Holland, New York(1970)／伊理他訳：グラフの理論Ｉ，Ⅱ，サイエンス社(1976).

(3) 羅,和田,川口："故障耐性の高い路線割当をもつ通信網の構成問題"，信学論 (A) Vol. J70-A 11, pp. 1620-1631.

(4) K. Kawaguchi and K. Wada: " Optimal Fault-tolerant Network Routings for (k+1)-connected Graphs", The University of Wisconsin-Milwaukee Computer Science Technical Report UWM EE&CS 88-2 (March 3, 1988).

(5) 羅,川口,和田："（n，2m）-多重サイクルに対する（3，2m－1）-耐性かつ両方向性の最短路線割当"，S.63 信学会春季全国大会 SD-5-6 pp. 1-305--1-306.